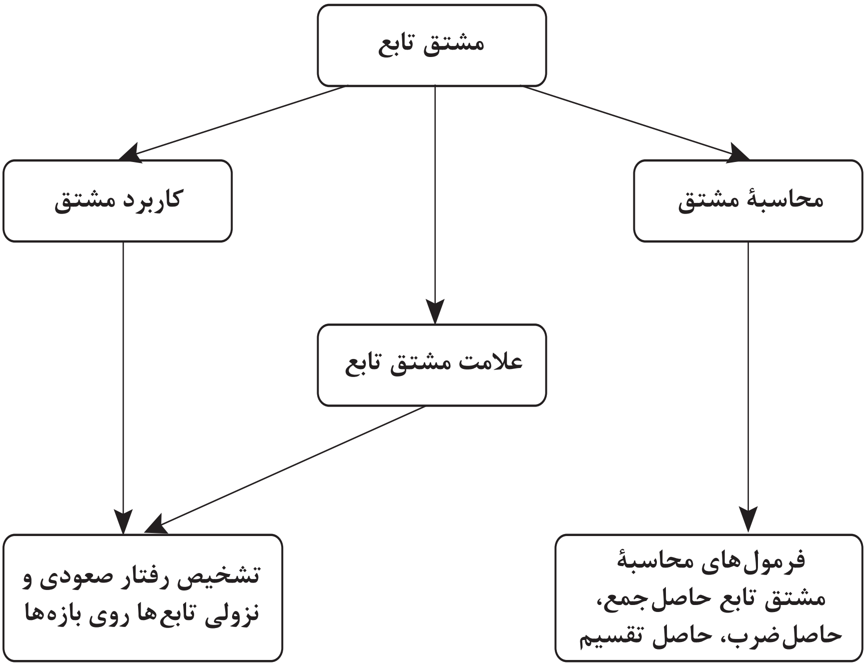
فصل پنجم

محاسبات مشتق و کاربردها

نقشه مفهومی فصل پنجم



اهداف کلی پودمان

۱ آشنایی با قوانین مشتق‌گیری جمع، ضرب و تقسیم تابع‌ها
۲ محاسبهٔ مشتق تابع‌ها در نقاط داده شده و دلخواه
۳ آشنایی با مشتق تابع‌های چندجمله‌ای
۴ آشنایی با رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها
۵ درک رابطهٔ بین رفتار صعودی و نزولی و علامت مشتق تابع‌ها
۶ درک وضعیت تابع در نقاطی که مشتق در آن نقطه برابر صفر است
۷ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا و زندگی واقعی به‌کمک مشتق و تفسیر چگونگی تغییرات

پیش‌نیازها

- آشنایی با اعمال روی توابع شامل جمع و ضرب توابع و تقسیم دو تابع
- آشنایی با تعریف مشتق تابع در یک نقطه و نماد آن
- توانایی محاسبه مشتق تابع در یک نقطه و به‌دست آوردن تابع مشتق
- آشنایی با مفهوم تابع حرکت
- مهارت استفاده از نمودار برای تعیین علامت تابع‌ها
- مهارت تشخیص رفتار تابع از روی نمودار
- آشنایی با شیب خطوط

بخش اول: محاسبۀ مشتق تابع‌ها

اهداف بخش

۱ آشنایی با قوانین مشتق‌گیری جمع، ضرب و تقسیم تابع‌ها
۲ آشنایی با مشتق تابع‌های چندجمله‌ای
۳ محاسبۀ مشتق تابع‌ها در نقاط داده شده و دلخواه

واژه‌های کلیدی: مشتق مجموع و حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع، مشتق تابع چندجمله‌ای

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، یادگیری فرمول‌های مشتق‌گیری مجموع و حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم و تابع و به‌ویژه آشنایی با مشتق تابع‌های چندجمله‌ای است. در مورد مشتق مجموع دو تابع از زمینۀ قانون جمع سرعت‌ها در فیزیک استفاده شده است و نهایتاً فرمول مشتق جمع دو تابع بیان شده است. در مورد مشتق حاصل‌ضرب تابع‌ها فقط فرمول آورده شده است و کتاب وارد محاسبات حدی نشده است. با استفاده از فرمول مشتق حاصل‌ضرب در مثال‌ها مشتقات دیگری هم محاسبه شده‌اند که هم کارآیی این فرمول را نشان می‌دهند و هم شیوۀ به‌کارگیری این فرمول تمرین شده است. به‌طور خاص به مشتق تابع‌های چندجمله‌ای پرداخته شده است که نتیجه‌ای از فرمول‌های مشتق‌گیری مجموع و حاصل‌ضرب تابع‌ها است.

در آخر این بخش فرمول مشتق تقسیم دو تابع از طریق مشتق حاصل‌ضرب دو تابع ارائه شده است.

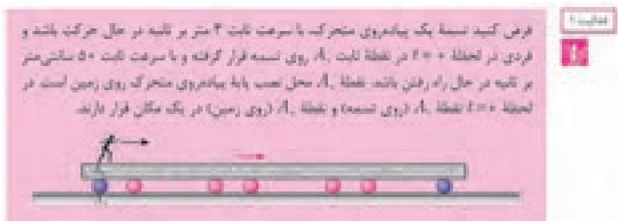
ورود به مطلب

این بخش بیشتر جنبۀ محاسباتی دارد و مفهوم خاص و جدیدی ندارد. تا اینجا، محاسبۀ مشتق فقط از طریق تعریف قابل انجام است و باید این مسئله را مطرح سازیم که این عمل در مورد تابع‌های پیچیده دشوار و در برخی موارد غیر عملی است. ما باید راه‌های بهتری برای محاسبۀ مشتق بیابیم. با شناخت مشتق تابع‌های ساده سعی می‌کنیم مشتق تابع‌های پیچیده‌تر را به‌دست آوریم. با ذکر این نکات می‌توانید در مورد مشتق مجموع دو تابع پرسش کنید و حدس هنرجویان را

بررسی کنید و وارد کتاب شوید.
در مورد مشتق حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم دو تابع نیز با همین روش می‌توانید عمل کنید.

فعالیت آموزشی

در ابتدای این بخش سعی شده است در یک زمینهٔ واقعی، مجموع دو تابع و مشتق مجموع دو تابع ارائه شود. زمینهٔ انتخاب شده حرکت یک قطار و حرکت یک فرد در داخل قطار است. این یک مسئله سادهٔ فیزیکی است و به قانون جمع سرعت‌ها معروف است. تابع حرکت فرد نسبت به زمین به‌صورت مجموع تابع حرکت فرد نسبت به‌قطار و تابع حرکت قطار نسبت به زمین است. سرعت فرد نسبت به زمین نیز به‌صورت جمع سرعت فرد نسبت به قطار و سرعت قطار نسبت به زمین است. دلیل درستی این مطلب همان قانون مشتق مجموع دو تابع است.
برای درک درستی این قانون فعالیت(۱) طرح شده است.



اهداف موضوعی

- درک تساوی مشتق حاصل‌جمع دوتابع و حاصل‌جمع مشتق آنها.

فرایندها

- پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی).
- ارتباطات کلامی.
- حل مسئله (مدل‌سازی).

حل فعالیت ۱

۱ $f(\text{۰})$ فاصلهٔ نقطهٔ A_1 (روی تسمه) را از نقطهٔ A_0 (محل نصب پایهٔ پیاده‌رو روی زمین) در زمان $t=\text{۰}$ نشان می‌دهد و $g(\text{۰})$ فاصلهٔ فرد را از نقطهٔ A_1 در زمان $t=\text{۰}$ نشان می‌دهد.

۲ $f(\text{۱})$ فاصلهٔ نقطهٔ A_1 از نقطهٔ A_0 در زمان $t=\text{۱}$ و $g(\text{۱})$ فاصلهٔ فرد از نقطهٔ A_1

در زمان $t=۱$ را نشان می‌دهد. همچنین $f(۱)+g(۱)$ فاصلهٔ فرد را از نقطهٔ $A_۰$ در زمان $t=۱$ نشان می‌دهد.

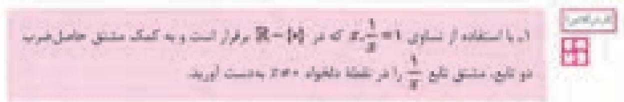
۳ قانون تابع h به‌صورت $h(t)=۳t+\frac{۱}{۲}t$ می‌باشد. این تابع فاصلهٔ فرد از نقطهٔ $A_۰$ (روی زمین) در زمان t را نشان می‌دهد.

۴ $f'(t)$ = سرعت حرکت نقطهٔ $A_۱$ نسبت به نقطهٔ $A_۰$ (روی زمین) در زمان t ،
$g'(t)$ = سرعت حرکت فرد نسبت به نقطهٔ $A_۱$ (روی تسمه) در زمان t ،
$h'(t)$ = سرعت حرکت فرد نسبت به نقطهٔ $A_۰$ (روی زمین) در زمان t می‌باشد.

۵ $f'(t)=۳$ و $g'(t)=\frac{۱}{۲}$ و $h'(t)=۳+\frac{۱}{۲}$ داریم : $h'(t)=f'(t)+g'(t)$

در ادامه، توضیح داده می‌شود نتیجه این فعالیت عمومیت دارد و قانون مشتق مجموع دو تابع بیان می‌شود و در مثال‌هایی تمرین می‌شود.
مشتق حاصل‌ضرب دو تابع نیز توسط هنرجویان مطرح می‌شود و حدس‌هایی زده می‌شود. نهایتاً از زبان معلم مستقیماً قانون مشتق حاصل‌ضرب دو تابع بیان می‌شود و در مثال‌ها تمرین می‌شود. همچنین به‌کمک فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع مشتق تابع‌های خاصی به دست می‌آید که قوت این قانون را نشان می‌دهد.
در ادامه به کار در کلاس(۱) می‌رسیم که این مفاهیم در آن تمرین می‌شوند.

حل کار در کلاس ۱


۱. با استفاده از تساوی $x.\frac{۱}{x}=۱$ که در $\mathbb{R}-\{۰\}$ برقرار است و به کمک مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، مشتق تابع $\frac{۱}{x}$ را در نقطهٔ دلخواه $x\neq۰$ به‌دست آورید.

۱ـ قرار می‌دهیم : $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ داریم: $f(x).g(x)=۱$ با مشتق‌گیری از دو طرف تساوی داریم:

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=۰\Rightarrow ۱\times\frac{۱}{x}+x\times g'(x)=۰\Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{x^۲}$$

در اینجا رابطهٔ $x\cdot\frac{۱}{x}=۱$ ارائه شده تا به کمک آن مشتق موردنظر محاسبه شود، در صورت آمادگی هنرجویان می‌توان از آنها خواست تا مشتق توابعی نظیر $\frac{۱}{x^۲}$ یا ... را با ارائهٔ رابطه‌ای نظیر رابطهٔ ارائه شده در این سؤال، به‌دست آورند.
در ادامه در فعالیت(۲) با کاربردی از مشتق حاصل‌ضرب تابع‌ها، مشتق تابع‌هایی به‌صورت $f(x)=ax^n$ به‌دست می‌آید که پایه یافتن مشتق تابع‌های چندجمله‌ای است.

فعالیت ۲

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5
$f'(x)$	۱	$2x$	$3x^2$	—	—

۲ چه رابطه‌ای بین قانون $f(x)$ و ضریب و توان در $f'(x)$ وجود دارد؟

۳ اگر $n \in N$ و $f(x)=x^n$، قاعده‌ای برای یافتن $f'(x)$ پیشنهاد دهید.

۴ اگر $n \in N$ و a یک عدد حقیقی و $f(x)=ax^n$ قاعده‌ای برای یافتن $f'(x)$ پیشنهاد دهید.

اهداف موضوعی

- آشنایی با روش محاسبهٔ مشتق تابع چند جمله‌ای.
- تقویت مهارت استفاده از قوانین مشتق‌گیری.

فرایندها

- الگویابی
- ارتباطات کلامی
- تعمیم دادن

حل فعالیت ۲

۱ با محاسبهٔ مشتق تابع‌های موجود در جدول داریم :

$$(x^4)' = (x^3 . x)' = (x^3)' . x + x^3 . (x)' = 3x^2 . x + x^3 . 1 = 4x^3$$
$$(x^5)' = (x^4 . x)' = (x^4)' . x + x^4 . (x)' = 4x^3 . x + x^4 . 1 = 5x^4$$

جدول تکمیل شده به صورت زیر است:

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5
$f'(x)$	۱	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$

۲ توان x در $f'(x)$ از توان x در $f(x)$ یک واحد کمتر است و ضریب $f'(x)$ همان توان x در $f(x)$ است.

۳ برای به‌دست آوردن $f'(x)$ کافی است یک واحد از توان x در f کم کنیم و آن‌را در توان x یعنی n ضرب کنیم. ($f'(x) = nx^{n-1}$)

۴ چون $a \in R$ عددی ثابت است می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = a(x^n)' = anx^{n-1}$$

در ادامه، مشتق تابع‌های چندجمله‌ای به‌صراحت بیان می‌شوند و سپس مسئلهٔ مشتق تقسیم دو تابع مطرح می‌شود. معلم راه حلی برای یافتن مشتق تقسیم دو تابع پیشنهاد می‌کند و طبق آن قانون مشتق تقسیم دو تابع به‌دست می‌آید. این مطلب در مثال‌هایی توضیح داده می‌شوند و در کار در کلاس(۲) تمرین می‌شوند.


کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. دامنه‌های این تابع‌ها را بازهٔ $(\circ, +\infty)$ در نظر بگیرید.

الف) $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$

ب) $g(x) = x^{۲} + ۴\sqrt{x}$

پ) $h(x) = \dfrac{x^{۲} - ۴x}{۳x + ۴}$

حل کار در کلاس ۲

الف) $f'(x) = ۲x - ۴$

ب) $g'(x) = ۲x + \dfrac{۴}{۲\sqrt{x}}$

پ) $h'(x) = \dfrac{(۲x-۴)(۳x+۴) - ۳(x^{۲} - ۴x)}{(۳x+۴)^{۲}}$

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها : حل مسئله

الف) $f'(x) = ۳x^{۲} + ۴$

ب) $g'(x) = ۲x\,(x^{۲} - ۳) + ۲x\,(x^{۲} + ۱) = ۴x^{۳} - ۴x$

پ) $h'(x) = \dfrac{۳(x^{۲}+۱) - ۲x(۳x+۱)}{(x^{۲}+۱)^{۲}} = \dfrac{۳x^{۲} + ۳ - ۶x^{۲} - ۲x}{(x^{۲}+۱)^{۲}} = \dfrac{-۳x^{۲} - ۲x + ۳}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$

۲ فرایندها و مهارت‌ها : حل مسئله، استدلال، پیوند و اتصال

الف)

$$\begin{cases} t = \circ & \Rightarrow & f(\circ) = ۵ \\ t = ۵ & \Rightarrow & f(۵) = ۱\circ۵ \\ t = ۱\circ & \Rightarrow & f(۱\circ) = ۲\circ۵ \end{cases}$$
وضعیت قطار نسبت به ایستگاه از لحاظ فاصله

$$\begin{cases} t = \circ & \Rightarrow & f'(\circ) = ۲\circ \\ t = ۵ & \Rightarrow & f'(۵) = ۲\circ \\ t = ۱\circ & \Rightarrow & f'(۱\circ) = ۲\circ \end{cases}$$
وضعیت قطار نسبت به ایستگاه از لحاظ سرعت

ب)

$$\begin{cases} t=۰ & \Rightarrow & g(۰)=۵ \\ t=۵ & \Rightarrow & g(۵)=۱۳۰ \\ t=۱۰ & \Rightarrow & g(۱۰)=۳۰۵ \end{cases}$$ وضعیت ماشین نسبت به ایستگاه از لحاظ فاصله

$$\begin{cases} t=۰ & \Rightarrow & g'(۰)=۲۰ \\ t=۵ & \Rightarrow & g'(۵)=۳۰ \\ t=۱۰ & \Rightarrow & g'(۱۰)=۴۰ \end{cases}$$ وضعیت ماشین نسبت به ایستگاه از لحاظ سرعت

پ) طبق محاسبات انجام شده فاصله ماشین از قطار در لحظات ۰ و ۵ و ۱۰ به ترتیب برابر ۰ و ۲۵ و ۱۰۰ (برحسب متر) است. در همه این لحظات سرعت قطار مقدار ثابت ۲۰ متر بر ثانیه است ولی سرعت ماشین درحال افزایش است و به ترتیب برابر ۲۰ و ۳۰ و ۴۰ متر بر ثانیه است.

ت) فاصلهٔ قطار از ماشین با تابع

$$h(t)=g(t)-f(t)=t^{۲}+۲۰t+۵-۲۰t-۵=t^{۲}$$

داده می‌شود. سرعت دور شدن ماشین از قطار در هر لحظهٔ t (از دامنهٔ تابع) برابر $h'(t)=۲t$ است.

۳ فرایندها و مهارت‌ها : حل مسئله، استدلال

$$v'(x)=۲f(x)f'(x)$$

$$v(x)=(۴x^{۲}-۱)^{۲} \Rightarrow v'(x)=۲(۴x^{۲}-۱).(۸x)=۶۴x^{۳}-۱۶x$$

۴ فرایندها و مهارت : حل مسئله ، پیوند و اتصال

الف)

$$g'(T)=۱۰\times\frac{۱}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

$$f'(T)=۱۵\times\frac{۱}{۸}=\frac{۱۵}{۸}$$

ب)

$$\text{تابع مساحت}=S(T)=g(T).f(T) \Rightarrow S'(T)=g'(T).f(T)+f'(T).g(T)$$

$$S'(T)=\frac{۵}{۴}\times۱۵(۱+\frac{۱}{۸}T)+\frac{۱۵}{۸}\times۱۰(۱+\frac{۱}{۸}T)=\frac{۷۵}{۲}(۱+\frac{۱}{۸}T)$$

بخش دوم: تابع‌های صعودی و نزولی و مشتق آنها

اهداف بخش

۱ آشنایی با رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها
۲ برقرار کردن رابطه بین رفتار صعودی و نزولی و علامت مشتق تابع‌ها
۳ درک وضعیت تابع در نقاطی که مشتق در آن نقط برابر صفر است
۴ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا و زندگی واقعی به‌کمک مشتق و تفسیر چگونگی تغییرات

واژه‌های کلیدی: تابع صعودی، تابع نزولی، علامت مشتق، صفر شدن مشتق

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، آموزش رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها و رابطهٔ این مفهوم با علامت مشتق تابع و بررسی رفتار تابع‌ها از طریق یافتن علامت مشتق این تابع‌ها است. تا اینجا، مفهوم مشتق بیشتر به‌عنوان سرعت تغییرات مقادیر تابع مطرح شده است و به‌عنوان یک عدد مثبت معنای قابل قبولی دارد. این بخش با طرح این سؤال آغاز می‌شود که منفی شدن مشتق چه معنایی دارد.

برای پاسخ به این سؤال در یک فعالیت دو حالت مشتق مثبت و منفی در مورد تابع‌ها و رفتار صعودی و نزولی آنها بررسی می‌شود تا هنرجو را به این نتیجه برساند که مثبت و منفی شدن مشتق تابع‌ها در ارتباط با صعودی و نزولی بودن آنها است. پس از انجام این فعالیت، این نکات به‌طور صریح بیان می‌شوند و در مثال‌هایی تمرین می‌شوند.

نکته مهمی که باید به آن توجه کرد آن است که علامت مشتق وقتی وضعیت صعودی و نزولی تابع را مشخص می‌کند که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. در طی مباحثاتی بین معلم و هنرجو به این نکته توجه می‌شود و در مثال‌هایی اهمیت این نکته گوشزد می‌شود.

همچنین، این نکته مطرح می‌شود که یک تابع لزوماً همه‌جا صعودی یا همه‌جا نزولی نیست و ممکن است روی برخی بازه‌ها صعودی و برخی بازه‌های دیگر نزولی باشد. در اینجا نقش نقاطی که مشتق تابع، صفر می‌شود نیز مطرح می‌شود و چگونگی وضعیت تابع در این نقاط مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ورود به مطلب

در این بخش دو مفهوم کلیدی رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها و علامت مشتق تابع باید طرح شوند. باید یک سؤال مهم مطرح سازیم که هم‌زمان این دو مفهوم را در خود داشته باشد. رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها را هنرجویان به‌طور ضمنی در جاهای دیگر هم دیده‌اند اگرچه نام رسمی بر این مفاهیم انتخاب نکرده باشند. پس، بهتر است تمرکز خود را بر علامت مشتق تابع بگذاریم و این سؤال را مطرح سازیم که منفی شدن یا مثبت شدن مقدار مشتق یک تابع چه معنایی دارد و چه چیزی را نشان می‌دهد. برای پاسخ به این سؤال بهتر است در مورد تابع‌های خاص این بررسی انجام شود و حدسیه‌هایی توسط هنرجویان ارائه شود و این حدسیه‌ها بررسی شوند.

فعالیت آموزشی

این بخش با پرسش از معنای علامت مشتق و منفی شدن مشتق آغاز می‌شود. در فعالیت (۳) سعی می‌شود به این پرسش پاسخی داده شود.


فعالیت ۳

۱ تابع $f(x)=x^2$ را با دامنهٔ $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید. جدول زیر برخی از مقادیر تابع را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$f(x)$	۰/۲۵	۱	۲۵	...	...	...	...

اهداف موضوعی

- درک ارتباط بین علامت مشتق تابع در یک بازه و رفتار تابع (صعودی یا نزولی بودن).
- کسب مهارت محاسبهٔ مشتق.

فرایندها :

- بازنمایی
- مقایسه کردن
- ارتباطات کلامی
- حدسیه‌سازی

حل فعالیت ۳

۱ جدول تکمیل شده به صورت زیر است:

x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$f(x)$	۰/۲۵	۱	۲۵	۱۰۰	۹۰۰	۲۵۰۰	a^2

۲ افزایش می‌یابد.

۳ $f'(x) = x^{۲}$ علامت $f'(x)$ در (∞+، ۰) مثبت است.

۴ جدول تکمیل شده :

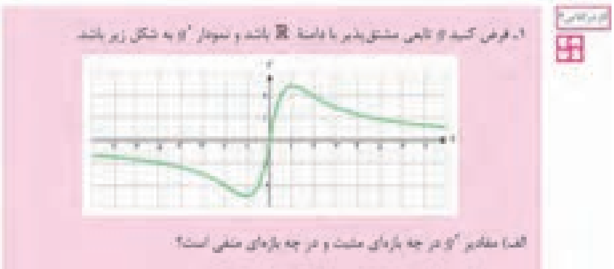
x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$f(x)$	۰/۲۵-	۱-	۲۵-	۱۰۰-	۹۰۰-	۲۵۰۰-	$-a^{۲}$

۵ کاهش می‌یابد.

۶ $f'(x) = -۲x$ علامت $f'(x)$ در (∞+، ۰) منفی است.

۷ حدس می‌زنیم اگر علامت مشتق یک تابع در دامنه‌اش مثبت باشد تابع افزایشی و اگر علامت مشتق یک تابع در دامنه‌اش منفی باشد تابع کاهشی است.

در ادامه، با توضیحات بیشتر در مورد رفتارهای افزایشی و کاهشی توابع و نامگذاری این تابع‌ها به‌عنوان تابع‌های صعودی و نزولی رابطهٔ بین علامت مشتق و این ویژگی‌ها به‌طور صریح بیان می‌شود. این نکته در مثال‌هایی توضیح داده می‌شود. همچنین این نکته مهم تذکر داده می‌شود که علامت مثبت و منفی مشتق وقتی نشان‌دهندهٔ صعودی یا نزولی بودن تابع است که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. در ادامه، این نکات در کار در کلاس(۳) تمرین می‌شوند.



در این قسمت می‌توان نمودار تابع را ارائه کرد و از هنرجو خواست از بین چند نمودار داده شده، نمودار تابع مشتق را تشخیص دهد. یا با دادن نمودار مشتق یک تابع از هنرجو خواست رفتار تابع (افزایشی یا کاهشی بودن و ...) را توصیف کند.

حل کار در کلاس ۳

۱ الف) مقادیر $g'(x)$ در بازهٔ (۰، ∞−) منفی و در بازهٔ (∞+ ، ۰) مثبت است.
ب) تابع $g(x)$ در بازهٔ (۰، ∞−) نزولی و در بازهٔ (∞+ ، ۰) صعودی است.
پ) نمودار آخر در پایین.

۲ در تعاریف تابع‌های صعودی و نزولی، تابع‌های ثابت در هر دو حالت صدق می‌کنند. بنابراین، تابع‌های ثابت هم صعودی هستند و هم نزولی. فقط تابع‌های ثابت می‌توانند هم صعودی باشند و هم نزولی. مشتق این تابع‌ها هم مثبت یا بزرگ‌تر از صفر و هم منفی یا کوچک‌تر یا مساوی صفرند. یعنی مشتق این تابع‌ها صفر است.

در ادامه، وضعیت یک تابع در نقاطی که مشتق تابع در آن نقاط صفر است مورد بحث قرار می‌گیرد و در مثال‌هایی وضعیت‌های ممکن توضیح داده می‌شوند.

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال، بازنمایی

با توجه به نمودار تابع می‌توان گفت :
در بازه (۱، ∞−) رفتار تابع افزایشی و در بازهٔ (۱،۳) رفتار تابع کاهشی و در بازه (∞+ ، ۳) رفتار تابع افزایشی است.

۲ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال ، بازنمایی

الف) با توجه به نمودار می‌توان گفت ، این تابع در بازه‌های (۰،۱) و (۱،۲) رفتار افزایشی دارد و روی این بازه‌ها صعودی است.
ب) خیر. با توجه به نمودار تابع ، این تابع اگر چه در هریک از بازه‌های (۰،۱) و (۱،۲) صعودی است ولی روی تمام دامنهٔ خود صعودی نیست.

۳ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال ، حل مسئله، بازنمایی

الف) با توجه به نمودار تابع می‌توان گفت :
در بازهٔ (۱−، ∞−) نزولی، در بازهٔ (۰، ۱−) صعودی، در بازهٔ (۰،۱) نزولی و در بازهٔ (∞+ ، ۱) صعودی است.
ب) مشتق تابع در بازهٔ (۱−، ∞−) منفی، در بازهٔ (۰، ۱−) مثبت و در بازهٔ (۰،۱) منفی و در بازهٔ (∞+ ، ۱) مثبت است.
پ) مشتق تابع در نقاط $x =$ −۱،۰،۱ صفر می‌باشد و در این نقاط مشتق تغییر علامت می‌دهد.

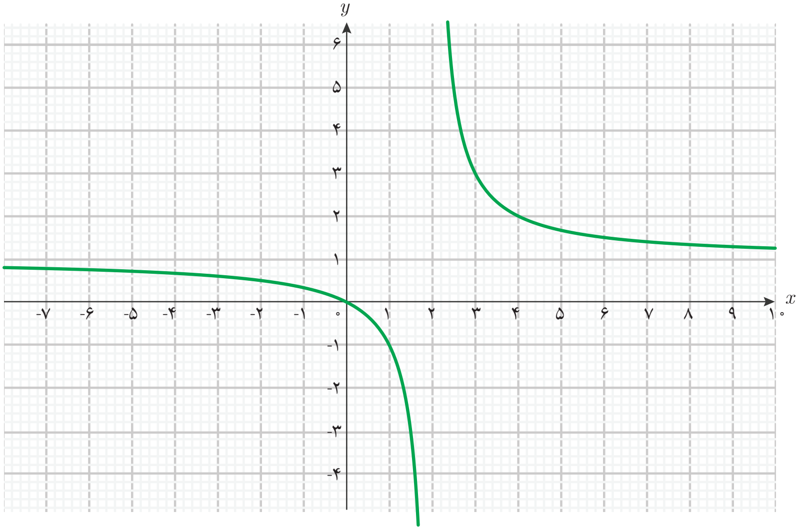
۴ فرایندها و مهارت : حل مسئله ، استدلال ، بازنمایی

الف) $f'(x) = \frac{۱(۲-x)-(-۱)(x)}{(۲-x)^۲} = \frac{۲}{(۲-x)^۲}$

ب) خیر. چون $f'(x) \neq ۰$

پ) مشتق تابع f در همه نقاط دامنهٔ خود $(R - \{۲\})$ مثبت است.

ت) با توجه به نمودار تابع می‌توان گفت ، این تابع در بازهٔ $(-\infty ، ۲)$ رفتار صعودی دارد و مشتق تابع در این بازه مثبت است. همچنین در بازه $(۲ ، +\infty)$ نیز تابع صعودی است و مشتق آن نیز در بازه مورد نظر مثبت می‌باشد. اما تابع روی کل دامنهٔ خود صعودی نیست.



۵ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال ، حل مسئله

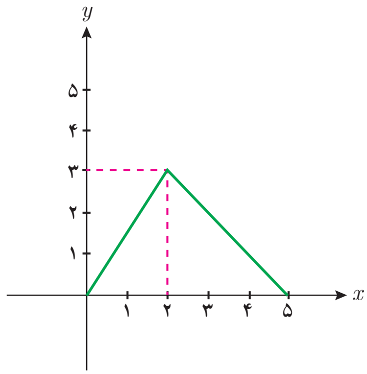
الف) مشتق این تابع در بازه‌های $(-\infty ، ۰)$ و $(۲ ، +\infty)$ مثبت است، پس خود تابع در این بازه‌ها صعودی است. اما مشتق این تابع در بازهٔ $(۰,۲)$ منفی است، پس خود تابع در این بازه نزولی است.

ب) مشتق تابع در نقاط $x = ۰$ و $x = ۲$ صفر است، زیرا در این نقاط نمودار تابع مشتق محور طول‌ها را قطع کرده است. از آنجا که در این نقاط تابع مشتق تغییر علامت می‌دهد و وضعیت صعودی و نزولی تابع در این نقاط تغییر می‌کند، تابع در این نقاط (موضعاً) به بیشترین یا کمترین مقدار خود می‌رسد.

پ) با توجه به نتایج قسمت (الف) شکل شماره (۲) می‌تواند نمودار تابع g باشد.

۶ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال ، حل مسئله، بازنمایی

برای تابع موردنظر می‌توان نمودارهای مختلفی رسم کرد. به‌طور مثال :



۷ فرایندها و مهارت : استدلال ، حل مسئله

برای این تابع می‌توان مثال‌های متفاوتی را مطرح کرد. به‌طور مثال :

$$f(x)=\begin{cases}-x+۱۰ & ۱\leq x<۳\\ ۲x+۱ & ۳\leq x\leq ۷\end{cases}$$

حتی می‌توانید یک تابع درجه دوم بنویسید که مشتق‌پذیر نیز باشد، برای مثال:

$f(x)=(x-۳)^۲$

تابع با قانون بالا و دامنهٔ [۱, ۷] یک جواب این مسئله است.

هنرآموزان محترم، می‌توانند نظرهای اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به‌نشانی تهران ـ صندوق پستی ۴۸۷۴ / ۱۵۸۷۵ـ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار tvoccd@roshd.ir ارسال نمایند.

وب‌گاه: tvoccd.oerp.ir

دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش