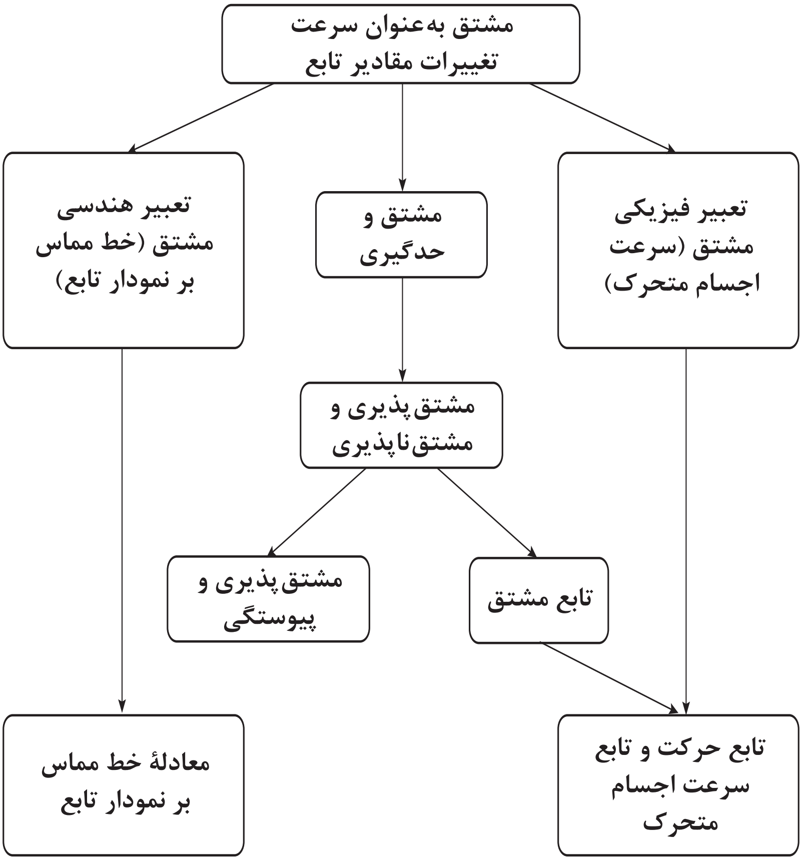
فصل چهارم

درک مفهوم مشتق

نقشهٔ مفهومی فصل چهارم



اهداف کلی پودمان

۱ درک مفهوم مشتق تابع در یک نقطه به‌عنوان سرعت تغییرات مقادیر تابع در آن نقطه
۲ محاسبهٔ مشتق تابع‌های ساده در یک نقطه با حدگیری
۳ درک رابطهٔ بین مشتق تابع و سرعت متحرک‌ها
۴ تفسیر حرکت یک متحرک با یافتن مشتق تابع حرکت
۵ درک مشتق تابع به‌عنوان یک تابع
۶ درک رابطهٔ بین مشتق تابع در یک نقطه و شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه
۷ یافتن معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع‌ها در نقاط مختلف
۸ به‌کارگیری مشتق در تبیین و تفسیر سرعت تغییرات در وضعیت‌های معمول و زندگی واقعی

پیش‌نیازها

- آشنایی با انواع توابع و بازنمایی‌های مختلف آن
- آشنایی با مفهوم حد تابع در یک نقطه و محاسبهٔ آن
- آشنایی با تابع حرکت اجسام
- توانایی محاسبه شیب یک خط از روی نمودار و معادله
- آشنایی با رابطه بین شیب یک خط و تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها
- آشنایی با مفهوم خط مماس

بخش اول: مشتق تابع‌ها

اهداف بخش

۱ درک مفهوم مشتق تابع در یک نقطه به‌عنوان سرعت تغییرات مقادیر تابع در آن نقطه

۲ محاسبهٔ مشتق تابع‌های ساده در یک نقطه با حدگیری

واژه‌های کلیدی: تغییرات مقادیر تابع، سرعت حرکت، مشتق تابع

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آموزش مفهوم مشتق است. در اینجا از زمینه سرعت حرکت اجسام برای آموزش مشتق استفاده شده است. از لحاظ تاریخی نیز مفهوم مشتق به همین شکل به‌وجود آمده است. به همین دلیل، این بخش با همان مسئلهٔ اصلی نیوتن در محاسبهٔ سرعت اجسام شروع شده است.

ابتدا، مباحثه‌ای بین هنرجویان و معلم در چگونگی یافتن سرعت اجسام آغاز می‌شود و پیشنهادهای به‌دست آمده در فعالیت (۱) به اجرا در می‌آید که همان آموزش مفهوم مشتق است. سپس، مفهوم مشتق در حالت کلی آن تعریف شده و در مثال‌ها تمرین می‌شود.

ورود به مطلب

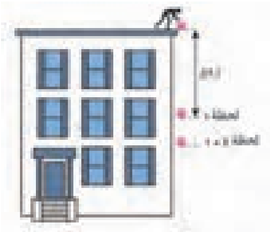
مفهوم اصلی مشتق، در شدت تغییرات مقادیر یک تابع است. هر کجا که شدت تغییرات یک تابع قابل مشاهده باشد و به آسانی قابل شناسایی باشد، زمینهٔ مناسبی برای طرح مفهوم مشتق است. در اینجا از شدت تغییرات مکان یک متحرک استفاده شده است که به‌طور شهودی سرعت متحرک نامیده می‌شود.

فعالیت آموزشی

ابتدا سؤالی دربارهٔ چگونگی محاسبهٔ سرعت اجسام مطرح می‌شود. سپس، با مباحثه، راه‌حل‌های به‌دست آمده در فعالیت (۱) به اجرا در می‌آیند.

اهداف موضوعی

- درک مفهوم مشتق تابع در یک نقطه.
- آشنایی با روش محاسبهٔ مشتق تابع در یک نقطه.



فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی).
- بازنمایی‌ها.
- ارتباطات کلامی.
- حل مسئله (مدل‌سازی).

به منظور توجه به اهمیت مشتق و ایجاد درک مناسب از مفهوم آن، مشتق در یک زمینهٔ واقعی (فیزیکی) مطرح شده است. توجه به هر کدام از سؤالات و پاسخ‌دهی مناسب به آن، هنرجویان را به ایجاد درک مناسب از این مفهوم هدایت خواهد کرد.

حل فعالیت (۱)

۱ $f(۱)$، فاصلهٔ توپ از محل رها شدن را ۱ ثانیه پس از رها شدن، نشان می‌دهد.

$f(۱) = ۵$

۲ $f(۱+h)$، فاصلهٔ توپ از محل رها شدن را $۱+h$ ثانیه پس از رها شدن، نشان می‌دهد.

$f(۱+h) = ۵(۱+h)^۲$

۳ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی $[۱,۱+h]$ برابر $f(۱+h)-f(۱)$ است.

$f(۱+h)-f(۱) = ۵(۱+h)^۲-۵\times۱^۲=۱۰h+۵h^۲$

این حرکت، h ثانیه طول کشیده است.

۴ سرعت متوسط توپ، برابر است با مسافت طی شده تقسیم بر زمان سپری شده. بنابراین:

$$v(h)=\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=۱۰+۵h$$

۵ جدول تکمیل شده:

h	۰	←	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
V(h)		←	۱۰/۰۰۰۵	۱۰/۰۰۵	۱۰/۰۵	۱۰/۵

۶ سرعت توپ در زمان $t=۱$ ثانیه پس از رها شدن را نشان می‌دهد.

۷ سرعت توپ در لحظهٔ $t=۱$ برابر ۱۰ است.

پس از انجام فعالیت، نکات این فعالیت به‌طور مبسوط و در حالت $h<0$ نیز توضیح داده می‌شوند. نهایتاً مفهوم مشتق به‌عنوان حد نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر تعریف می‌شود. در مثال‌های متعدد این مفهوم بررسی و رابطه مشتق‌پذیری و پیوستگی بیان می‌شود. در کار در کلاس(۱) این مفاهیم تمرین می‌شوند.

حل کار در کلاس (۱)

$$f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^۲+۴(۲+h)-(۴+۸)}{h} \quad \lim$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۸h}{h}=۸$$

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله

الف) $f'(۴)=\lim_{h\to ۰}\frac{۲-۲}{h}=۰$

ب) $g'(۴)=\lim_{h\to ۰}\frac{-۳(۴+h)+۴-(-۳\times ۴+۴)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱۲-۳h+۴+۱۲-۴}{h}=-۳$

پ) $u'(۴)=\lim_{h\to ۰}\frac{(۴+h)-(۴+h)^۲-(۴-(۴)^۲)}{h}=-۷$

۲ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله

$$g'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۲-۲-h}{۲(۲+h)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h}{۲h(۲+h)}=-\frac{۱}{۴}$$

۳ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

ابتدا پیوستگی تابع f در نقطهٔ ۳ را بررسی می‌کنیم. به دلیل، تفاوت قانون f در دو طرف ۳ برای یافتن حد تابع در این نقطه، حدهای چپ و راست را بررسی می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۲x^۲-۱۰)=۸\\ \lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(-x+۱۱)=۸\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^+} f(x)$$

بنابراین حد تابع در این نقطه وجود دارد و برابر مقدار تابع در این نقطه است. پس f در این نقطه پیوسته است.

برای تشخیص مشتق‌پذیری تابع f نیز باید وجود و یکسانی حدهای چپ و راست نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر را بررسی کنیم.

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۳+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۲(۳+h)^۲-۱۰-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۱۸+۱۲h+۲h^۲-۱۸}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{h(۱۲+۲h)}{h}=۱۲$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۳+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(۳+h)+۱۱-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-۳-h+۳}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h}{h}=-۱$$

این محاسبه نشان می‌دهد حد کسر $\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ در $h=۰$ وجود ندارد و تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست.

۴ فرایند و مهارت: استدلال، حل مسئله

به دلیل تفاوت قانون تابع در دو طرف نقطهٔ ۱- باید حدهای چپ و راست کسر نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر را جداگانه بررسی کنیم. توجه داشته باشید که $v(-۱)=-۲$.

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{v(-۱+h)-v(-۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۴(-۱+h)^۲+۲(-۱+h)-۴-(-۲)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۴-۸h+۴h^۲-۲+۲h-۲}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۴h^۲-۶h}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۲h(۲h-۳)}{h}=-۶$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{v(-۱+h)-v(-۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-۶(-۱+h)-۸-(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{۶-۶h-۶}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-۶h}{h}=-۶$$

با توجه به محاسبه بالا می‌توان گفت $\lim_{h\to ۰}\frac{v(-۱+h)-v(-۱)}{h}$ وجود دارد و تابع v در نقطه $x=-۱$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن ۶- است.

۵ فرایند و مهارت: استدلال، حل مسئله

الف) برای بررسی پیوستگی تابع g در $x=\circ$، حد چپ و حد راست آن را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\circ^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\circ^-}(x^۲-x+۱)=۱\\ \lim\limits_{x\to\circ^+} g(x)=\lim\limits_{x\to\circ^+}(ax+۱)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\circ} g(x)=۱$$

از آنجا که $g(\circ)=۱$، تابع g در $x=\circ$ پیوسته است.

ب) برای آنکه تابع g در $x=\circ$ مشتق‌پذیر باشد، لازم است حد کسر $\dfrac{g(\circ+h)-g(\circ)}{h}$ در $h=\circ$ موجود باشد. این شرط معادل با آن است که حد چپ و حد راست این کسر در $h=\circ$ موجود و مساوی باشند.

$$\lim_{h\to\circ^-}\frac{g(\circ+h)-g(\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ^-}\frac{h^۲-h+۱-۱}{h}=\lim_{h\to\circ^-}\frac{h(h-۱)}{h}=-۱$$

$$\lim_{h\to\circ^+}\frac{g(\circ+h)-g(\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ^+}\frac{ah+۱-۱}{h}=\lim_{h\to\circ^+}\frac{ah}{h}=a$$

بنابراین، شرط مشتق‌پذیری این تابع آن است که $a=-۱$. در نتیجه $g'(\circ)=-۱$.

بخش دوم: مشتق و سرعت متحرک‌ها

اهداف بخش

۱ درک رابطهٔ بین مشتق تابع و سرعت متحرک‌ها
۲ تفسیر حرکت یک متحرک با یافتن مشتق تابع حرکت
۳ درک مشتق تابع به‌عنوان یک تابع

واژه‌های کلیدی: سرعت متحرک، مشتق تابع

نگاه کلی به بخش

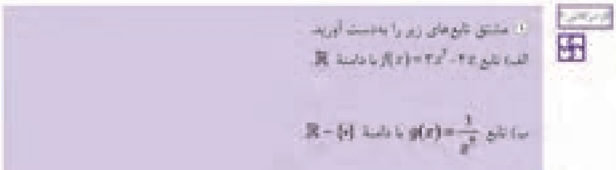
هدف از این بخش، استفاده از مفهوم مشتق در محاسبهٔ سرعت اجسام است. رابطهٔ بین مشتق تابع حرکت یک جسم متحرک و سرعت آن متحرک در بخش قبل مشخص شده است، زیرا از همین زمینه برای آموزش مشتق استفاده شده است. در این بخش، این مطلب با صراحت بیشتری بیان می‌شود و از مشتق‌گیری برای توصیف چگونگی حرکت یک متحرک استفاده می‌شود. همچنین مفهوم تابع مشتق نیز در همین بخش از طریق سرعت حرکت یک متحرک در لحظات دلخواه، توضیح داده شده است.

ورود به مطلب

این بخش، نیازی به انگیزهٔ جدیدی ندارد و در بخش قبل از زمینه سرعت اجسام برای آموزش مشتق استفاده شده است. ولی، استفاده از مثال‌های آشنا و جالب توجه و برقراری ارتباط مستقیم بین مقدار مشتق و وضعیت حرکت اجسام، بسیار مفید خواهد بود.

فعالیت آموزشی

این بخش فقط شامل توضیحاتی دربارهٔ سرعت حرکت اجسام و رابطهٔ آن با مشتق است که در مثال‌هایی توضیح داده شده است و به کمک مشتق تابع‌ها شیوهٔ حرکت اجسام توصیف شده‌اند. این مطالب در کار در کلاس (۲) تمرین می‌شوند.



۱) مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) تابع $f(x)=3x^2-4x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$

ب) تابع $g(x)=\frac{1}{x^2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$

حل کار در کلاس (۲)

۱ الف)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-4(x+h)-3x^2+4x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2-4h}{h}=6x-4$$

ب)

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2}=-\frac{2}{x^3}$$

۲ الف) سرعت این متحرک همان مشتق تابع حرکت آن است.

$v(t)=-8t+16$

ب) $v(1)=8>0$ در جهت محور حرکت می‌کند.

پ) $v(4)=-16<0$ خلاف جهت محور حرکت می‌کند.

ت) متحرک در صورتی متوقف می‌شود که سرعت آن صفر شود، بنابراین:

$v(t)=0 \Rightarrow -8t+16=0 \Rightarrow t=2$

لحظهٔ $t=2$ در دامنهٔ تابع حرکت است و در این لحظه، متحرک، ایست لحظه‌ای می‌کند.

ث) زمان‌هایی که $v(t)>0$، متحرک در جهت محور حرکت می‌کند.

بنابراین در بازهٔ زمانی $[0,2]$ متحرک در جهت محور حرکت می‌کند و پس از آن تغییر جهت می‌دهد و در خلاف جهت محور حرکت می‌کند.

حل مسائل

۱ **فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله**

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-3(x+h)^2-(2x-3x^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-3x^2-6xh-3h^2-2x+3x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2-6x-3h)}{h}=2-6x$$

۲ فرایند و مهارت‌ها: حل مسئله

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{x+h-\frac{۲}{x+h}-(x-\frac{۲}{x})}{h}\quad \lim \quad h$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h-\frac{۲}{x+h}+\frac{۲}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{hx^۲+xh^۲-۲x+۲x-۲h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{hx^۲+xh^۲+۲h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(x^۲+xh+۲)}{hx(x+h)}$$

$$=\frac{x^۲+۲}{x^۲}$$

۳ فرایندها و مهارت: استدلال، حل مسئله، پیوند و اتصال

الف) $$g'(t)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(t+h)^۲-۲۰(t+h)+۱-(t^۲-۲۰t+۱)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{t^۲+۲th+h^۲-۲۰t-۲۰h+۱-t^۲+۲۰t-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲t+h-۲۰)}{h}$$

$$=۲t-۲۰$$

ب) داریم $g(۰)=۱$. یعنی این متحرک در لحظهٔ صفر در فاصله ۱ متری سمت راست از مبدأ قرار دارد. همچنین $g'(۰)=۲\times۰-۲۰=-۲۰$، یعنی در لحظهٔ صفر با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه در خلاف جهت محور در حال حرکت است.

پ) برای اینکه متحرک متوقف شود بایستی $g'(t)=۰$. از $۲t-۲۰=۰$ نتیجه می‌شود $t=۱۰$. یعنی پس از ۱۰ ثانیه، متحرک ایست لحظه‌ای می‌کند. در زمان توقف، فاصله متحرک از مبدأ برابر است با $g(۱۰)=۱۰۰-۲۰۰+۱=-۹۹$. یعنی متحرک در ۹۹ متر سمت چپ مبدأ، توقف لحظه‌ای کرده است.

ت) $g(۲۰)=۴۰۰-۴۰۰+۱=۱$، یعنی این متحرک در فاصله ۱ متری سمت راست از مبدأ قرار دارد و سرعت این متحرک در این لحظه برابر است با $g'(۲۰)=۲(۲۰)-۲۰=۲۰$، یعنی با سرعت ۲۰ متر در ثانیه در جهت محور در حال حرکت است.

ث) این متحرک در شروع حرکت، در مکان ۱ متری سمت راست مبدأ قرار دارد و در این لحظه با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه رو به عقب (خلاف جهت محور) در حال حرکت است. متحرک ۱۰ ثانیه رو به عقب حرکت می‌کند (در بازهٔ $(۰,۱۰)$، $g'(t)<۰$) و پس از طی ۱۰۰ متر، ایست لحظه‌ای می‌کند و تغییر جهت می‌دهد و رو به جلو (در جهت محور) شروع به حرکت می‌کند. (در بازهٔ $(۱۰,۲۰)$، $۰<g'(t)$) . نهایتاً در ۱۰ ثانیه بعدی، متحرک با حرکت رو به جلو به نقطهٔ شروع حرکت برمی‌گردد.

بخش سوم: تعبیر هندسی مشتق

اهداف بخش

۱ درک رابطهٔ بین مشتق تابع در یک نقطه و شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه

۲ یافتن معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع‌ها در نقاط مختلف

واژه‌های کلیدی: شیب خط مماس بر نمودار تابع، مشتق تابع، معادلهٔ خط مماس

نگاه کلی به بخش

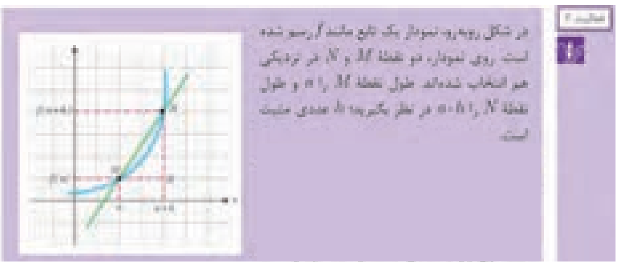
هدف این بخش، برقرار کردن ارتباط بین مفهوم مشتق یک تابع و شیب خط مماس بر نمودار آن تابع است. این ارتباط با طرح سؤال و سپس انجام یک فعالیت برای پاسخ‌گویی به آن سؤال برقرار می‌شود. سپس با مثال‌هایی این ارتباط توضیح داده می‌شود.

ورود به مطلب

طرح سؤال مناسب و سعی در پاسخ‌گویی به آن به‌صورت مباحثه‌ای، همواره بهترین ورود به آموزش است. در اینجا از ارتباط بین وضعیت نمودار تابع و مفهوم مشتق پرسش شده است. برای پاسخ‌گویی به این سؤال لازم است از خط‌های گذرنده از نقاط نمودار تابع و حدگیری آنها و نهایتاً خط مماس بر نمودار تابع صحبت کنیم.

فعالیت آموزشی

با طرح سؤال دربارهٔ رابطهٔ بین مشتق تابع و چگونگی نمودار تابع به فعالیت (۲) می‌رسیم که به این سؤال پاسخ می‌گوید.



اهداف موضوعی:

- درک مفهوم هندسی مشتق.

فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها (داخل ریاضی).
- مدل‌سازی.
- ارتباطات کلامی.
- تفکر بصری.

می‌توان از هنرجویان خواست اهداف فعالیت را در یک تابع خاص با رسم نمودار و تشکیل جدول مقادیر (نظیر $f(x)=x^{۲}$ در نقطهٔ $x=۲$) مورد بررسی قرار دهند.

حل فعالیت (۲)

۱ $M=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix} a+h \\ f(a+h) \end{bmatrix}$.

۲ $MH=h$ و $NH=f(a+h)-f(a)$.

۳ $m=\dfrac{NH}{MH}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

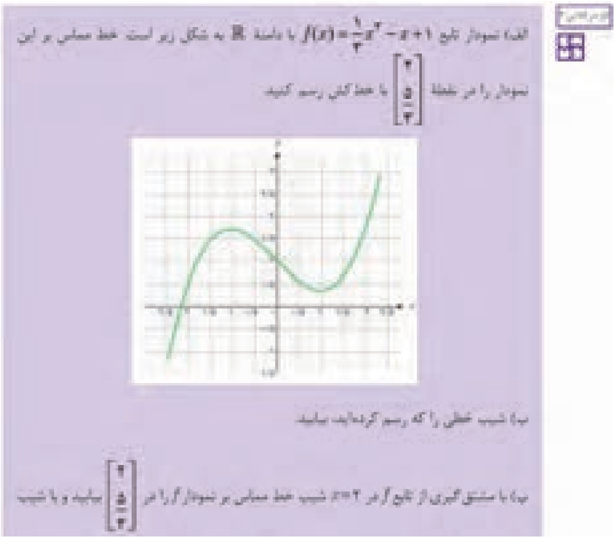
۴ مشتق f در نقطهٔ a، همان حد شیب خط MN در $h=۰$ است.

۵ به نقطهٔ M نزدیک می‌شود.

۶ این خط نهایتاً بر نمودار تابع در نقطهٔ M مماس خواهد شد و شیب این خط به مشتق تابع در نقطهٔ $x=a$ نزدیک خواهدشد.

پس از توضیح این فعالیت، رابطهٔ بین مشتق تابع و شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه بیان می‌شود و در مثال‌هایی این رابطه توضیح داده می‌شود. این مطالب در کار در کلاس (۳) تمرین می‌شوند.

در این قسمت هنرجویان با رسم خط مماس به کمک خط‌کش به‌طور تجربی به رابطهٔ بین مشتق و شیب خط مماس پی می‌برند.


الف) نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است. خط مماس بر این نمودار را در نقطهٔ $\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ با خط‌کش رسم کنید.

ب) شیب خطی را که رسم کرده‌اید بیابید.

پ) با مشتق‌گیری از تابع f در $x=2$ شیب خط مماس بر نمودار f را در $\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ بیابید و با شیب

حل کار در کلاس (۳)

الف و ب) هنرجو با استفاده از خط‌کش، خط مماس را رسم کرده و با در نظر گرفتن دو نقطه روی آن، شیب خط را با اندازه‌گیری پیدا می‌کند.

پ) $f'(x)=x^2-1 \Rightarrow f'(2)=3$ در مقایسه با شیب خطی که هنرجو رسم کرده، اختلاف ناچیزی به‌دست می‌آید که از یک طرف درستی رابطهٔ بین مشتق و شیب خط مماس را نشان می‌دهد و از طرف دیگر خطای انسانی و ابزار در اندازه‌گیری‌ها را نشان می‌دهد.

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، بازنمایی، حل مسئله

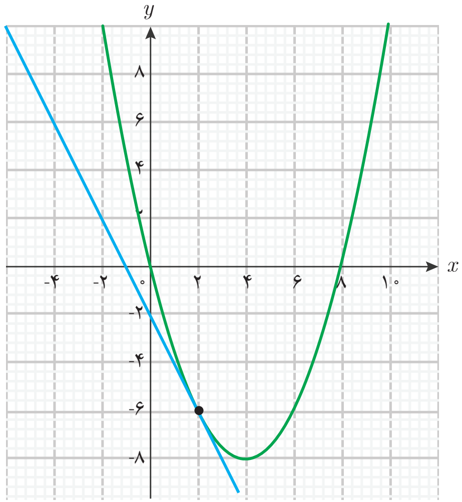
اگر معادلهٔ خط مماس در نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ بر این منحنی به‌صورت $y=ax+b$ باشد، شیب خط از طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x \Rightarrow f'(x)=x-4 \Rightarrow f'(2)=-2 \Rightarrow a=-2$$

برای یافتن b، می‌دانیم که خط مماس $y=-2x+b$ از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند. پس $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند. در نتیجه داریم:

$$-6=-2\times2+b \Rightarrow b=-2$$

پس معادله خط مماس منحنی در نقطه داده شده به صورت $y=-۲x-۲$ است. به کمک جئوجبرا نمودار آن به‌صورت زیر است.



۲ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

می‌دانیم شیب خط مماس در نقطه تماس با مقدار مشتق تابع در آن نقطه برابر است. به این منظور ابتدا، مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم.

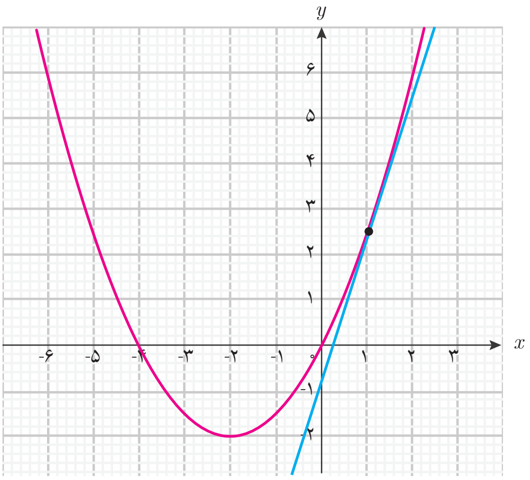
$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۲}{x+h}-\frac{۲}{x}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۲x-۲x-۲h}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲h}{hx(x+h)}=-\frac{۲}{x^۲}\Rightarrow f'(x)=-\frac{۲}{x^۲}$$

اگر خط مماس بر نمودار تابع، موازی محور طول‌ها باشد، بایستی شیب خط مماس برابر صفر باشد. با توجه به اینکه $f'(x)=-\frac{۲}{x^۲}$ (شیب خط مماس) در هیچ نقطه‌ای از دامنهٔ تابع $(\mathbb{R}-\{۰\})$ برابر صفر نمی‌شود. پس نقطه‌ای وجود ندارد که خط مماس بر نمودار تابع f، موازی محور طول‌ها باشد.

۳ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

الف) به کمک جئوجبرا، نمودار صفحه بعد رسم شده است:
با استفاده از یک لغزنده معلوم می‌شود خط به معادله $y=۳x-\frac{۱}{۲}$، بر نمودار تابع f مماس می‌شود.



ب) باید نقطه‌ای روی نمودار تابع بیابیم که شیب خط مماس در آن نقطه برابر ۳ شود. همان‌طور که می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه با مشتق تابع در آن نقطه برابر است. با توجه به قانون تابع f داریم:

$f'(x)=x+۲$

با حل معادلهٔ $f'(x)=x+۲=۳$ نتیجه می‌شود $x=۱$. پس در نقطه‌ای از نمودار تابع به طول ۱ خط مماس بر نمودار تابع شیب ۳ دارد و موازی خط $y=۳x$ است. برای یافتن معادلهٔ خط مماس، می‌دانیم معادلهٔ آن به‌صورت $y=۳x+b$ است. از آنجا که $f(۱)=\frac{۵}{۲}$ این خط از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$ می‌گذرد و مختصات این نقطه در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند. پس $\frac{۵}{۲}=۳\times۱+b$ و در نتیجه $b=-\frac{۱}{۲}$ و معادلهٔ خط مماس همان خط $y=۳x-\frac{۱}{۲}$ است.