بخش سوم: تابع نمایی

اهداف بخش

۱ درک تابع‌های نمایی
۲ تشخیص رفتار صعودی یا نزولی تابع‌های نمایی
۳ محاسبه مقدار تابع نمایی

واژه‌های کلیدی: تابع نمایی، رفتار افزایشی یا کاهشی

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، آشنایی با تابع‌های نمایی است. در این بخش برای رسیدن به تابع‌های نمایی، از مسئلهٔ رشد جمعیت و اهمیت آن در برنامه‌ریزی استفاده شده است. این سؤال در کلاس مطرح می‌شود که رشد جمعیت را چگونه به‌دست می‌آورند. در فعالیت (۴) به این سؤال پاسخ داده می‌شود. در این فعالیت به یک تابع نمایی خاص می‌رسیم و سپس رسماً توابع نمایی معرفی می‌شوند.

با ذکر چند مثال و تمرین این مفهوم، در فعالیت (۵) رفتار افزایشی یا کاهشی این توابع بررسی می‌شوند و در مثال‌هایی این رفتارها نمایش داده می‌شوند.

ورود به مطلب

بهتر است زمینه‌هایی را بیابیم که در آنها تابع نمایی وجود داشته باشد. در کتاب از زمینهٔ رشد جمعیت استفاده شده است. زمینه‌های دیگری مانند سود بانکی، تکثیر باکتری‌ها، استهلاک، تبدیل مواد رادیواکتیو، ... نیز وجود دارند که با توجه به درک هنرجویان می‌توان از آنها هم استفاده کرد. در یک زمینهٔ انتخاب شده، باید به دنبال جواب این سؤال باشیم که مقدار یک کمیت بر حسب کمیت دیگر چگونه محاسبه می‌شود. البته جواب سؤال باید یک تابع نمایی باشد و سپس توابع نمایی کلی را تعریف کنیم.

فعالیت آموزشی

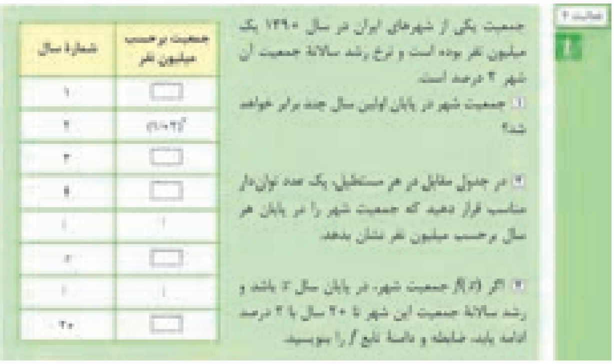
پس از طرح سؤال دربارهٔ چگونگی رشد جمعیت به فعالیت (۴) می‌رسیم که در جهت پاسخ به این سؤال قرار دارد.

اهداف:

- درک نقش تابع نمایی در مدل‌سازی پدیده‌ها.
- آشنایی با مفهوم تابع نمایی.
- آشنایی با رفتار تابع نمایی.

مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصالات (ریاضی و خارج ریاضی).
- حل مسئله (مدل‌سازی).



فعالیت ۴

جمعیت یکی از شهرهای ایران در سال ۱۳۹۰ یک میلیون نفر بوده است و نرخ رشد سالانهٔ جمعیت آن شهر ۲ درصد است.

۱ جمعیت شهر در پایان اولین سال چند برابر خواهد شد؟

۲ در جدول مقابل در هر مستطیل یک عدد توان‌دار مناسب قرار دهید که جمعیت شهر را در پایان هر سال برحسب میلیون نفر نشان بدهد.

۳ اگر $f(x)$ جمعیت شهر در پایان سال x باشد و رشد سالانهٔ جمعیت این شهر تا ۲۰ سال با ۲ درصد ادامه یابد، ضابطه و دامنهٔ تابع f را بنویسید.

شمارهٔ سال	جمعیت برحسب میلیون نفر
۱	☐
۲	$(۱/۰۲)^۲$
۳	☐
۴	☐
⋮	⋮
x	☐
⋮	⋮
۲۰	☐

حل فعالیت (۴)

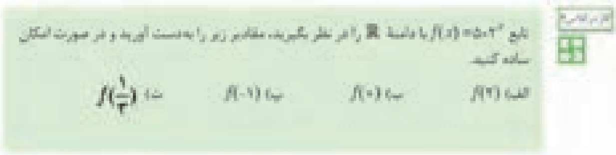
۱ ۱/۰۲ برابر.

۲ جدول تکمیل شده:

شمارهٔ سال	جمعیت بر حسب میلیون نفر
۱	۱/۰۲
۲	$(۱/۰۲)^{۲}$
۳	$(۱/۰۲)^{۳}$
۴	$(۱/۰۲)^{۴}$
⋮	⋮
x	$(۱/۰۲)^{x}$
⋮	⋮
۲۰	$(۱/۰۲)^{۲۰}$

۳ $f(x)=(1/02)^x$ و دامنهٔ تابع بازهٔ $[0\ ,\ 20]$ است. البته، در اینجا، تعداد سال می‌تواند عدد حقیقی باشد، اما اگر فقط پایان سال را درنظر داشته باشیم دامنهٔ تابع، مجموعهٔ $\{0\ ,\ 1\ ,\ ...\ ,\ 20\}$ است.

پس از ارائه تعریف و مثال، برای تثبیت یادگیری به کار در کلاس(۴) می‌رسیم.


تابع $f(x)=5\times 2^x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. مقادیر زیر را به‌دست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $f(2)$ ب) $f(0)$ پ) $f(-1)$ ت) $f(\frac{1}{3})$

حل کار در کلاس (۴)

الف) $5\times 2^2=20$ ب) $5\times 2^0=5$

پ) $5\times 2^{-1}=\frac{5}{2}$ ت) $5\times 2^{\frac{1}{3}}=5\sqrt[3]{2}$

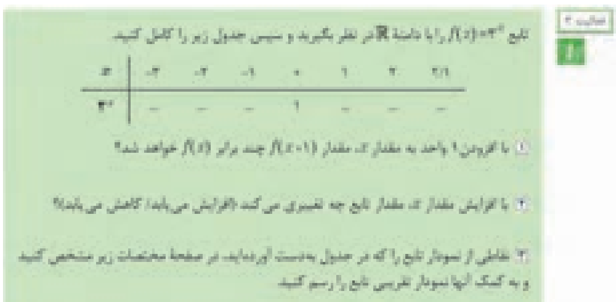
در ادامه فعالیت (۵)، رفتار افزایشی یا کاهشی تابع‌های نمایی بررسی می‌شوند.

اهداف موضوعی:

- آشنایی با خواص و رفتار تابع‌های نمایی.
- کسب مهارت رسم نمودار تقریبی تابع نمایی از طریق نقطه‌یابی.

فرایندها:

- بازنمایی‌ها


تابع $f(x)=3^x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید و سپس جدول زیر را کامل کنید.

x	-3	-2	-1	0	1	2	[illegible]
3^x	ــ	ــ	ــ	1	ــ	ــ	ــ

۱) با افزودن ۱ واحد به مقدار x، مقدار $f(x+1)$ چند برابر $f(x)$ خواهد شد؟

۲) با افزایش مقدار x، مقدار تابع چه تغییری می‌کند (افزایش می‌یابد/ کاهش می‌یابد)؟

۳) نقاطی از نمودار تابع را که در جدول به‌دست آورده‌اید، در صفحهٔ مختصات زیر مشخص کنید و به کمک آنها نمودار تقریبی تابع را رسم کنید.

حل فعالیت (۵)

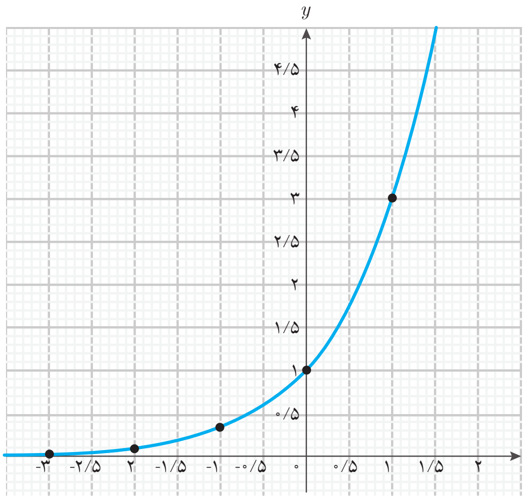
جدول تکمیل شده:

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
۳^x	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷

۱ سه برابر خواهد شد، زیرا $۳^{x+۱} = ۳ \times ۳^x$

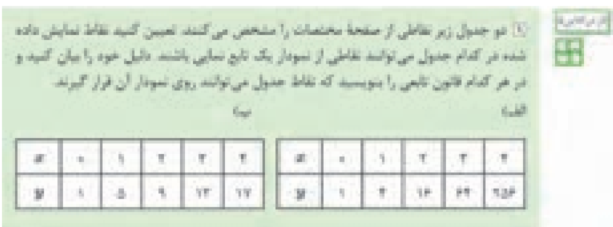
۲ با افزایش x مقدار $f(x)$ افزایش می‌یابد.

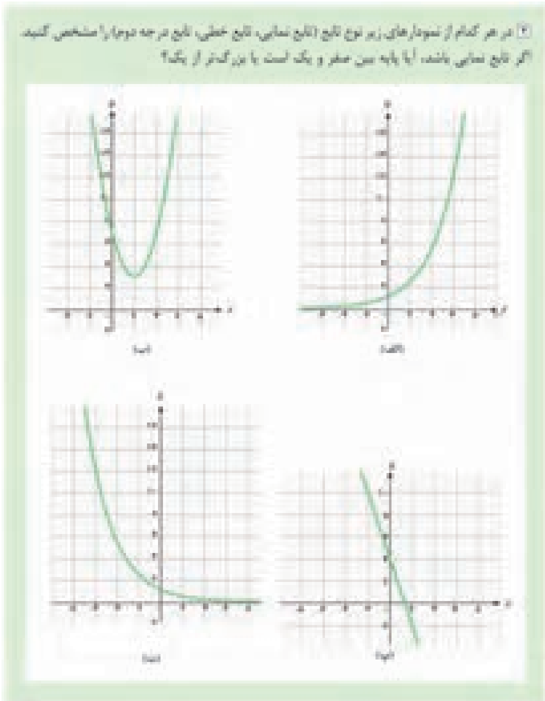
۳ نمودار تابع:



در این فعالیت رفتار افزایشی این تابع نمایی خاص مشخص می‌شود، اما با ارائه چند مثال دیگر معلوم می‌شود که وقتی پایه عددی کمتر از ۱ باشد، تابع نمایی رفتار کاهشی دارد.

برای تثبیت یادگیری به کار در کلاس(۵) می‌رسیم.





حل کار در کلاس (۵)

۱ـ نقاط مشخص شده در جدول «الف» روی نمودار تابع نمایی است، زیرا از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌گذرد و با هر واحد افزایش متغیر x، مقدار y، ۴ برابر می‌شود قانون این تابع $f(x) = ۴^x$ می‌باشد.

در جدول «ب» با هر واحد افزایش متغیر x، مقدار y، ۴ واحد افزایش می‌یابد بنابراین نقاط مشخص شده در این جدول روی نمودار یک تابع خطی است و شیب خط مربوط به این نمودار ۴ می‌باشد با توجه به اینکه نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ روی نمودار این تابع است قانون این تابع $f(x) = ۴x + ۱$ می‌باشد.

۲ـ الف) تابع نمایی است و پایه بزرگ‌تر از ۱ است (با افزایش مقدار x، مقدار y نیز افزایش می‌یابد).

ب) تابع درجهٔ دوم است. (نمودار سهمی است)

پ) تابع خطی است.

ت) تابع نمایی است و پایه کوچک‌تر از ۱ است (با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد).

حل مسائل

۱ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله

الف) $f(0)=(\frac{1}{4})^0=1$

ب) $g(-1)=5^{-1}=\frac{1}{5}$

پ) $f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

ت) $f(-1)=(\frac{1}{4})^{-1}=4$

ث) $g(\frac{1}{3})=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$

۲ مهارت‌ها و فرایندها: استدلال، بازنمایی‌ها

جدول قسمت (ب) مربوط به یک تابع نمایی است. زیرا افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار y، $\frac{1}{3}$ برابر شده است. در این حالت، مقدار تابع به صورت $f(x)=(\frac{1}{3})^x$ است.

جدول قسمت (پ) مربوط به یک تابع نمایی است. زیرا با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار y، ۰/۵ برابر شده است. در این حالت، قانون تابع به‌صورت $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ است.

(وجود اشتباه چاپی در جدول، ۰/۶۲۵ باید ۰/۱۲۵ باشد)

جدول قسمت (ت) مربوط به یک تابع نمایی است. زیرا با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار y، ۲ برابر شده است. در این حالت ، قانون تابع به صورت $f(x)=2^x$ است.

۳ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، بازنمایی‌ها

ردیف	قانون تابع	تغییرات y به ازای ۱ واحد افزایش x	محل تقاطع با محور yها
۱	$y=6x$	۶ برابر	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
۲	$y=(0/9)x$	۰/۹ برابر	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
۳	$y=\frac{1}{3}\times 2^x$	۲ برابر	$\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$
۴	$y=3(\frac{1}{5})^x$	$\frac{1}{5}$ برابر	$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$

۴ مهارت ها و فرایندها: حل مسئله، استدلال

الف) افزایش   ب) کاهش   پ) افزایش

۵ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، استدلال، پیوند و اتصالات

الف) $f(x) = ۵۰۰۰۰۰۰۰(۱/۱۲)^n$

ب) $f(۵) = ۵۰۰۰۰۰۰۰\ (۱/۱۲)^۵ \approx ۸۸۱۱۷۰۸$

۶ مهارت‌ها و فرایندها: بازنمایی‌ها، استدلال کردن

الف)

x	۲	۱	۰	۱-	۲-
$f(x)$	۳×۲^{۲}	۳×۲^{۱}	۳×۲^{۰}	۳×۲^{-۱}	۳×۲^{-۲}
	۱۲	۶	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$

ب) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$

پ) به ازای افزودن یک واحد به متغیر x، مقدار تابع f، دو برابر می‌شود.

۷ مهارت‌ها و فرایندها: بازنمایی‌ها، استدلال کردن، مهارت به‌دست آوردن مقدار تابع

الف) با توجه به اینکه محل برخورد نمودار تابع با محور yها عدد ۲ است، پس $a=۲$

همچنین با توجه به نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$ که روی نمودار تابع است، می‌توان گفت مقدار $b=۲$. پس قانون تابع به صورت: $f(x) = ۲ \times ۳^x$ است.

ب)

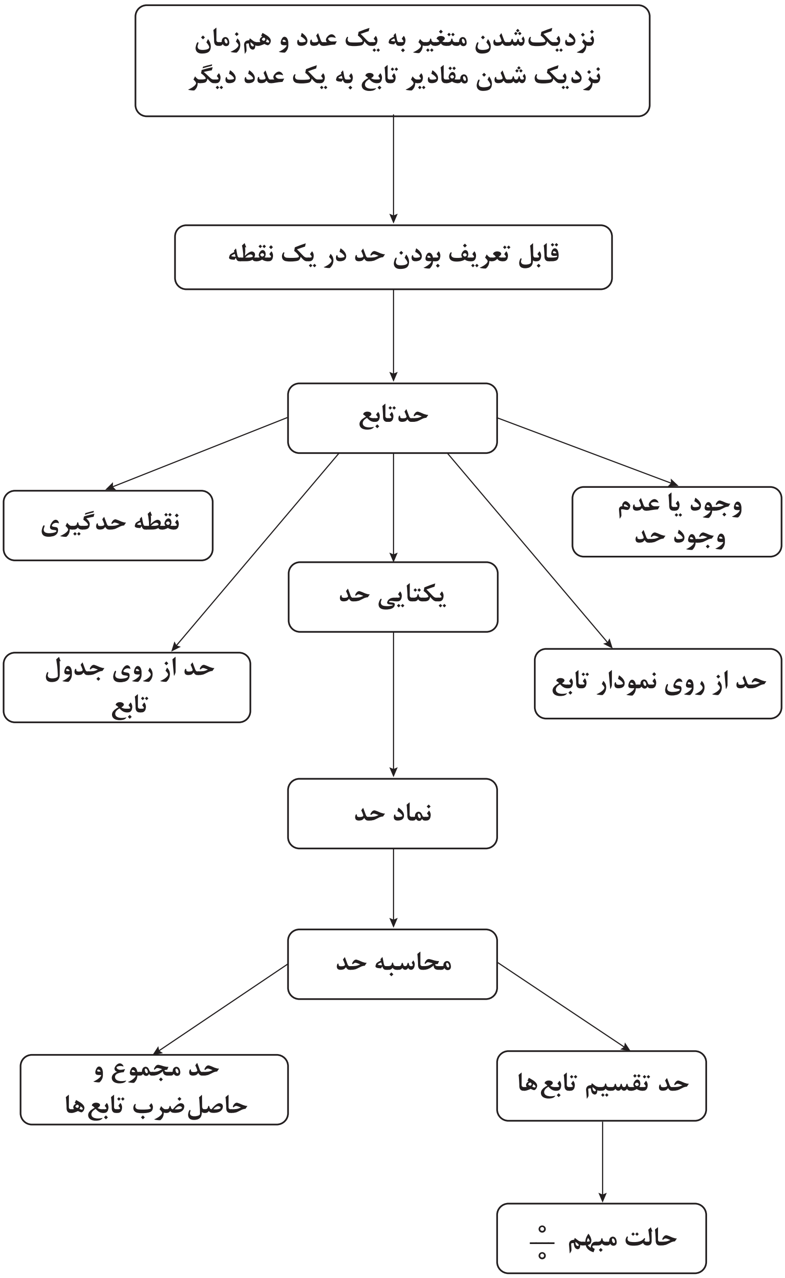
$$f(۲) = ۲ \times ۳^۲ = ۲ \times ۹ = ۱۸$$

$$f(-۱) = ۲\times۳^{-۱} = ۲\times\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

فصل دوم

درک مفهوم حد

نقشه مفهومی فصل دوم



اهداف کلی پودمان

۱ درک فرایند حدگیری و مفهوم حد
۲ درک رابطهٔ بین نقطهٔ حدگیری و دامنهٔ تابع
۳ درک وجود یا نبود حد در نقاط حدگیری
۴ تشخیص حد تابع از روی جدول و نمودار تابع
۵ آشنایی با نماد حد تابع در یک نقطه
۶ محاسبهٔ حد مجموع، ضرب و تقسیم تابع‌ها
۷ آشنایی با حالت مبهم $\frac{0}{0}$

پیش‌نیازها

- آشنایی با توابع و بازنمایی‌های مختلف آن
- آشنایی با انواع توابع
- توانایی محاسبه مقدار تابع در نقاط دامنهٔ آن به کمک بازنمایی‌های مختلف تابع

بخش اول: حد تابع‌ها

اهداف بخش

۱ درک مفهوم نزدیک شدن متغیر تابع (از دامنهٔ یک تابع) به یک نقطه و به دنبال آن، نزدیک شدن مقادیر تابع به یک نقطهٔ دیگر
۲ درک مفهوم حد تابع در یک نقطه
۳ تشخیص قابل تعریف بودن یا نبودن حد تابع در نقاط داده شده
۴ تشخیص وجود حد در نقاطی که حد قابل تعریف است
۵ حدس مقدار حد در نقاط داده شده به کمک جدول و نمودار
۶ آشنایی با نماد حد تابع در یک نقطه

واژه‌های کلیدی: حد، نقطهٔ حدگیری، نزدیک شدن

نگاه کلی به بخش

در این بخش اولین آشنایی هنرجویان با مفهوم حد صورت می‌گیرد. به‌همین دلیل، سعی شده این مفهوم در یک زمینهٔ طبیعی به روشنی دیده شود تا به‌راحتی قابل فهم شود. زمینهٔ انتخاب شده، برخورد یک موشک با یک هواپیما است. مسئله طرح شده، یافتن ارتفاع هواپیما در زمان برخورد موشک است. این ارتفاع مستقیماً در دسترس نیست و در جایی ثبت نشده است ولی در لحظات قبل از برخورد موشک، ارتفاع هواپیما در جعبهٔ سیاه هواپیما ثبت شده است. حل صحیح این مسئله، به‌طور طبیعی مفهوم حد را در ذهن هنرجویان ایجاد می‌کند.
یافتن حد تابع‌ها در ابتدا به صورت حدس از روی جدول و نمودار تابع‌ها انجام می‌شود و در مثال‌های متنوع، عملیات مورد نیاز برای یافتن حد یک تابع تمرین می‌شود. پس از یافتن یک درک کلی از مفهوم حد، به جزئیات این مفهوم پرداخته می‌شود. در فرایند حدگیری، همواره یک تابع و یک نقطه به عنوان نقطهٔ حدگیری و نزدیک شدن متغیر تابع از داخل دامنهٔ تابع به نقطهٔ حدگیری و هم‌زمان نزدیک شدن مقادیر تابع به مقدار حد وجود دارد.
تشخیص اینکه چه نقاطی را می‌توان به عنوان نقطهٔ حدگیری برای یک تابع به‌کار برد تحت عنوان قابل تعریف بودن حد یک تابع در یک نقطه آمده است. همچنین وجود یا نبود حد، نکته مهمی است که با قابل تعریف بودن یا نبودن حد در یک نقطه فرق دارد. ابتدا قابل تعریف بودن حد یک تابع در یک نقطه باید برقرار باشد، بعد سراغ این سؤال می‌رویم که حد در آن نقطه وجود دارد یا وجود ندارد.

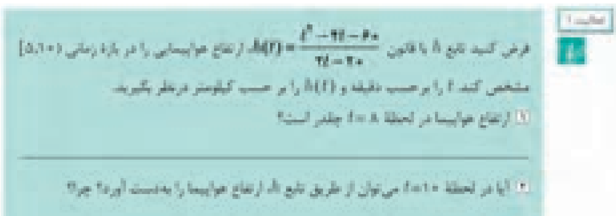
پس از درک این جزئیات، مفهوم حد به‌طور رسمی تعریف می‌شود و یکتایی حد تذکر داده می‌شود. در اینجا مفهوم به اندازهٔ دلخواه نزدیک شدن مقادیر تابع و به اندازهٔ کافی نزدیک شدن مقدار متغیر به‌طور گذرا توضیح داده می‌شوند. پس از ذکر چند مثال، نماد حد معرفی و در مثال‌ها روی آن تمرین می‌شود.

ورود به مطلب

از آنجا که مفهوم حد برای هنرجویان جدید است و با مفاهیم قبلی ریاضی تفاوت اساسی دارد، درک آن برای هنرجویان بسیار سخت است. به همین دلیل در این بخش باید بسیار با دقت و حساب شده وارد شویم. برای آموزش این مفهوم نباید عجله کرد و انتظار داشت در مدت کوتاه این مفهوم به سرعت فهمیده شود. این مفهوم اجزایی دارد (تابع، دامنهٔ تابع، نقطهٔ حدگیری، نزدیک شدن متغیر از داخل دامنهٔ تابع به نقطهٔ حدگیری، نزدیک شدن مقدار تابع به یک عدد دیگر) که باید به همهٔ آنها توجه کرد.
بهترین روش یافتن یک زمینهٔ طبیعی مناسب و طرح یک مسئله در آن زمینه است که برای حل آن مسئله هنرجو مجبور باشد تمام فرایند حدگیری و اجزای این فرایند را به‌کار برد. البته لازم نیست هنرجو با مفهوم حد پیشاپیش آشنا باشد تا از عهده این کار برآید، بلکه حل این مسئله او را به طور طبیعی به این فرایند هدایت خواهد کرد.

فعالیت آموزشی

در ابتدای این بخش در طی یک مباحثه بین هنرجویان و معلم، مسئله‌ای طرح می‌شود و راه‌حل‌هایی ارائه می‌شود. در فعالیت (۱) سعی می‌شود راه‌حل پیشنهادی به مرحلهٔ اجرا درآید.


فرض کنید تابع h با قانون [illegible] ارتفاع هواپیمایی را در بازهٔ زمانی [illegible] مشخص کند. t را برحسب دقیقه و h(t) را برحسب کیلومتر درنظر بگیرید.
۱) ارتفاع هواپیما در لحظهٔ t=۸ چقدر است؟
۲) آیا در لحظهٔ t=۱۰ می‌توان از طریق تابع h ارتفاع هواپیما را به‌دست آورد؟ چرا؟

اهداف:

■ درک مفهوم نزدیک شدن مقادیر تابع به یک مقدار، با نزدیک کردن مقادیر متغیر تابع به یک مقدار خاص.

■ شکل‌گیری مفهوم حد در ذهن هنرجو
■ حل مسئلهٔ طرح شده در قبل از فعالیت

مهارت ها و فرایندها

■ پیوندها و اتصالات (ریاضی و خارج ریاضی).
■ بازنمایی‌ها.
■ استدلال کردن.
■ حدسیه‌سازی.

توجه داشته باشید که برای معرفی مفهوم حد در این فعالیت، تابعی انتخاب شده است که در نقطهٔ مورد بررسی، تعریف نشده است و نمی‌توان از مقدار تابع در این نقطه صحبت کرد. به این ترتیب لزوم بررسی حد این تابع، ضرورت دارد و نمی‌توان از مقدار تابع در این نقطه استفاده کرد.

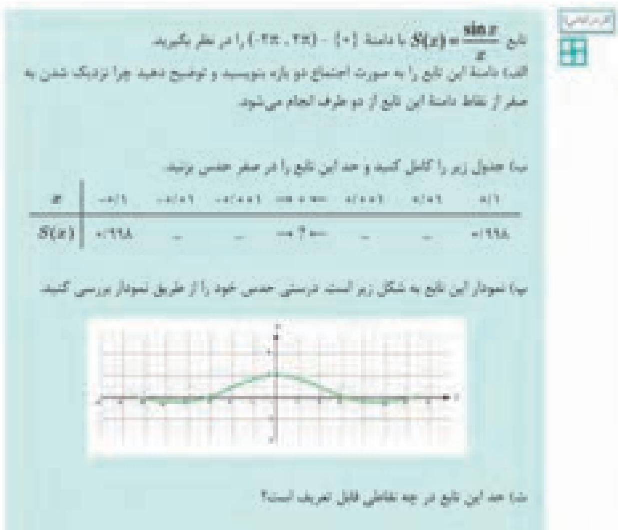
حل فعالیت ۱

۱ $h(۸) = ۷$ ارتفاع هواپیما ۷ کیلومتر از سطح زمین است.
۲ خیر، زیرا ۱۰ در دامنهٔ تابع h نیست.
۳ بله، چون تابع h به ازای همهٔ اعداد در بازهٔ (۱۰ , ۵] تعریف شده‌است.
۴ جدول تکمیل شده:

t	۵	۹	۹/۵	۹/۹۵	۹/۹	۹/۹۹	۹/۹۹۹ ⟶ ۱۰
$h(t)$	۵/۵	۷/۵	۷/۷۵	۷/۹۷۵	۷/۹۵	۷/۹۹۵	۷/۹۹۹۵ ⟶ ?

۵ با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به عدد ۸ نزدیک می‌شوند.
۶ ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t = ۱۰$، برابر ۸ کیلومتر بوده است.

پس از این فعالیت، مفهوم حد به طور صریح‌تر بیان می‌شود و با مثال‌هایی روی این مفهوم تمرین می‌شود. در برخی مثال‌ها حدگیری یک‌طرفه و در برخی دیگر دو طرفه است و تذکر داده می‌شود که در هر دو حالت ممکن است در حدگیری رخ دهد. به ویژه به این نکته پرداخته می‌شود که حد یک تابع فقط در نقاط خاصی قابل تعریف است. این نکات در کار در کلاس (۱) تمرین می‌شود.



کار در کلاس

تابع $S(x)=\frac{\sin x}{x}$ با دامنهٔ $(-2\pi, 2\pi)-\{0\}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ این تابع را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید و توضیح دهید چرا نزدیک شدن به صفر از نقاط دامنهٔ این تابع از دو طرف انجام می‌شود.

ب) جدول زیر را کامل کنید و حد این تابع را در صفر حدس بزنید.

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow ۰ \leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$S(x)$	$۰/۹۹۸$	ـ	ـ	$\rightarrow ? \leftarrow$	ـ	ـ	$۰/۹۹۸$

پ) نمودار این تابع به شکل زیر است. درستی حدس خود را از طریق نمودار بررسی کنید.

ت) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

حل کار در کلاس (۱)

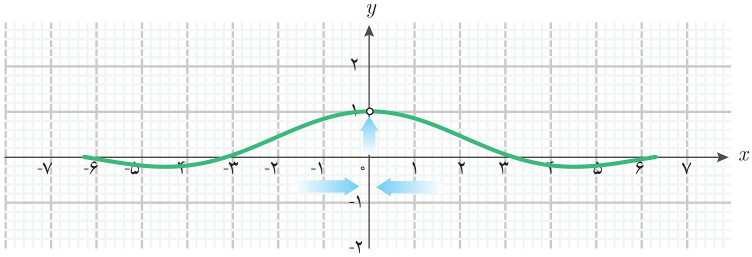
الف) دامنه: $D_S=[-\pi, ۰)\cup(۰, \pi]$. با توجه به دامنه می‌توان گفت این تابع در بازه‌هایی به ازای مقادیرِ کوچک‌تر از صفر و بزرگ‌تر از صفر تعریف شده است. بنابراین نزدیک شدن به صفر از مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر از صفر (از دو طرف) انجام می‌شود.

ب) جدول تکمیل شده:

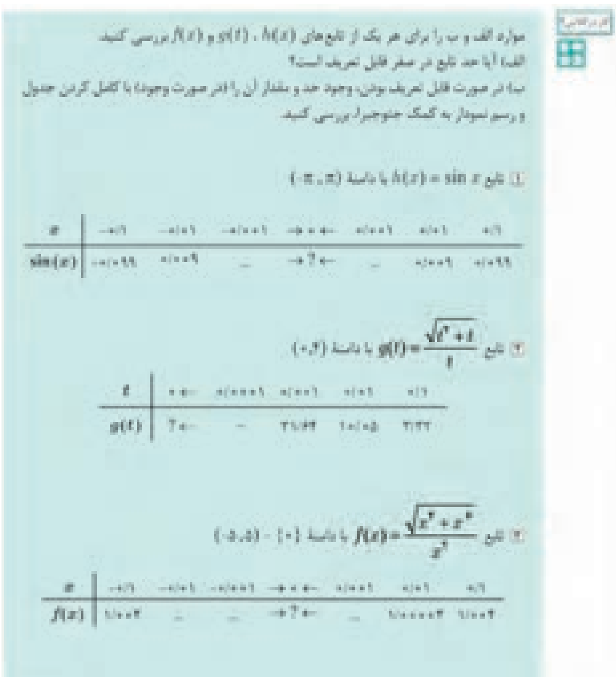
x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱ \rightarrow$	۰	$\leftarrow ۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$S(x)$	$۰/۹۹۸$	$۰/۹۹۹۸$	$۰/۹۹۹۹ \rightarrow$	$?$	$\leftarrow ۰/۹۹۹۹$	$۰/۹۹۹۸$	$۰/۹۹۸$

با توجه به مقادیر تابع در نزدیکی صفر، ملاحظه می‌شود هرچه متغیر x به صفر نزدیک‌تر می‌شود مقدار تابع به عدد ۱ نزدیک‌تر می‌شود، یعنی حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ در صفر، عدد ۱ است.

پ) نمودار تابع نیز نشان می‌دهد با نزدیک شدن x به صفر، $S(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شود یعنی در نمودار نیز حدس ما تأیید می‌شود.



ت) حد این تابع در تمامی نقاط $[-\pi , \pi]$ قابل تعریف است.
در ادامه، به صورت مباحثه‌ای، دربارهٔ وجود و عدم وجود حد و رابطهٔ آن با قابل تعریف بودن حد بحثی ارائه می‌شود و در کار در کلاس(۲) روی آن تمرین می‌شود.



موارد الف و ب را برای هر یک از تابع‌های $h(x)$، $g(t)$ و $f(x)$ بررسی کنید.
الف) آیا حد تابع در صفر قابل تعریف است؟
ب) در صورت قابل تعریف بودن، وجود حد و مقدار آن را (در صورت وجود) با کامل کردن جدول و رسم نمودار به کمک جئوجبرا بررسی کنید.

۱ تابع $h(x) = \sin x$ با دامنهٔ $(-\pi , \pi)$

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	→۰←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$\sin(x)$	[illegible]	[illegible]	ـ	→?←	ـ	[illegible]	[illegible]

۲ تابع $g(t)=\frac{\sqrt{t^2+t}}{t}$ با دامنهٔ $(۰,۳)$

t	۰←	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$g(t)$	?←	ـ	۳۱/۶۴	۱۰/۰۵	۳/۳۲

۳ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x^4}}{x^2}$ با دامنهٔ $(-۵,۵)-\{۰\}$

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	→۰←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	[illegible]	ـ	ـ	→?←	ـ	[illegible]	[illegible]

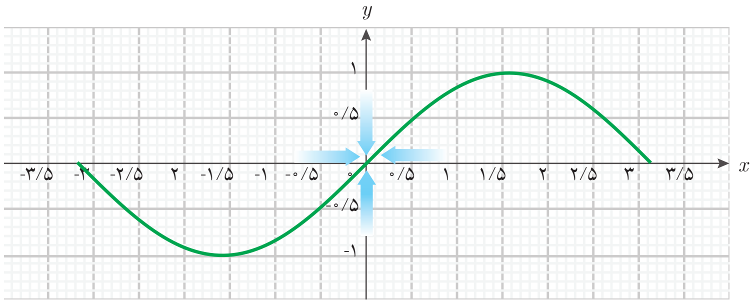
حل کار در کلاس (۲)

۱ تابع: $h(x)=\sin x$

الف) این تابع در همهٔ نقاط نزدیک صفر تعریف شده است، بنابراین حد آن در صفر قابل تعریف است.

ب) جدول تکمیل شده:

x	۰/۱−	۰/۰۱−	۰/۰۰۱−	← ۰ →	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$\sin(x)$	۰/۰۹۹۸−	۰/۰۰۹۹−	۰/۰۰۰۹−	← ? →	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۹۹	۰/۹۹۸



نمودار تابع: با توجه به مقادیر تابع در نزدیکی صفر ملاحظه می‌شود هرچه متغیر x به صفر نزدیک‌تر می‌شود مقدار تابع نیز به عدد صفر نزدیک‌تر می‌شود یعنی حد تابع $\sin x$ در صفر، عدد صفر است.

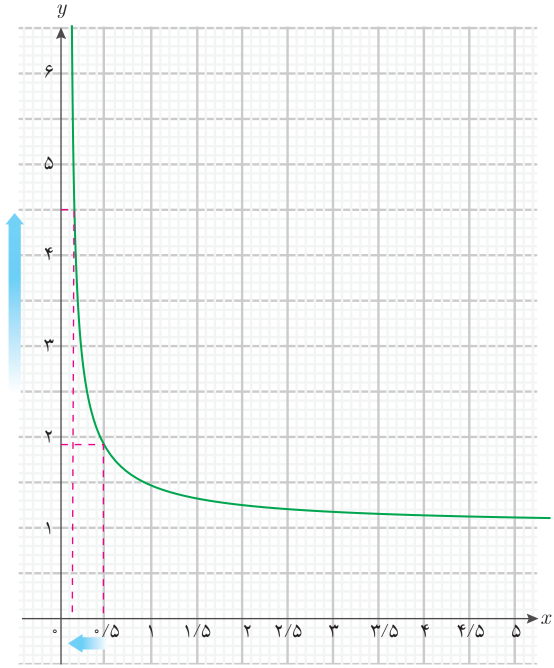
۲ تابع: $g(t)=\dfrac{\sqrt{t^{2}+t}}{t}$ با دامنهٔ (۰ , ۴)

الف) این تابع در همهٔ نقاط بزرگ‌تر از صفر و نزدیک صفر تعریف شده است. بنابراین حد آن در صفر قابل تعریف است.

ب) جدول تکمیل شده:

t	→ ۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$g(t)$	→ ?	۱۰۰/۰۰۴	۳۱/۶۴	۱۰/۰۵	۳/۳۲

نمودار تابع: با توجه به مقادیر تابع در نزدیکی صفر ملاحظه می‌شود هرچه متغیر t به صفر نزدیک‌تر می‌شود مقادیر تابع بزرگ‌تر می‌شود و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند، بنابراین، این تابع در $t=۰$ حد ندارد.



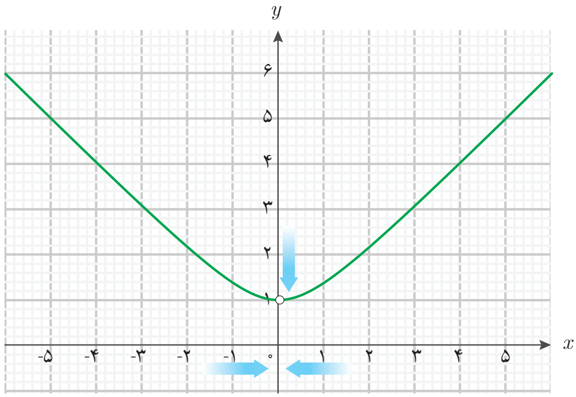
۳ تابع: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۴+x^۶}}{x^۲}$ با دامنهٔ $(-۵\,,\,۵)-\{۰\}$

الف) این تابع در همهٔ نقاط نزدیک صفر تعریف شده است، بنابراین حد آن در صفر قابل تعریف است.

ب) جدول تکمیل شده:

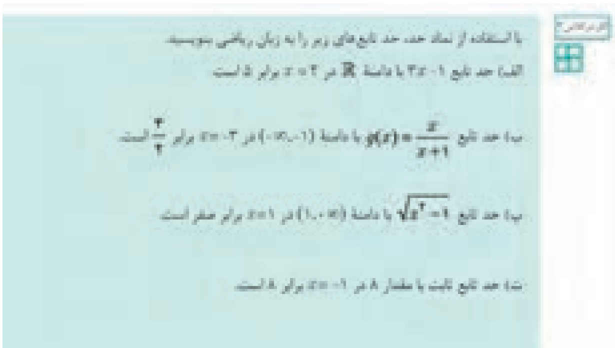
x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow ۰ \leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$f(x)$	۱/۰۰۴	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	$\rightarrow ? \leftarrow$	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۴

نمودار تابع:



با توجه به مقادیر تابع در نزدیکی صفر ملاحظه می‌شود هرچه متغیر x به صفر نزدیک‌تر می‌شود مقدار تابع به عدد ۱ نزدیک‌تر می‌شود، یعنی حد تابع عدد ۱ است.

در این قسمت نماد حد معرفی می‌شود و با مثال‌های متعدد چگونگی به‌کارگیری این نماد توضیح داده می‌شود. در کار درکلاس(۳) این مطالب تمرین می‌شوند.


کار در کلاس ۳

با استفاده از نماد حد، حد تابع‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) حد تابع $۳x-۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $x=۲$ برابر ۵ است.

ب) حد تابع $g(x)=\frac{x}{x+۱}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۱)$ در $x=-۲$ برابر [illegible] است.

پ) حد تابع $\sqrt{x^۲-۱}$ با دامنهٔ $(۱,+\infty)$ در $x=۱$ برابر صفر است.

ت) حد تابع ثابت با مقدار ۸ در $x=-۱$ برابر ۸ است.

توضیح: در این قسمت می‌توان با ارائهٔ حد چند تابع با نماد حد، از هنرجویان خواست آن را با زبان خود بیان کنند.

حل کار در کلاس (۳)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(۳x-۱)=۵$

ب) $\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{2}$

پ) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2-1} = 0$

ت) $\lim_{x\to -1} 8 = 8$

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال ، بازنمایی

الف) حد این تابع در نقاط $x = 2,3,4,5$ قابل تعریف است. چون نمودار تابع نشان می‌دهد که می‌توانیم متغیر x را (در دامنه تابع) روی محور طول‌ها به این نقاط نزدیک کنیم. نقاط $x = 1,6$ از دامنه تابع دور هستند و نمی‌توانیم از دامنهٔ تابع به این نقاط نزدیک شویم. بنابراین حد این تابع در نقاط $x = 1,6$ قابل تعریف نمی‌باشد.

ب) حد تابع در نقاط $x = 2,4,5$ موجود است.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3 \quad , \quad \lim_{x\to 4} f(x) = 3/5 \quad , \quad \lim_{x\to 5} f(x) = 1$$

۲ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی

الف) حد تابع $\sqrt{x}$ وقتی x به صفر میل می‌کند، برابر ۰ است.

ب) حد تابع $\frac{1}{x}$ وقتی x به $\frac{1}{4}$ میل می‌کند ، برابر ۴ است.

پ) حد تابع $\sin x$ وقتی x به $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند، برابر ۱ است.

۳ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

حد تابع f در تمامی نقاط $\mathbb{R}$ قابل تعریف می‌باشد. زیرا از داخل دامنهٔ تابع f به هر عدد حقیقی می‌توان نزدیک شد.

۴ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

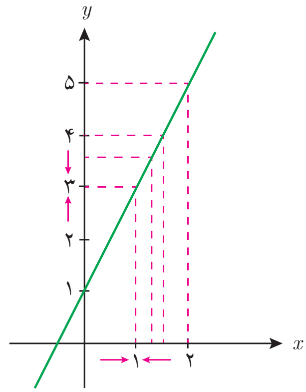
حد این تابع در تمامی نقاط $[2,+\infty)$ قابل تعریف است.

x	۲ ←	۲/۰۰۰۰۱	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$	? ←	۳۱۶	۱۰۰	۳۱/۶	۱۰	۳/۱۶

حد این تابع در $x=۲$ وجود ندارد. چون با نزدیک شدن مقادیر x به ۲، مقادیر $f(x)$ در حال بزرگ شدن هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. بنابراین تابع با قانون $\frac{\sqrt{x-۲}}{x-۲}$ و دامنه $(۲\,,+\infty)$ در $x=۲$ حد ندارد.

۵ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

برای مثال، تابع $f(x)=۲x+۱$ با دامنه $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار، حد تابع f در $x=۱$ برابر ۳ می‌باشد. حد این تابع در هر نقطه دیگری هم وجود دارد.



۶ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

الف) حد این تابع در نقاط $(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$ قابل تعریف می‌باشد.

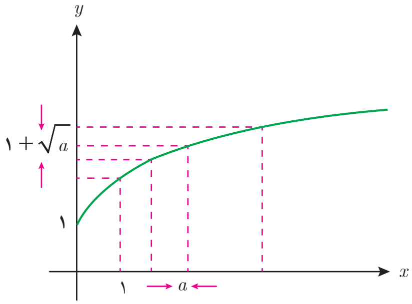
ب) با توجه به نمودار تابع، حد تابع در نقاط $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$ وجود دارد و در نقاط $x=-۲$ و $x=۲$ وجود ندارد.

۷ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

الف)

x	۴/۱	۴/۰۱	۴/۰۰۱	$\rightarrow ۴ \leftarrow$	۳/۹۹۹	۳/۹۹	۳/۹
$g(x)$	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	$\rightarrow ۳ \leftarrow$	۲/۹۹۹	۲/۹۹	۲/۹۷

$\lim\limits_{x\to ۴} g(x)=۳$



ب) با توجه به نمودار می‌توان گفت، با نزدیک شدن x به هر نقطه‌ای مانند a، در بازهٔ $[0, +\infty)$ مقادیر $g(x)$ نیز به $1+\sqrt{a}$ نزدیک می‌شود.

پ) حد این تابع در نقاط خارج از بازه $[0 , +\infty)$ قابل تعریف نمی‌باشد.

۸ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

حد تابع h در $x=2$ قابل تعریف است و با توجه به شکل و جدول زیر می‌توان گفت:

$$\lim_{x\to 2} h(x) = -1$$

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\to$ ۲
$h(x)$	۰/۹-	۰/۹۹-	۰/۹۹۹-	$\to$ ۱-