بخش دوم: محاسبهٔ حد تابع‌ها

اهداف بخش

۱ محاسبهٔ حد مجموع، ضرب و تقسیم تابع‌ها
۲ آشنایی با حالت مبهم $\frac{0}{0}$

واژه‌های کلیدی: حد مجموع، حاصل‌ضرب و تقسیم تابع‌ها و حالت مبهم $\frac{0}{0}$

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آشنایی با قضایای محاسبهٔ حد مجموع، حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع است. در بخش قبل، در مورد مفهوم حد و روش کلی یافتن مقدار حد یک تابع از طریق جدول و نمودار تابع صحبت شده است. اما باید به این نکته توجه داشت که عملاً روش استفاده از جدول و نمودار فقط یک حدس برای وجود حد و مقدار حد است. در این بخش به قضایای مهم حد درباره مجموع، حاصل‌ضرب و تقسیم تابع‌ها پرداخته می‌شود که از طریق این قضایا، حد بسیاری از تابع‌ها با دقت قابل محاسبه خواهند بود. برای درک عمیق‌تر مفهوم حد و کارآمدتر شدن این مفهوم تا حدی به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ نیز پرداخته می‌شود ولی هدف این کتاب یافتن حدهای پیچیده که در حالت $\frac{0}{0}$ قرار می‌گیرند نیست و فقط حالت‌های ساده که با ساده کردن صریح قابل محاسبه است در مثال‌ها بررسی می‌شوند.

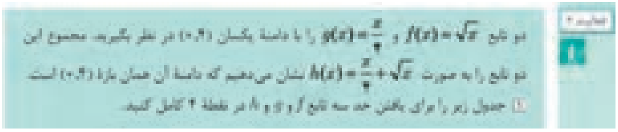
ورود به مطلب

برای شروع این بخش، مناسب است که شیوهٔ یافتن حد در بخش قبل تذکر داده شود و تصریح شود که این شیوه فقط ما را به حدس مقدار حد و وجود حد می‌رساند و برای یافتن دقیق مقدار حد لازم است روش‌های دیگری را بشناسیم. برای هر کدام از قضایای حد نیز مناسب است در حالت‌های خاص درستی این قضایا بررسی شوند و از هنرجویان بخواهیم که حالت کلی را حدس بزنند و سپس قضایای کلی را بیان کنیم.

فعالیت آموزشی

در ابتدای این بخش، به این نکته توجه می‌شود که روش جدول و نمودار برای یافتن حد یک تابع فقط می‌تواند ما را به حدس دربارهٔ وجود و مقدار حد برساند.

برای یافتن مقدار دقیق قضایایی وجود دارند که در فعالیت (۲) یکی از این قضایا در حالت خاص مطرح می‌شود.


فعالیت ۲

دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x}{4}$ را با دامنهٔ یکسان (۰،۹) در نظر بگیرید. مجموع این دو تابع را به صورت $h(x)=\frac{x}{4}+\sqrt{x}$ نشان می‌دهیم که دامنهٔ آن همان بازهٔ (۰،۹) است.

۱ جدول زیر را برای یافتن حد سه تابع f و g و h در نقطهٔ ۴ کامل کنید.

اهداف موضوعی:
- درک مفهوم حد مجموع دو تابع.
- درک ارتباط بین حد دو تابع و حد مجموع دو تابع.

فرایندها:
- بازنمایی‌ها.
- حدسیه‌سازی.
- تعمیم دادن.

حل فعالیت (۲)

۱ جدول تکمیل شده:

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→ ۴
	۱/۷۳۲	۱/۸۷۰	۱/۹۷۴	۱/۹۹۷	۱/۹۹۹	→ ?
	۰/۷۵۰	۰/۸۷۵	۰/۹۷۵	۰/۹۹۷	۰/۹۹۹	→ ?
	۲/۴۸۲	۲/۷۴۵	۲/۹۴۹	۲/۹۸۷	۲/۹۹۹	→ ?

۲ داریم: $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۴} h(x)=۳$.

می‌توان دید: $\lim\limits_{x\to ۴} h(x)=\lim\limits_{x\to ۴} f(x)+\lim\limits_{x\to ۴} g(x)$.

۳ جدول تکمیل شده:

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹ →	۱	← ۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
	۰/۹۴۸	۰/۹۹۴	۰/۹۹۹ →	?	← ۱/۰۰۰	۱/۰۰۴	۱/۰۴۸
	۰/۲۲۵	۰/۲۴۷	۰/۲۴۹ →	?	← ۰/۲۵۰	۰/۲۵۲	۰/۲۷۵
	۱/۱۷۳	۱/۲۴۱	۱/۲۴۹ →	?	← ۱/۲۵۰	۱/۲۵۶	۱/۳۲۳

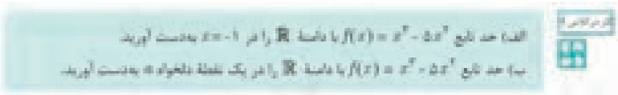
۴ داریم: $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۰/۲۵$ و $\lim\limits_{x\to ۱} h(x)=۱/۲۵$.

می‌توان دید: $\lim\limits_{x\to ۱} h(x)=\lim\limits_{x\to ۱} f(x)+\lim\limits_{x\to ۱} g(x)$.

۵ در حالت کلی اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند حد مجموع آنها با مجموع حدهای آنها برابر است، یعنی:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

پس از جمع‌بندی این فعالیت و نتیجه‌گیری دربارهٔ حد مجموع دو تابع همین نکته دربارهٔ ضرب دو تابع نیز بیان می‌شود و در مثال‌هایی این نکات توضیح داده می‌شوند و در کار درکلاس (۴) این مطالب تمرین می‌شوند.


الف) حد تابع $f(x)=x^3-5x^2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=-1$ به‌دست آورید.

ب) حد تابع $f(x)=x^3-5x^2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در یک نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

حل کار در کلاس (۴)

با استفاده از رابطهٔ بین حد تفاضل دو تابع و تفاضل حد آنها و همچنین حد حاصل‌ضرب دو تابع و حاصل ضرب حدهای آنها خواهیم داشت:

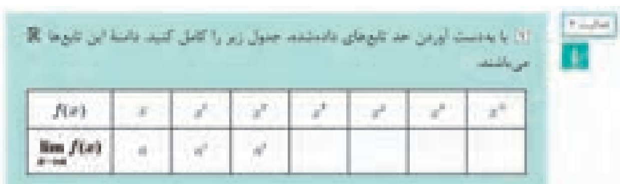
الف)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -۱}(x^۳-۵x^۲)&=\lim_{x\to -۱} x^۳-\lim_{x\to -۱} ۵x^۲\\&=\lim_{x\to -۱} x.x.x-\lim_{x\to -۱} ۵.x.x\\&=(-۱)(-۱)(-۱)-۵\times(-۱)(-۱)=-۶\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(x^۳-۵x^۲)&=\lim_{x\to a} x^۳-\lim_{x\to a} ۵x^۲\\&=\lim_{x\to a} x.x.x-\lim_{x\to a} ۵\times\lim_{x\to a} x.x=a^۳-۵a^۲\end{aligned}$$

در ادامه به حد تابع‌های چندجمله‌ای توجه شده است و در فعالیت (۳) این مسئله بررسی شده است.


۱) با به‌دست آوردن حد تابع‌های داده‌شده جدول زیر را کامل کنید. دامنهٔ این تابع‌ها $\mathbb{R}$ می‌باشند.

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	a	a^2	a^3				

اهداف موضوعی

- شناخت نحوهٔ محاسبهٔ حد تابع چندجمله‌ای.

فرایندها

- الگویابی.
- استدلال کردن.
- تعمیم دادن.

توجه به فرایند به‌کارگیری قواعد حدگیری در محاسبهٔ حد تابع چندجمله‌ای توسط هنرجویان از اهمیت زیادی برخوردار است. اجرای صحیح و مرحله به مرحلهٔ این فرایند و توضیح در مورد علت انجام مراحل مختلف این فرایند تا رسیدن به حد تابع چند جمله‌ای، علاوه برافزایش مهارت‌هایی نظیر ارتباطات کلامی و ... به ایجاد درک درستی از اثبات ریاضی در هنرجو کمک می‌کند.

حل فعالیت(۳)

۱ برای تکمیل جدول با استفاده از روش‌هایی که برای محاسبهٔ حد حاصل‌ضرب دو تابع دیدیم، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} x^۴ = \lim_{x\to a}(x^۳ x) = \lim_{x\to a} x^۳ \lim_{x\to a} x = a^۳ a = a^۴$$

$$\lim_{x\to a} x^۵ = \lim_{x\to a}(x^۴ x) = \lim_{x\to a} x^۴ \lim_{x\to a} x = a^۴ a = a^۵$$

$$\lim_{x\to a} x^۶ = \lim_{x\to a}(x^۵ x) = \lim_{x\to a} x^۵ \lim_{x\to a} x = a^۵ a = a^۶$$

با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان جدول را به صورت زیر تکمیل کرد:

$f(x)$	x	$x^۲$	$x^۳$	$x^۴$	$x^۵$	$x^۶$	x^n
$\lim_{x\to a} f(x)$	a	$a^۲$	$a^۳$	$a^۴$	$a^۵$	$a^۶$	a^n

۲ تابع $f(x)=bx^n$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب تابع ثابت $g(x)=b$ و تابع $h(x)=x^n$ در نظر گرفت بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} bx^n = \lim_{x\to a} b \times \lim_{x\to a} x^n = ba^n$$

۳

$$\lim_{x\to a} P(x) = \lim_{x\to a}(۴x^۵ - ۳x^۳ + ۷x - ۴) = \lim_{x\to a} ۴x^۳ - \lim_{x\to a} ۳x^۳ +$$

$$\lim_{x\to a} ۷x - \lim_{x\to a} ۴ = ۴a^۵ - ۳a^۳ + ۷a - ۴ = P(a)$$

در ادامه به قضیه حد تقسیم دو تابع می‌رسیم که از طریق یک مباحثه توضیح داده می‌شود. سپس به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ پرداخته می‌شود و در حالت‌های ساده، چگونگی محاسبهٔ حد در این حالت توضیح داده می‌شود. در کار در کلاس (۵) این نکات تمرین می‌شوند.


کار در کلاس

وجود حد تابع‌های زیر را در نقاط داده‌شده بررسی کنید. در صورت وجود حد آن را بیابید و با نماد حد بنویسید.

الف) تابع $\frac{x^2-9}{x-3}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{3\}$ در $x=3$

برای محاسبهٔ حد برخی از توابع نیاز به استفاده از تکنیک‌هایی است که در این کار در کلاس با چند نمونه از آنها روبه‌رو هستیم. توصیه می‌شود محاسبهٔ حدهایی از هنرجویان خواسته شود که با استفاده از تکنیک‌هایی که در کتاب مطرح شده است، قابل انجام باشد.

حل کار در کلاس (۵)

الف) تابع $\frac{x^2-9}{x-3}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{3\}$ در $x=3$:

حد صورت و مخرج این کسر در $x=3$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. اگر چند جمله‌ای صورت را به صورت حاصل‌ضرب یک عامل در $(x-3)$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{1}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

ب) تابع $\frac{(x+1)\sin x}{x(x+2)}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ در $x=0$:

حد صورت و مخرج این کسر در $x=0$، عدد صفر است. اگر این تابع را به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع کسری که یکی از آنها $\frac{\sin x}{x}$ می‌باشد، بنویسیم آنگاه می‌توانیم با استفاده از قاعدهٔ حد حاصل‌ضرب دو تابع و مثال ۱۷ حد این تابع را به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(x+1)}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{x(x+1)}{(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{(x+2)}=1\times\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+2)}=\frac{1}{2}$$

پ) تابع $\dfrac{x^{۲}+x-۴}{x^{۲}-۱۶}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۴,۴\}$ در $x=-۴$:

حد صورت این کسر در $x=-۴$ عدد ۸ و حد مخرج این کسر در این نقطه، عدد صفر است پس این تابع کسری در $x=-۴$ حد ندارد.

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال

الف) $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} x^{۳}-۲x=\lim\limits_{x\to a} x^{۳}-\lim\limits_{x\to a} ۲x=a^{۳}-۲a$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}=\dfrac{\lim\limits_{x\to ۳} x^{۲}+۱}{\lim\limits_{x\to ۳} x^{۲}-۱}=\dfrac{۱۰}{۸}=\dfrac{۵}{۴}$

حد تابع f در $x=۱$ وجود ندارد زیرا حد صورت عددی ناصفر و حد مخرج صفر است.

پ) اگر $a\neq -۱$، حدتابع مخرج در این نقطه ناصفر است و داریم:

پ) $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-x^{۳}}{x+۱}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} x-x^{۳}}{\lim\limits_{x\to a} x+۱}=\dfrac{a-a^{۳}}{a+۱}$

اما در حالت $a=-۱$ حد تابع صورت و تابع مخرج در این نقطه صفر است و در حالت مبهم قرار داریم. در این مسئله با ساده‌سازی تابع کسری، حد آن در این نقطه محاسبه می‌شود.

$$\lim_{x\to -۱} h(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{x-x^{۳}}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x(۱-x^{۲})}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x(۱-x)(۱+x)}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱} x(۱-x)=-۲$$

۲ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x=-۲$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. می‌توانیم تابع‌های صورت و مخرج را به‌صورت ضرب یک عامل $x+۲$ بنویسیم و با ساده‌سازی به شکل زیر حد را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+x-۲}{۴-x^{۲}}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(۲-x)(۲+x)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x-۱}{۲-x}=\frac{-۳}{۴}$$

۳ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

با توجه به اینکه حد تابع مخرج در نقطهٔ دلخواه a برابر $a^۲ + ۴$ است و $۴ + a^۲ \neq ۰$، و حد تابع h نیز در نقطهٔ a وجود دارد، داریم:

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^۲ - x - ۴}{۴ + x^۲} = \frac{\lim\limits_{x \to a} x^۲ - x - ۴}{\lim\limits_{x \to a} ۴ + x^۲} = \frac{a^۲ - a - ۴}{۴ + a^۲}$$

۴ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

حد این تابع در همهٔ نقاط قابل تعریف است. در جاهایی که حد مخرج صفر نشود، حتماً حد این تابع وجود دارد (حد تابع صورت در همهٔ نقاط وجود دارد). تابع مخرج فقط در نقاط ۲ و ۲- صفر می‌شود، پس در سایر نقاط حد تابع مخرج ناصفر است و حد این تابع کسری موجود است.

در نقطهٔ $x = ۲$ حد تابع مخرج، صفر است و حد تابع صورت، عددی ناصفر است، پس در این نقطه تابع کسری حد ندارد. اما در نقطهٔ $x = -۲$ حد تابع صورت و تابع مخرج صفر است و در حالت مبهم قرار داریم که با ساده‌سازی تابع کسری دیده می‌شود حد تابع کسری در این نقطه وجود دارد.

$$\lim_{x \to -۲} \frac{x + ۲}{x^۲ - ۴} = \lim_{x \to -۲} \frac{x + ۲}{(x - ۲)(x + ۲)} = \lim_{x \to -۲} \frac{۱}{x - ۲} = -\frac{۱}{۴}$$

۵ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال

حد تابع صورت و تابع مخرج این تابع کسری در $x = ۰$، صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم.

می‌توانیم تابع‌های صورت و مخرج را به‌صورت ضرب یک عامل x بنویسیم و با ساده‌سازی به شکل زیر حد را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x^۲ + x}{x^۲ - x} = \lim_{x \to ۰} \frac{x(x + ۱)}{x(x - ۱)} = \lim_{x \to ۰} \frac{x + ۱}{x - ۱} = -۱$$

در نقطهٔ $x = ۱$ حد تابع صورت عددی ناصفر و حد تابع مخرج، صفر است، بنابراین در این نقطه حد تابع کسری وجود ندارد.

۶ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

الف) حد تابع صورت و تابع مخرج این تابع کسری در $x = ۰$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. می‌توان تابع‌های صورت و مخرج را به صورت ضرب یک عامل x نوشت و با ساده‌سازی به شکل صفحه بعد حد را محاسبه کرد:

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰}\frac{(x+x^{۳})\sin x}{x^{۲}(۱-x)} = \lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+x^{۲})\sin x}{x^{۲}(۱-x)}$$

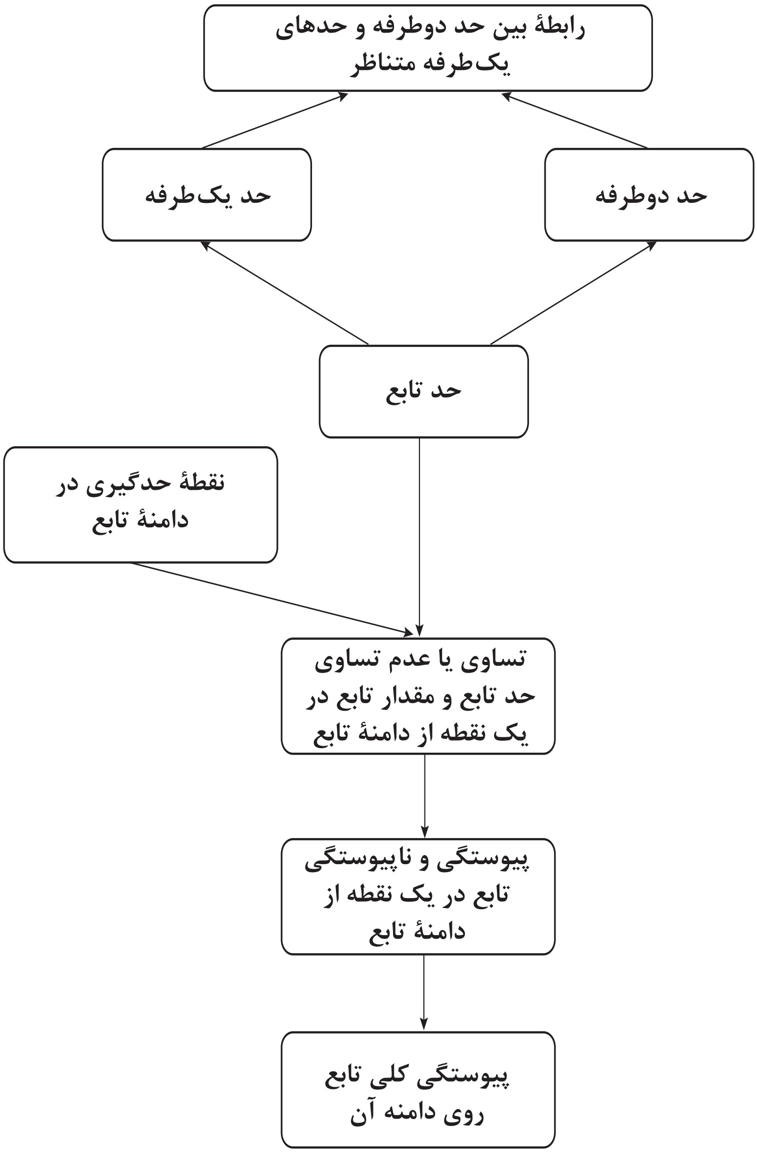
$$= \lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x^{۲})}{(۱-x)}\times\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x^{۲})}{(۱-x)}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۱\times ۱ = ۱$$

ب) این تابع در $x = ۱$ حد ندارد، زیرا حد تابع صورت در این نقطه، عددی ناصفر است و حد تابع مخرج آن در این نقطه صفر است.

فصل سوم

مقایسه حدهای یک‌طرفه و دوطرفه و پیوستگی تابع‌ها

نقشه مفهومی فصل سوم



اهداف کلی پودمان

۱ درک تفاوت حدهای یک‌طرفه و حدهای دو طرفه
۲ درک حدهای چپ و راست در حدهای دوطرفه
۳ درک رابطهٔ بین وجود حد دوطرفه و وجود و یکسانی حدهای چپ و راست
۴ آشنایی با نماد حد چپ و راست در یک نقطه
۵ محاسبهٔ حد چپ و راست تابع در یک نقطه (با استفاده از ضابطه و نمودار)
۶ درک مفهوم پیوستگی یک تابع در یک نقطه از دامنهٔ تابع، از طریق یکسانی حدتابع و مقدار تابع
۷ درک مفهوم پیوستگی یک تابع در یک بازه
۸ تشخیص وضعیت پیوستگی تابع‌های خاص
۹ درک وضعیت پیوستگی تابع، از طریق یکپارچگی نمودار (نداشتن بریدگی) روی بازه‌های دامنه
۱۰ مدل‌سازی وضعیت‌های مسئله‌ای به کمک تابع و تشخیص پیوستگی یا عدم پیوستگی آن

پیش‌نیازها

- آشنایی با تابع‌ها و بازنمایی‌های مختلف آن
- تشخیص مقادیر یک تابع از روی نمودار
- آشنایی با انواع تابع‌ها، به ویژه توابع چند ضابطه‌ای
- آشنایی با مفهوم حد تابع در یک نقطه
- توانایی محاسبه حد تابع در یک نقطه

بخش اول: حدهای یک‌طرفه و دوطرفه

اهداف بخش

۱ تشخیص حدهای یک‌طرفه و حدهای دو طرفه
۲ درک حدهای چپ و راست در حدهای دوطرفه و رابطهٔ بین آنها
۳ آشنایی با نماد حد چپ و راست در یک نقطه
۴ محاسبه و تشخیص حد چپ و راست تابع در یک نقطه (با استفاده از ضابطه و نمودار)

واژه‌های کلیدی: حد یک‌طرفه و دوطرفه، حد چپ، حد راست

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، تشخیص تفاوت بین حدهای یک‌طرفه و حدهای دوطرفه و توجه به حدهای چپ و راست در حدهای دوطرفه و استفاده از آنها است. در این بخش، فرض بر آن است که هنرجویان به خوبی فرایند حدگیری را می‌شناسند، ولی در حدهای دوطرفه ممکن است دچار مشکل باشند که آیا متغیر را از سمت راست یا چپ به نقطهٔ حدگیری نزدیک کنند. به همین دلیل، مباحثه‌ای و طرح سؤالی در کتاب انجام می‌شود و در کتاب درباره تفاوت حدهای یک‌طرفه و دوطرفه توضیح داده می‌شود و نهایتاً مفاهیم حدهای چپ و راست در حدهای دوطرفه معرفی می‌شوند و در مثال‌هایی توضیح داده می‌شوند.

ورود به مطلب

این مبحث کاملاً درون‌ریاضی است و عمق بخشیدن به درک مفهوم حد در حدهای دوطرفه است. بنابراین ایجاد انگیزه برای ورود به این مبحث می‌تواند با طرح سؤالی درون‌ریاضی انجام شود. با فرض درک مفهوم حد می‌توان در حدهای دو طرفه این پرسش را مطرح کرد که متغیر از کدام طرف باید به نقطهٔ حدگیری نزدیک شود. بحث دربارهٔ شیوه نزدیک شدن متغیر به نقطهٔ حدگیری بسیار آموزنده و راهگشا خواهد بود و درک عمیق‌تری را از مفهوم حد ایجاد خواهد کرد. یک بحث دقیق و کامل، می‌تواند منجر به تعریف ایستا از تعریف حد باشد که نیازمند هیچ‌گونه حرکتی از متغیر نباشد و فقط همسایگی‌های نقاط مطرح هستند ولی نیازی به رسیدن به این حد از دقت به مفهوم حد نیست و نهایتاً می‌توانید به این نتیجه

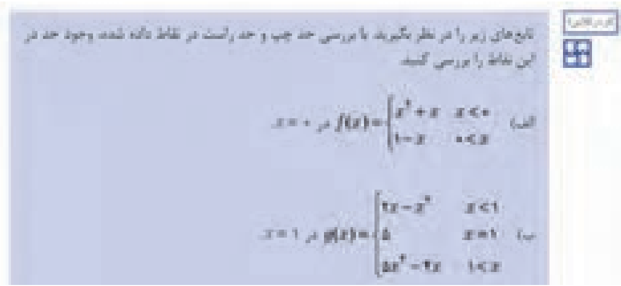
برسید که کافیست نزدیک شدن متغیر به نقطهٔ حدگیری را از چپ و راست مستقل از هم انجام دهید و به مفهوم حد چپ و حد راست برسید.

فعالیت آموزشی

این بخش با طرح سؤال شروع می‌شود و در کتاب توضیحات اصلی دربارهٔ حدهای یک‌طرفه و دوطرفه از زبان معلم ارائه می‌شود. در ادامه در حالت حدهای دوطرفه مفاهیم حدهای چپ و راست طرح می‌شوند و با ذکر انواع مثال‌ها، توضیحات تکمیل می‌شوند و این مفاهیم در کار در کلاس (۱) تمرین می‌شوند.

توجه داشته باشید که مفاهیم حدهای چپ و راست فقط مخصوص حدهای دوطرفه است و نماد حدگیری راست و چپ فقط زمانی به‌کار می‌رود که حد دوطرفه باشد و بخواهیم مشخص کنیم که قرار است حدگیری را از راست یا چپ انجام دهیم.

در حدهای یک‌طرفه، خود به خود از طریق دامنهٔ تابع و وضعیت نقطه نسبت به دامنه، مشخص است که متغیر از چپ یا راست به نقطهٔ حدگیری نزدیک می‌شود و لزومی به نمادگذاری جدید برای مشخص کردن چپ یا راست نیست و همان نماد حدگیری کلی به‌کار می‌رود.


کار در کلاس

تابع‌های زیر را در نظر بگیرید. با بررسی حد چپ و حد راست در نقاط داده شده وجود حد در این نقاط را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<0 \\ 1-x & 0<x \end{cases}$ در $x=0$

ب) $g(x)=\begin{cases} 2x-x^2 & x<1 \\ 5 & x=1 \\ 3x^2-2x & 1<x \end{cases}$ در $x=1$

در این کار در کلاس تابع‌هایی داده شده‌اند که چند ضابطه‌ای هستند و مقدار حد در نقطهٔ تغییر ضابطه خواسته شده است. می‌توان به هنرجویان تذکر داد که در این گونه تابع‌ها برای محاسبهٔ حد در سایر نقاط (که ضابطه در دو طرف نقطهٔ حدگیری عوض نمی‌شود) لزومی به محاسبهٔ جداگانهٔ حد چپ و حد راست نمی‌باشد.

حل کار در کلاس (۱)

الف) قانون تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\leq 0 \\ 1-x & x>0 \end{cases}$ در دوطرف صفر متفاوت است پس لازم است حدچپ و حد راست تابع را در نقطهٔ صفر جداگانه بررسی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} +۱-x=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} x^۲+x=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$$

چون حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ صفر برابر نیست پس تابع در نقطهٔ صفر حد ندارد.

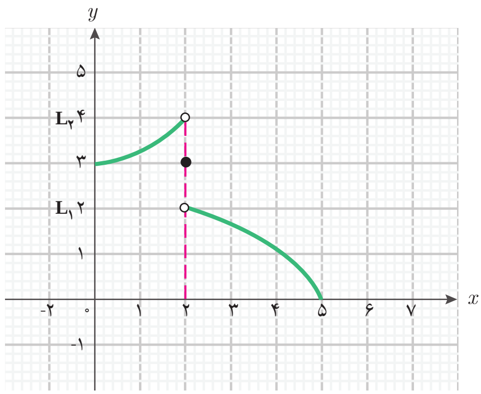
ب) قانون تابع $g(x)=\begin{cases}۲x-x^۲ & x<۱\\ ۵ & x=۱\\ ۵x^۲-۴x & ۱<x\end{cases}$ در دوطرف نقطهٔ ۱ متفاوت است، پس

لازم است حدچپ و حد راست تابع را در نقطهٔ ۱ جداگانه بررسی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(۵x^۲-۴x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲x-x^۲)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^+} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} g(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۱$$

چون حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۱$ برابر است پس تابع در نقطهٔ ۱ حد دارد و حد آن عدد ۱ است. (یکی شدن نقطهٔ حدگیری و مقدار حد تصادفی است. حتماً تذکر داده شود.)

پ) حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ برابر $L_۱$ و حد چپ آن در این نقطه برابر $L_۲$ است واضح است $L_۱\neq L_۲$ یعنی حد چپ و حد راست تابع h برابر نیستند، پس تابع h در این نقطه حد ندارد.



حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، بازنمایی

حد این تابع در نقطه $x = -۲$، حد یک طرفه راست است، زیرا از نقاط دامنه این تابع، فقط از راست می‌توان به ۲- نزدیک شد. طبق نمودار، حد این تابع در نقطهٔ $x = -۲$ وجود دارد و برابر ۱ است.

اما حد این تابع در نقطهٔ ۳، حد یک‌طرفه چپ است. زیرا، از نقاط دامنهٔ این تابع، فقط از چپ می‌توان به ۳ نزدیک شد. طبق نمودار، حد این تابع در این نقطه موجود است و برابر صفر است.

حدگیری این تابع در صفر یک حد دوطرفه است. از آنجا که نمودار تابع در دو طرف $x = ۰$ با هم متفاوت‌اند، حدهای چپ و راست در $x = ۰$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم. طبق نمودار داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۱$$

با توجه به اینکه حدهای چپ و راست این تابع در $x = ۰$ مساوی نیستند، این تابع در صفر حد ندارد.

به طور مشابه حدگیری این تابع در $x = ۲$ یک حد دوطرفه است. چون نمودار تابع در دو طرف ۲ با هم متفاوت‌اند، حدهای چپ و راست در این نقطه را جداگانه حساب می‌کنیم. طبق نمودار داریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۱$$

با توجه به اینکه حدهای چپ و راست در $x = ۲$ مساوی ۱ هستند، حد تابع در این نقطه، برابر ۱ می‌باشد.

۲ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال

با توجه به اینکه این حدگیری دوطرفه است و قانون تابع در دو طرف $x = ۲$ با هم متفاوت‌اند، حدهای چپ و راست در این نقطه را جداگانه حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x) = \lim_{x\to ۲^-} ۲ - x^۲ = -۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۲^+} g(x) = \lim_{x\to ۲^+} x - ۴ = -۲$$

با توجه به اینکه حدهای چپ و راست تابع g در $x = ۲$ با هم مساوی هستند، این تابع در این نقطه حد دارد و حد آن برابر ۲- است.

۳ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، بازنمایی

از طریق نمودار دیده می‌شود این تابع در صفر حد دارد و حد آن صفر است. اما برای اثبات این مطلب به روش جبری باید قانون این تابع را به طور صریح بنویسیم.

این تابع در دو طرف صفر به صورت دو خط متفاوت است و قانون آن به صورت دوضابطه‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & 0\le x\end{cases}$$

پس حد این تابع در صفر را با محاسبهٔ حدهای چپ و راست در صفر به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -x=0$$

چون حدهای چپ و راست این تابع در صفر، هر دو صفر هستند، می‌توان گفت حد این تابع در صفر برابر صفر است.

۴ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

الف) بله. زیرا:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x)=\lim_{x\to -1^-}(ax+2)=-a+2$$

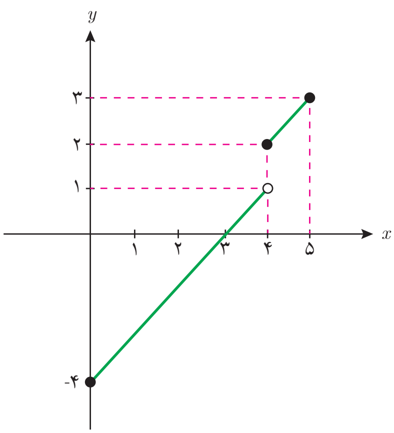
$$\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2+a)=1+a$$

ب) برای اینکه این تابع در $x=1$ حد داشته باشد، بایستی حدهای چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$1+a=-a+2 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۵ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، حل مسئله

نمودارهای زیادی می‌توان رسم کرد. به‌طور مثال:



۶ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد. به طور مثال:

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & x\leq ۲\\ \dfrac{۵x}{۲} & ۲<x\end{cases}$$

۷ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد. به‌طور مثال:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x<۰\\ ۲x+۱ & ۰\leq x\end{cases}$$

بخش دوم: پیوستگی تابع‌ها

اهداف بخش

۱ درک مفهوم پیوستگی یک تابع در یک نقطه از دامنهٔ تابع، از طریق یکسانی حدتابع و مقدار تابع

۲ درک مفهوم پیوستگی یک تابع در یک بازه

۳ تشخیص وضعیت پیوستگی تابع‌های خاص

۴ درک وضعیت پیوستگی تابع، از طریق یکپارچگی نمودار (نداشتن بریدگی) روی بازه‌های دامنه

۵ مدل‌سازی وضعیت‌های مسئله‌ای به کمک تابع و تشخیص پیوستگی یا عدم پیوستگی آن

واژه‌های کلیدی: پیوستگی و ناپیوستگی در نقطه، پیوستگی کلی، بریدگی و یکپارچگی نمودار

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آموزش پیوستگی است. اصطلاح پیوستگی در زبان روزمره نیز کاربرد دارد و معنای زبانی آن به معنای ریاضی آن نزدیک است. در کتاب وقتی از پیوستگی حرکت صحبت می‌کنیم منظور، پیوستگی در معنای زبانی آن است. بنابراین، از طریق متن باید تشخیص داده شود که به‌کارگیری اصطلاح پیوستگی در کتاب چه وقت به معنای ریاضی آن است و چه وقت به معنای زبانی آن است.
برای درک مفهوم پیوستگی از همان زمینه حرکت هواپیما استفاده شده است. در این بخش این سؤال طرح می‌شود که اگر مقدار تابع در نقطه‌ای مشخص باشد، آیا باز هم حق داریم حد تابع را در آن نقطه حساب کنیم و اگر بتوانیم حد را حساب کنیم آیا ممکن است عددی غیر از مقدار تابع به دست آوریم؟ مباحثه در مورد این سؤال نکات آموزندهٔ بسیاری در بر دارد.
آیا حدگیری از یک تابع فقط در جایی انجام می‌شود که مقدار تابع در آن نقطه مشخص نباشد؟ جواب به این سؤال آن است حدگیری از یک تابع در یک نقطه فقط نشان‌دهندهٔ رفتار تابع در اطراف آن نقطه است و مشخص بودن یا نبودن مقدار تابع در آن نقطه، هیچ دخالتی در فرایند حدگیری ندارد. بنابراین، در جاهایی هم که مقدار تابع در یک نقطه، مشخص است ممکن است برای تشخیص رفتار تابع در اطراف آن نقطه لازم باشد عمل حدگیری در آن نقطه انجام شود.
مهم‌ترین رفتار یک تابع در اطراف یک نقطه از دامنهٔ آن این است که آیا حد تابع

در آن نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه است یا خیر. در زمینهٔ حرکت هواپیما، به دلیل پیوستگی حرکت هواپیما، جواب مثبت است و به‌طور طبیعی انتظار داریم که برای تابع حرکت هواپیما در هر نقطه از دامنهٔ آن حد تابع همان مقدار تابع باشد و این ویژگی را به عنوان تعریف پیوستگی در ریاضی انتخاب می‌کنیم. این نکته که در مورد برخی توابع ممکن است این ویژگی برقرار نباشد به‌طور صریح بیان می‌شود و در یک مثال ریاضی نشان داده می‌شود.

دیدن ناپیوستگی در طبیعت آسان نیست و ریاضیات توصیف‌کننده طبیعت معمولاً با تابع‌های پیوسته کار می‌کند. با این حال در کتاب یک مثال واقعی نیز نشان داده شده است که مدل ریاضی آن با یک تابع ناپیوسته بیان می‌شود. البته در این مثال هم در واقعیت تابع اصلی پیوسته است ولی برای ما ساده‌تر آن است که وضعیت را با یک تابع ناپیوسته مدل‌سازی کنیم.

پس از انجام فعالیت‌ها و دیدن مثال‌ها و شیوه تحقیق در پیوستگی و ناپیوستگی توابع، توابع پیوسته مهم و اساسی معرفی می‌شوند و رابطهٔ بین ایده ریاضی پیوستگی و پیوستگی نمودار توابع (بدون بریدگی) طرح می‌شود. در مثال‌هایی دیده می‌شود که اگرچه تابع از لحاظ ریاضی پیوسته است ولی نمودار آن بریدگی دارد. این موارد وقتی رخ می‌دهند که دامنهٔ تابع خودش بریدگی داشته باشد و بازه نباشد. بنابراین، ایدهٔ شهودی پیوستگی نمودار تابع و پیوستگی ریاضی تابع وقتی بر هم منطبق می‌شوند که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. یک تابع وقتی پیوسته است که روی بازه‌های داخل دامنهٔ خود پیوستگی شهودی داشته باشد.

ورود به مطلب

برای طرح مفهوم پیوستگی بهتر است از مسئلهٔ حد یک تابع در نقاط دامنهٔ خود که مقدار تابع مشخص است شروع کنید که آیا می‌توانیم در این حالت حد بگیریم؟ به چه دلیلی حد بگیریم وقتی مقدار تابع مشخص است؟ اگر حد بگیریم آیا غیر از مقدار تابع چیز دیگری ممکن است به‌دست آید؟ پس از مباحثه دربارهٔ این سؤالات می‌توانید جواب‌ها را در مثال‌های متعدد بررسی کنید و نهایتاً حالت حد تابع که مساوی مقدار تابع می‌شود را به عنوان ویژگی پیوستگی معرفی کنید که با شهود پیوستگی هم سازگار است. سایر حالات را به عنوان ناپیوستگی معرفی کنید.

فعالیت آموزشی

این بخش با طرح یک سؤال آغاز می‌شود که در آن حدگیری از تابع‌هایی در نقاطی مطرح می‌شود که مقدار تابع در آن نقاط مشخص است. اینکه به چه دلیل حد می‌گیریم و آیا حد به دست آمده با مقدار تابع می‌تواند متفاوت باشد یا خیر مباحثاتی انجام می‌شود و در کتاب از زبان معلم حالات ممکن توضیح داده

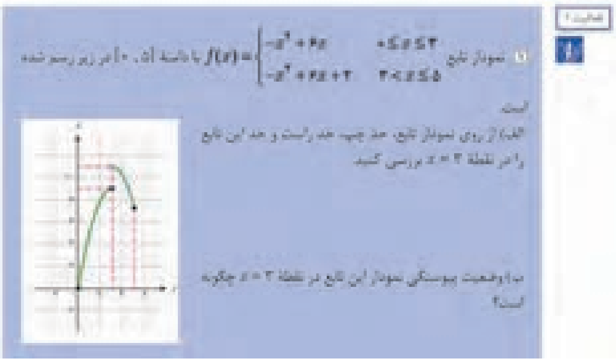
می‌شوند و مفهوم پیوستگی به‌طور ضمنی مطرح می‌شود. در فعالیت (۱) حالات ممکن برای تابع و حد آن و مقدار تابع بررسی می‌شوند.

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم پیوستگی تابع در یک نقطه با استفاده از نمودار تابع.
- درک ارتباط بین حد و پیوستگی تابع در یک نقطه با استفاده از نمودار تابع.
- کسب مهارت تشخیص پیوستگی تابع با استفاده از نمودار تابع.
- آشنایی با نمودار برخی وضعیت‌های ناپیوستگی تابع در یک نقطه.

فرایندها:

- بازنمایی‌ها.
- استدلال کردن.
- تفکر بصری.



با توجه به نقشی که نمودار در درک شهودی مفاهیم ریاضی از جمله مفهوم پیوستگی تابع دارد، در این فعالیت از نمودار تابع‌ها درشروع ارائهٔ مفهوم پیوستگی استفاده شده‌است. تبیین صحیح علت گسستگی تابع در یک نقطه با استفاده از نمودار تابع توسط هنرجو، به ایجاد درک صحیح او از مفهوم پیوستگی کمک می‌کند.

حل فعالیت (۱)

۱ الف) از روی نمودار می‌توان دید حدچپ تابع در این نقطه ۹ و حد راست تابع در این نقطه ۱۱ است، بنابراین، این تابع در این نقطه، حد ندارد.

ب) نمودار تابع در نقطهٔ x = ۳ گسستگی دارد و پیوسته نیست.

۲ الف) حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ x = ۳ برابر ۹ است. بنابراین حد این تابع در نقطهٔ x=۳ برابر ۹ است.

ب) خیر، مقدار تابع در نقطهٔ x = ۳ عدد ۱۱ است.

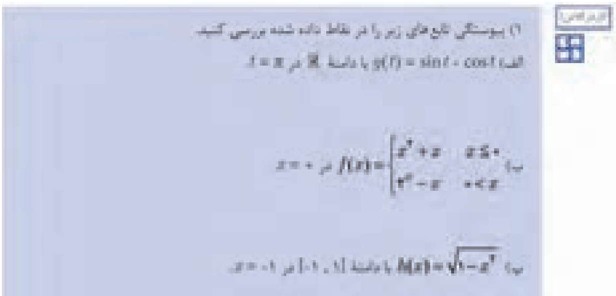
پ) نمودار تابع در این نقطه گسستگی دارد.

۳ الف) نمودار تابع در نزدیکی نقطهٔ $x = ۳$ نشان می‌دهد حد تابع در این نقطه، عدد ۹ است.

ب) بله مساوی است.

پ) نمودار تابع در نقطهٔ $x = ۳$ گسستگی ندارد و پیوسته است.

پس از این فعالیت، مفهوم پیوستگی و رابطهٔ آن با حد تابع و مقدار تابع باید در ذهن هنرجو شکل گرفته باشد. در ادامه، مفهوم پیوستگی در نقطه و پیوستگی کلی تابع در دامنهٔ آن، رسماً معرفی می‌شوند و در مثال‌هایی توضیح داده می‌شوند و تابع‌های پیوسته مهم معرفی می‌شوند. رابطهٔ بین پیوستگی شهودی نمودار تابع و پیوستگی تابع با تعریف ریاضی آن نیز در انتها توضیح داده می‌شود. در انتهای این بخش این مفاهیم در کار در کلاس (۲) تمرین می‌شوند.



۱) پیوستگی تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف) $g(t) = \sin t + \cos t$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $t = \pi$

ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \le 0 \\ e^x - x & 0 < x \end{cases}$ در $x = 0$

پ) $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ با دامنهٔ $[-1, 1]$ در $x = -1$

در این قسمت برای تقویت مهارت هنرجویان توابع مختلف (مثلثاتی، چندضابطه‌ای، نمایی و رادیکالی) انتخاب شده‌است. همچنین نقطهٔ انتخاب شده جهت بررسی پیوستگی نیز متنوع انتخاب (نقطهٔ داخل دامنه و نقطهٔ ابتدا یا انتهای دامنه) شده است. جهت کسب مهارت بیشتر با توجه به توابع معرفی شده در کتاب می‌توان مثال‌های متنوع دیگری نیز انتخاب کرد و در اختیار هنرجویان قرار داد.

حل کار در کلاس (۲)

۱ الف) پیوسته است زیرا:

$$\lim_{t\to\pi} g(t) = \lim_{t\to\pi}(\sin t + \cos t) = \lim_{t\to\pi}(\sin t) + \lim_{t\to\pi}(\cos t) = \sin\pi + \cos\pi = g(\pi)$$

ب) تابع در دو طرف نقطهٔ صفر ضابطه‌های متفاوت دارد، بنابراین برای محاسبهٔ

حد این تابع در صفر، لازم است حدهای چپ و راست آن را در این نقطه محاسبه و برابری این دو حد را بررسی کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(۲^x-x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(x^۲+x)=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$$

چون حدهای چپ و راست برابر نیستند، این تابع در این نقطه حد ندارد، در نتیجه پیوسته نیز نمی‌باشد.

پ) با توجه به دامنهٔ تابع، به نقطهٔ $x=-۱$ از راست می‌توان نزدیک شد، بنابراین حد تابع در این نقطه حد یک‌طرفه است.

$$\lim_{x\to -۱} h(x)=\lim_{x\to -۱}\sqrt{۱-x^۲}=\sqrt{۱-(-۱)^۲}=۰=h(۰)$$

پس، حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه برابر است و این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته است.

۲ به ازای هر عدد a از دامنهٔ این تابع داریم $۰<a<\frac{\pi}{۲}$ و حد مخرج این تابع در نقطهٔ a برابر $\sin a$ است که مقداری ناصفر است. پس این تابع در نقطهٔ a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to a} ۱}{\lim\limits_{x\to a}\sin x}=\frac{۱}{\sin a}$$

یعنی، این تابع پیوسته است.

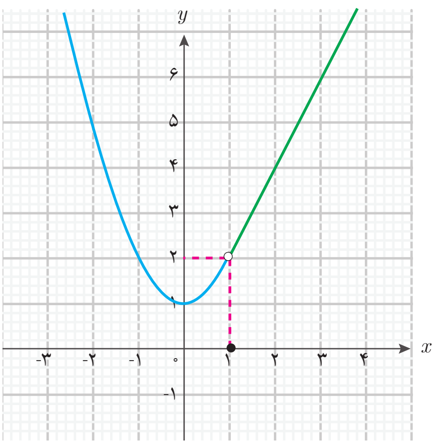
حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت: استدلال، بازنمایی

برای تشخیص وجود حد، حدهای چپ و راست در این نقطه را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^-} h(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۱+x^۲)=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} h(x)=\lim_{x\to ۱^+} ۲x=۲$$



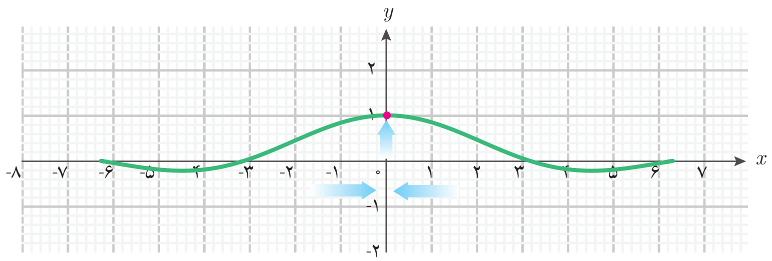
با توجه به اینکه حدهای چپ و راست این تابع در $x=۱$ با هم برابر

است، پس $\lim\limits_{x \to ۱} h(x) = ۲$.

اما $h(۱) = ۰$، پس حد تابع h در نقطهٔ $x = ۱$ با مقدار تابع در این نقطه مساوی نیست و تابع h در این نقطه پیوسته نیست.

۲ فرایندها و مهارت: استدلال، بازنمایی

وضعیت این تابع در نقاط ناصفر روشن است. با حدگیری از تابع در نقاط ناصفر دیده می‌شود حد تابع با مقدار تابع در این نقاط مساوی است. اما قبلاً دیده بودیم حد این تابع در صفر برابر ۱ است و مقدار این تابع نیز در صفر برابر ۱ است. پس در نقطه صفر هم پیوستگی برقرار است و این تابع همه‌جا پیوسته است.

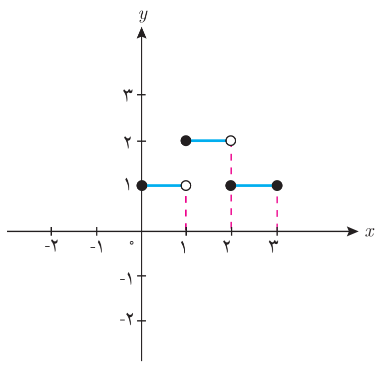


۳ فرایندها و مهارت: استدلال، بازنمایی

تابع f با دامنه $[۰, ۳]$ در $x = ۱$ و $x = ۲$ پیوسته نیست. زیرا در این نقاط حد ندارد.

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۱ \quad , \quad \lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۲ \quad , \quad \lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۱$$



۴ فرایندها و مهارت: استدلال، بازنمایی

اگر a نقطه ای از دامنه این تابع باشد، داریم: $\circ < a < \frac{\pi}{\text{۲}}$. بنابراین با استفاده از حد تقسیم دو تابع (حد تابع مخرج در این نقطه صفر نیست) داریم:

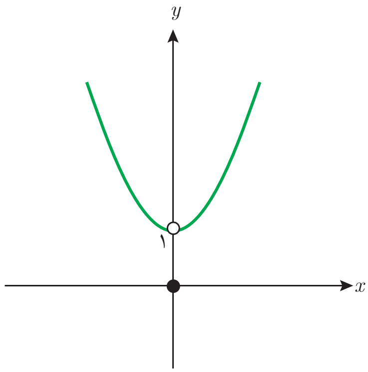
$$\lim_{x\to a}\frac{\cos^{\text{۲}} x}{\text{۱}-\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\cos^{\text{۲}} x}{\lim\limits_{x\to a}\text{۱}-\sin x}=\frac{\cos^{\text{۲}} a}{\text{۱}-\sin a}$$

بنابراین، این تابع در دامنهٔ داده شده، پیوسته است.

۵ فرایندها و مهارت: استدلال، حل مسئله، بازنمایی

تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد. به‌طور نمونه:

$$f(x)=\begin{cases}\text{۱}+x^{\text{۲}} & x\neq\circ\\ \circ & x=\circ\end{cases}$$



۶ فرایندها و مهارت: استدلال، حل مسئله

بله، این تابع پیوسته است. زیرا نمودار این تابع بریدگی ندارد و روی هر بازه در دامنه‌اش پیوستگی دارد.

۷ فرایندها و مهارت: حل مسئله، استدلال

بله. اگر دامنهٔ یک تابع از اجتماع چند بازه جدا از هم تشکیل شده باشد، نمودار تابع نیز از چند قسمت جدا از هم تشکیل خواهد شد و با توجه به اینکه نمودار تابع داده شده روی هر بازه از دامنهٔ خود پیوسته می‌باشد، می‌توان گفت این تابع در دامنه داده شده پیوستگی دارد.

۸ فرایندها و مهارت: حل مسئله، استدلال، نمایش

الف) بله پیوسته است، زیرا نمودار تابع روی هر بازه از دامنهٔ آن پیوستگی دارد.

ب) به‌دلیل پیوستگی تابع، حد تابع در هر نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه است. پس کافیست که مقدار تابع در این نقطه را از روی نمودار تابع به‌دست آوریم.