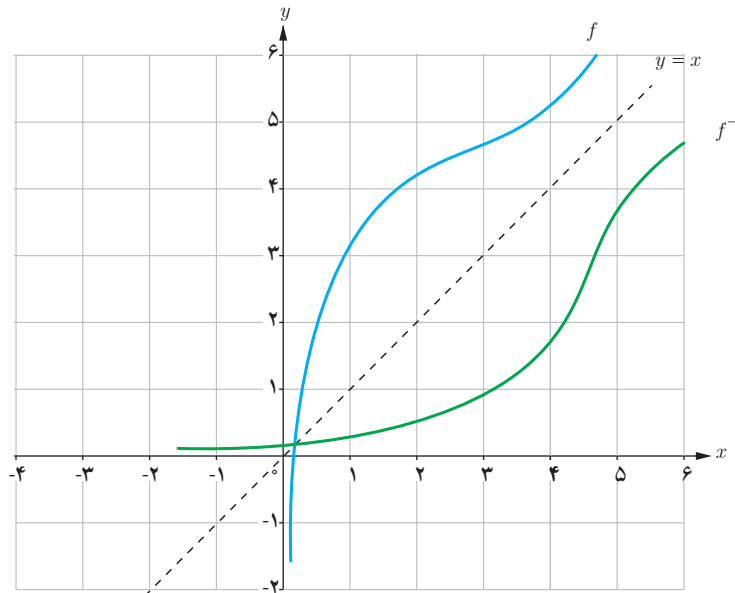


یادآوری

همان طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک به یک f ، تابعی جدید به دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن گاه نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ آن گاه:

$$f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(1) = 4 \\ (fof^{-1})(3) = f(f^{-1}(3)) = f(2) = 3 \rightarrow fof^{-1} = \{(4, 4), (3, 3), (5, 5)\} \\ (fof^{-1})(5) = f(f^{-1}(5)) = f(3) = 5 \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f^{-1} داریم:

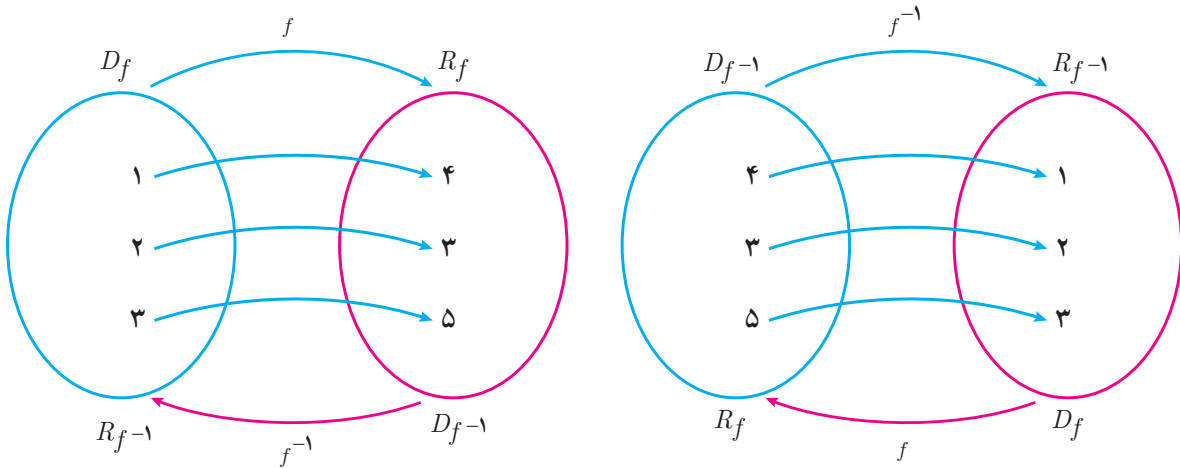
$$(fof^{-1})(x) = x$$

همچنین :

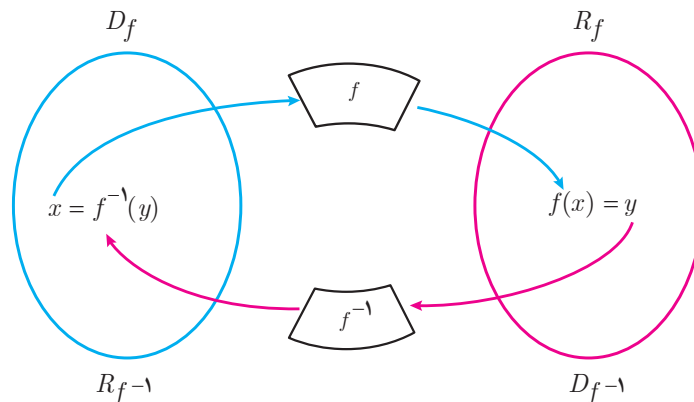
$$\begin{cases} (f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(4) = 1 \\ (f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 2 \rightarrow f^{-1} \circ f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \\ (f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3 \end{cases}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f داریم :



به طور کلی اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می دهد.



اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

با توجه به آنچه که دیدیم می توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه ای باشند که :

$$(f \circ g)(x) = x \quad ; \quad x \in D_g \quad \text{الف)}$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f \quad \text{ب)}$$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = 3x - 4$$

$$g(x) = \frac{x + 4}{3}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x + 4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

همچنین :

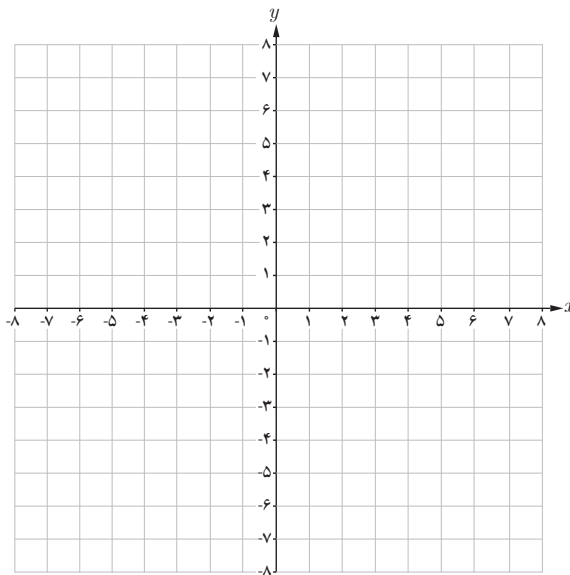
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) + 4}{3} = \frac{3x - 4 + 4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.^۱

کار در کلاس

آیا تابع $f(x) = x^3$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^3$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطه تابع وارون چیست؟



۱- توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجه دوم، $\sqrt{ax+b}$ ، x^2 و $\sqrt[3]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی ها الزامی است.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطه f^{-1} را نیز به دست آورید. تابع f یک به یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-3, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

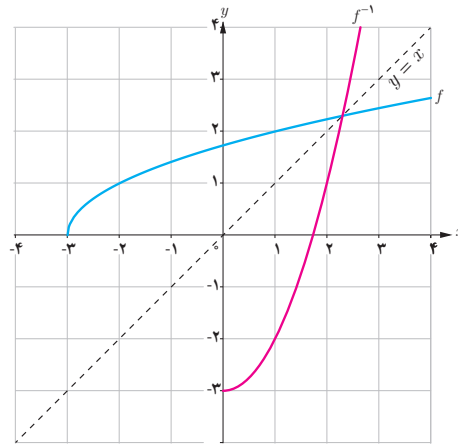
$$y = \sqrt{x+3}$$

$$y^2 = x+3$$

$$x = y^2 - 3$$

$$f^{-1}(y) = y^2 - 3$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3$$



کار در کلاس

ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

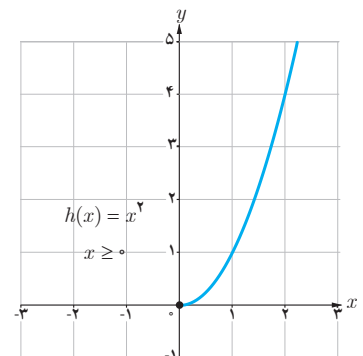
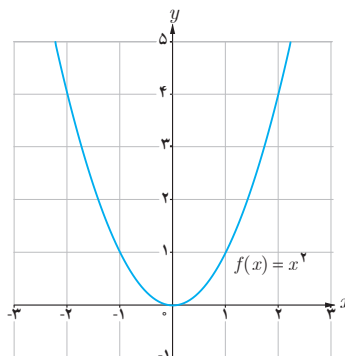
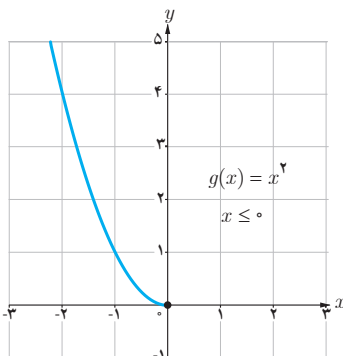
الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

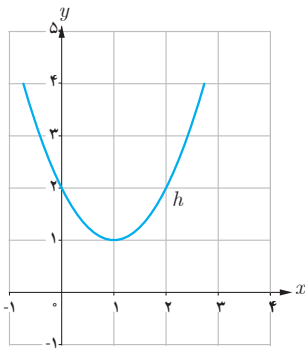
ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

پ) $h(x) = x^2 + 1$

محدود کردن دامنه تابع

از سال قبل می دانیم که اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $[0, +\infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ یا زیرمجموعه هایی از این دو بازه، تابعی یک به یک به دست می آید.





مثال: نمودار تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنه این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

مثلاً دامنه تابع h را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطه تابع جدید که آن را می‌نامیم با ضابطه $h(x)$ برابر است اما دامنه تابع h مجموعه اعداد حقیقی و دامنه تابع k بازه $[1, +\infty)$ است.

در تابع k ، x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$k(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$y = (x-1)^2 + 1$$

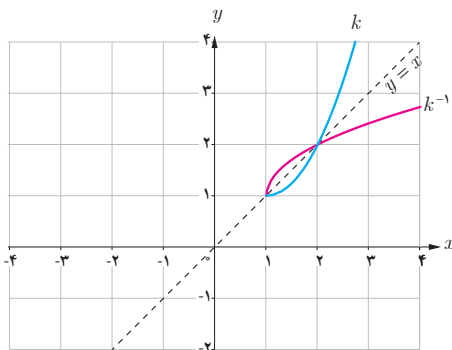
$$(x-1)^2 = y - 1$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{y - 1}$$

$$x = \pm \sqrt{y - 1} + 1$$

$$k^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} + 1$$

جواب منفی غیر قابل قبول است. (چرا؟)



نمودار توابع k و k^{-1} به صورت روبه‌رو است:

آیا به جز بازه $[1, +\infty)$ ، بازه دیگری می‌توان یافت که تابع h در آن یک‌به‌یک باشد؟



باغ ارم شیراز

۱ ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x + 3}{2}$
 ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1}$

۲ در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

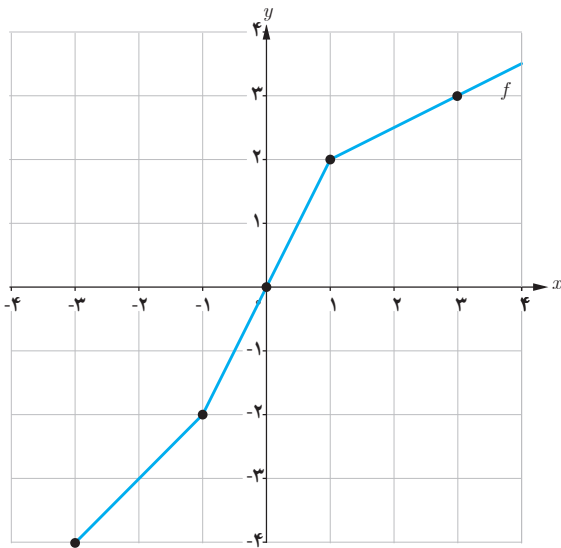
الف) $f(x) = \frac{-\sqrt{x}}{2} - 3$ ، $g(x) = -\frac{2x + 6}{\sqrt{x}}$
 ب) $f(x) = -\sqrt{x - 8}$ ، $g(x) = 8 + x^2 ; x \leq 0$

۳ رابطه بین درجه سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

۴ توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

الف) $f(x) = |x|$
 ب) $g(x) = -x^2$
 پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$

۶ با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۷ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $(f \circ g)^{-1}(5)$

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$



عکاس : بختیار رنجبری

روستای رهلی داغلار — آذربایجان شرقی