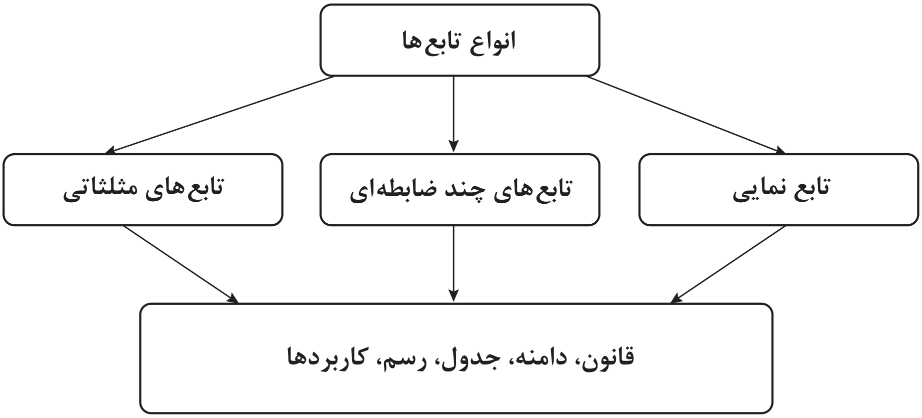
فصل اول

کاربرد برخی تابع‌ها در زندگی روزمره

نقشه مفهومی فصل اوّل



اهداف کلی پودمان

۱ درک تابع چند ضابطه‌ای
۲ محاسبه مقدارهای تابع چندضابطه‌ای در نقاط داده شده از دامنهٔ آن
۳ رسم تابع‌های چندضابطه‌ای ساده (معادله‌های خط و درجهٔ دوم)
۴ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های چندضابطه‌ای
۵ درک رفتار تناوبی تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$
۶ رسم تابع‌های مثلثاتی به کمک انتقال نمودار تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ دربارهٔ $[۰,۲\pi]$
۷ محاسبهٔ مقدار تابع‌های مثلثاتی در نقاط دامنه
۸ برحسب رادیان بودن متغیر تابع‌های مثلثاتی
۹ برقراری ارتباط بین حرکت روی دایره و نمودار تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$
۱۰ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های مثلثاتی
۱۱ درک تابع‌های نمایی
۱۲ تشخیص رفتار صعودی یا نزولی تابع‌های نمایی
۱۳ محاسبه مقدار تابع نمایی
۱۴ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های نمایی

پیش‌نیازها

- آشنایی با مختصات نقطه و نمایش آن در صفحه مختصات
- آشنایی با مفهوم رابطه بین کمیت‌ها
- آشنایی با مفهوم تابع
- آشنایی با مفهوم متغیر در یک تابع
- آشنایی با قانون و دامنه یک تابع
- آشنایی با بازنمایی‌های مختلف تابع (به ویژه بازنمایی جدولی و نموداری)
- توانایی محاسبه مقدار تابع در یک نقطه از دامنه آن، با استفاده از قانون تابع و نمودار آن
- آشنایی با نمایش بازه‌ای زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی
- مهارت رسم نمودار با نقطه‌یابی
- مهارت رسم نمودار توابع در دامنه‌های مختلف
- آشنایی با زاویه چرخش
- آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه
- آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری زاویه، به ویژه رادیان
- آشنایی با شیب خط
- توانایی به‌دست آوردن شیب یک خط به کمک نسبت‌های مثلثاتی آن
- آشنایی با اعداد توان‌دار

بخش اول: تابع‌های چندضابطه‌ای

اهداف بخش

۱ درک تابع چند ضابطه‌ای
۲ محاسبه مقدارهای تابع چندضابطه‌ای در نقاط داده شده از دامنهٔ آن
۳ رسم تابع‌های چندضابطه‌ای ساده (معادله‌های خط و درجهٔ دوم)
۴ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های چندضابطه‌ای

واژه‌های کلیدی: قانون تابع، دامنه تابع، تعریف تابع

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آموزش تابع‌های چندضابطه‌ای است. نکته اصلی در تابع‌های چندضابطه‌ای وجود قانون‌های متعدد برای محاسبه مقدار تابع در نقاط مختلف از دامنه تابع است. همین نکته که قانون واحدی برای محاسبه مقدار تابع وجود ندارد در شروع اینِ بخش به‌صورت یک پرسش از طرف یکی از هنرجویان مطرح شده است. احتمالاً هنرجویان ممکن است تغییر قانون تابع را به عنوان روشی برای تعریف قابل قبول یک تابع نپذیرند و در این مورد سؤالاتی در ذهن آنها ایجاد شود. روش عمومی‌آموزش در این کتاب، طرح سؤال و ایجاد انگیزه و سعی در پاسخگویی به سؤال و نهایتاً رسیدن به آموزش مطلب مورد نظر است. پس از طرح این سؤال فعالیتی مطرح می‌شود که انجام آن موجب ساخته شدن یک تابع چندضابطه‌ای در یک زمینه طبیعی می‌شود. با این روش قابل قبول بودن تابع‌های چندضابطه‌ای توجیه می‌شود و با مثال‌ها و کاردرکلاس‌ها روی این مفهوم تمرین می‌شود.

ورود به مطلب

به شکل‌های متفاوتی می‌توان وارد مفهوم تابع‌های چندضابطه‌ای شد. بهترین حالت، طرح مسئله‌ای است که حل آن نیازمند استفاده از تابع‌های چندضابطه‌ای باشد. به هنگام حل این مسئله، هنرجو خودش این مفهوم را برای خودش می‌سازد و شما آن را نامگذاری می‌کنید.
راه مستقیم‌تر آن است که در یک دامنهٔ خاص در دو قسمت از آن دو خط متفاوت رسم کنید که نمودار یک تابع باشد و از هنرجویان پرسش کنید آیا این، نمودار یک تابع است؟ قانون این تابع چیست؟

راه دیگر طرح پرسش نسبت به قانون یک تابع است. آیا یک تابع می‌تواند چند قانون متفاوت داشته باشد؟ جواب طبیعی به این سؤال منفی است. ولی شما پرسش را اصلاح کنید و تفاوت قانون را در ناحیه‌های مختلف مطرح کنید. با ادامه روند این پرسش و پاسخ‌ها و هدایت هنرجویان به جواب‌های صحیح و رفع بدفهمی‌های احتمالی نسبت به مفهوم تابع، شما خواهید توانست این مفهوم را آموزش دهید.

فعالیت آموزشی

این بخش با طرح سؤال از طرف یکی از هنرجویان آغاز می‌شود که به دلیل نبود قانون ثابت برای محاسبه هزینه گاز، درباره تابع بودن هزینه گاز نسبت به گاز مصرفی دچار مشکل شده است. نهایتاً معلم راهنمایی می‌کند که در تعریف تابع وجود قانون ثابت مورد نظر نیست و انجام فعالیت(۱) خواسته شده است.

حل فعالیت (۱)

۱ $D_f=[0\ ,\ 500]$

۲ جدول تکمیل شده:

مصرف برق در ماه	۰	۵	۱۰	۷۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰
هزینهٔ برق مصرفی(تومان)	۰	۰	۰	۳۵۰۰	۱۲۰۰۰۰	۲۴۰۰۰	۶۰۰۰۰

۳ الف) برای $0\leq x<10$ ضابطه: $f(x)=0$.

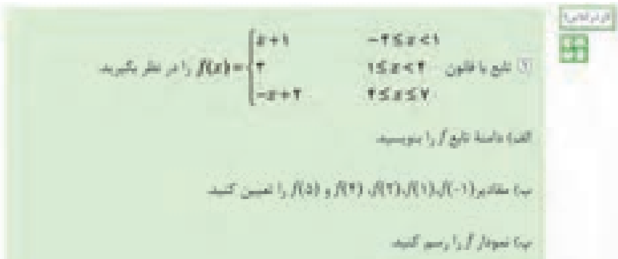
ب) برای $10\leq x<100$ ضابطه: $f(x)=50x$.

پ) برای $100\leq x\leq 500$ ضابطه: $f(x)=120x$.

۴ $f(37)$ هزینهٔ مصرف ۳۷ کیلووات برق می‌باشد و $f(37)=50\times 37=1850$.

$f(120)$ هزینهٔ مصرف ۱۲۰ کیلووات برق می‌باشد و $f(120)=120\times 120=14400$.

پس از این فعالیت و جمع‌بندی آن، مفهوم تابع چندضابطه‌ای ارائه می‌شود و در مثال‌هایی این مفهوم توضیح داده می‌شود. سپس به کاردرکلاس(۱) می‌رسیم.

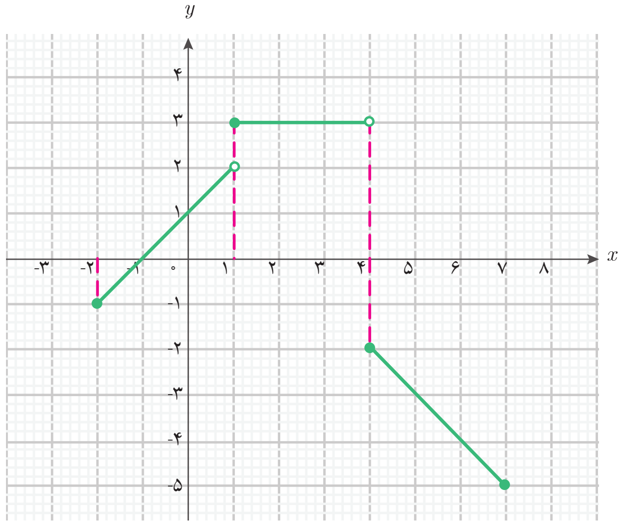


حل کار در کلاس (۱)

۱ الف) دامنه $D_f=[-۲,۷]$

ب) $f(-۱)=۰$ ، $f(۱)=۳$ ، $f(۲)=۳$ ، $f(۴)=-۲$ ، $f(۵)=-۳$

پ) نمودار تابع:



۲ دامنه $D_f=[۰,۱۰۰]$

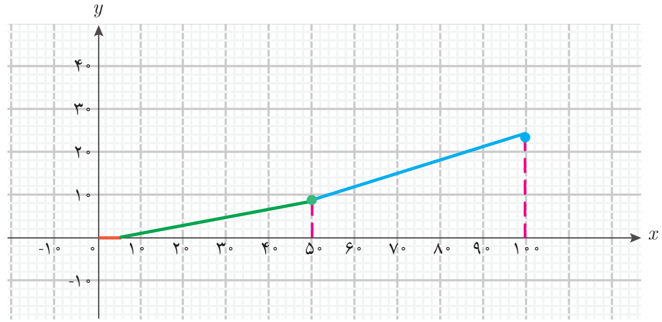
ضابطه :

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<۵ \\ ۲۰۰(x-۵) & ۵\le x\le ۵۰ \\ ۹۰۰۰+۳۰۰(x-۵۰) & ۵۰<x\le ۱۰۰ \end{cases}$$

که ساده شدهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<۵ \\ ۲۰۰x-۱۰۰۰ & ۵\le x<۵۰ \\ ۳۰۰x-۶۰۰۰ & ۵۰\le x\le ۱۰۰ \end{cases}$$

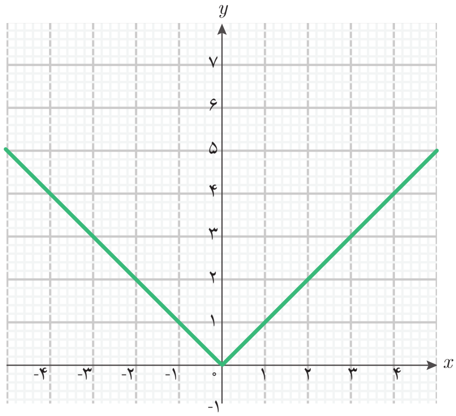
برای رسم بهتر نمودار این تابع بهتر است $\frac{f(x)}{۱۰۰۰}$ را رسم کنیم. نمودار $\frac{f(x)}{۱۰۰۰}$ به شکل صفحه بعد است.



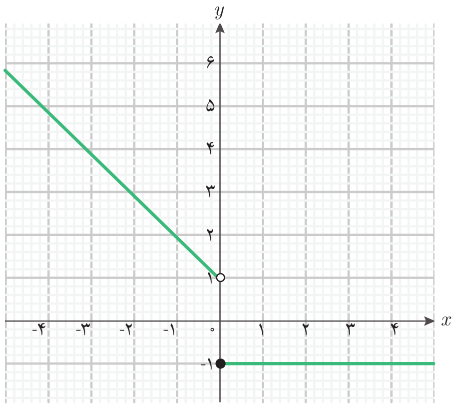
حل مسائل

۱ مهارت‌ها و فرایندها : استدلال، بازنمایی

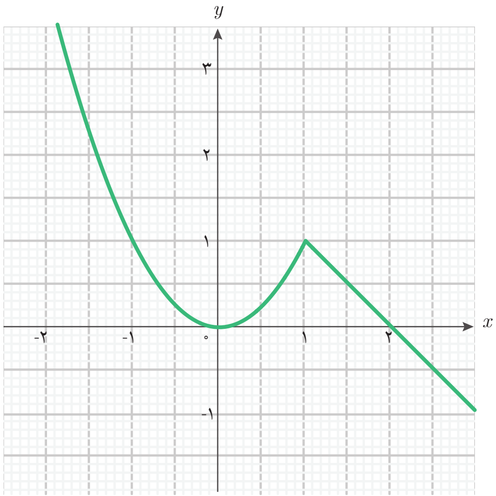
$$f(x)=\begin{cases}-x & x<۰\\ x & ۰\leq x\end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases}-x+۱ & x<۰\\ -۱ & ۰\leq x\end{cases}$$



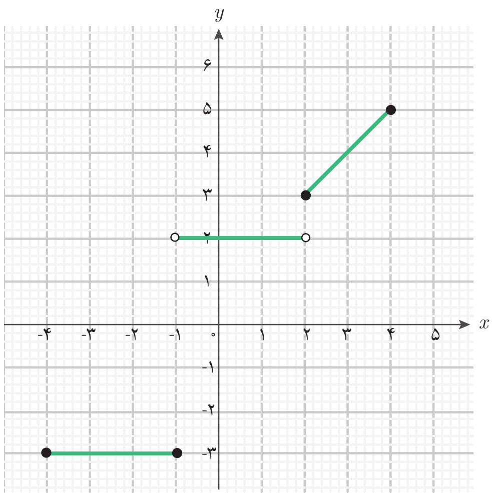
$$k(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۱ \\ -x+۲ & ۱\le x \end{cases}$$



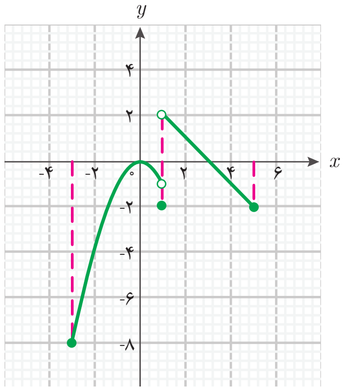
۲ مهارت‌ها و فرایندها : بازنمایی، استدلال

با توجه به نمودار داده شده، در بازه [۱-,۴-] قانون تابع به‌صورت $f(x)=-۳$ (تابع ثابت) است. در بازه (۱,۲-) قانون تابع به‌صورت $f(x)=۲$ (تابع ثابت) می‌باشد. در بازه [۲,۴]، قانون تابع به‌صورت $f(x)=x+۱$ می‌باشد. برای پیدا کردن قانون تابع خطی کافیست از روی نمودار، شیب خط مشخص شود و با امتداد دادن خط محل برخورد آن با محور عرض‌ها مشخص شود.

$$f(x)=\begin{cases} -۳ & -۴\le x\le -۱ \\ ۲ & ۱<x<۲ \\ x+۱ & ۲\le x\le ۴ \end{cases}$$



۳ مهارت‌ها و فرایندها : بازنمایی‌ها، استدلال



الف) دامنه تابع g، $[-۳, ۵]$ می‌باشد.

ب) با توجه به اینکه -۲ در بازه $[-۳, ۱)$ است، و در این بازه، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-x^۲$ است داریم:

$g(-۲)=-(-۲)^۲=-۴$

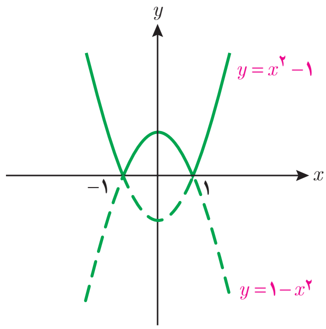
برای محاسبه مقدار تابع در $x=۱$، در این نقطه، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-۲$ است. پس $g(۱)=-۲$.

چون ۳ در بازه $(۱, ۵]$ قرار دارد، و قانون تابع روی این بازه به‌صورت $g(x)=-x+۳$ است، نتیجه می‌شود:

$g(۳)=-(۳)+۳=۰$

پ) در بازه $[-۳, ۱)$، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-x^۲$ است و نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. در $x=۱$، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-۲$ و نمودار آن، نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ است. در بازه $(۱, ۵]$، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-x+۳$ است و نمودار آن قسمتی از خط است که آن را در این بازه رسم می‌کنیم.

۴ مهارت‌ها و فرایندها : استدلال، بازنمایی



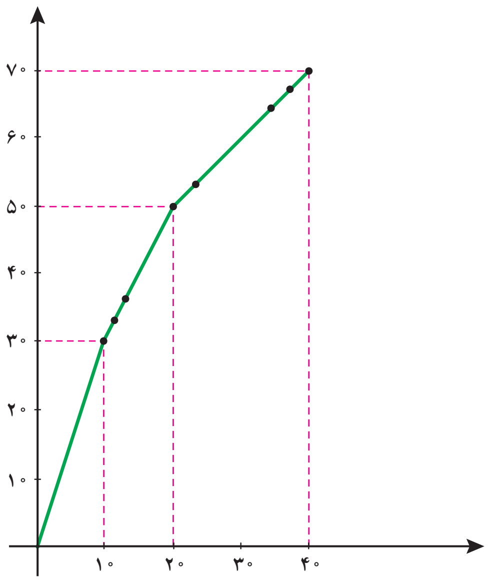
در بازه $(-\infty,-۱]$ قانون تابع به‌صورت $f(x)=x^۲-۱$ است، نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. (برای این منظور می‌توان نمودار تابع $y=x^۲$ را یک واحد به پایین منتقل کرده و سپس بخشی از نمودار که در بازهٔ $(-\infty,-۱]$ است را در نظر گرفت. مانند بالا در بازه $(-۱,۱)$ قانون تابع به‌صورت $f(x)=۱-x^۲$ است، نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. برای این منظور می‌توان نمودار تابع $f(x)=-x^۲$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم و سپس بخشی از نمودار را که در بازهٔ $(-۱,۱)$ قرار دارد را در نظر گرفت. در بازهٔ $[۱,+\infty)$ قانون تابع به‌صورت $f(x)=x^۲-۱$ که برای قسمت اول آن را رسم کرده‌ایم، حال بخشی از آن را انتخاب می‌کنیم که در بازه $[۱,+\infty)$ قرار داشته باشد.

۵ مهارت‌ها و فرایندها : حل مسئله، پیوندها و اتصالات، استدلال

اگر x تعداد کارت‌های خریداری شده و $f(x)$ هزینه پرداخت شده بر حسب هزارتومان باشد؛ با توجه به جدول داده شده داریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۳x & ۰\leq x\leq ۱۰ \\ ۳۰+۲(x-۱۰) & ۱۱\leq x\leq ۲۰ \\ ۵۰+(x-۲۰) & ۲۱\leq x\leq ۴۰ \end{cases}$$

دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,...,۴۰\}$ است. اگر دامنهٔ این تابع را به‌صورت بازهٔ $[۰,۴۰]$ در نظر بگیریم، نمودار آن به شکل زیر است. البته، دامنهٔ این تابع مجموعه‌ای گسسته است و نمودار واقعی آن به‌صورت تعدادی نقطهٔ گسسته از نمودار زیر است که برخی نقاط آن در شکل زیر مشخص شده است.



۶ مهارت‌ها و فرایندها : حل مسئله، پیوند و اتصالات

با توجه به اینکه t زمان سپری شده پس از تزریق انسولین بر حسب ساعت می‌باشد و با توجه به اینکه زمان تزریق ساعت ۷ صبح بوده است، داریم :

الف) در ساعت ۸ صبح، یک ساعت از زمان تزریق گذشته است و در نتیجه $t=۱$. با توجه به قانون تابع می‌توان گفت:

$f(۱)=۴۰\times۱+۱۰۰=۱۴۰$ به عبارت دیگر سطح انسولین پس از یک ساعت از تزریق ۱۴۰ می‌باشد.

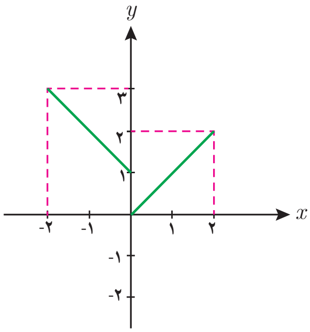
ب) در ساعت ۱۱ صبح، سه ساعت از زمان تزریق گذشته است، بنابراین t=۴ و باید طبق ضابطهٔ دوم تابع عمل کنیم و داریم : f(۴) =۲۲۰

پ) در ساعت ۴ بعد از ظهر، نه ساعت از زمان تزریق گذشته است، بنابراین t=۹ و باید طبق ضابطهٔ سوم تابع عمل کنیم و داریم : f(۹)=-۸۰×۹+۸۶۰=۱۴۰

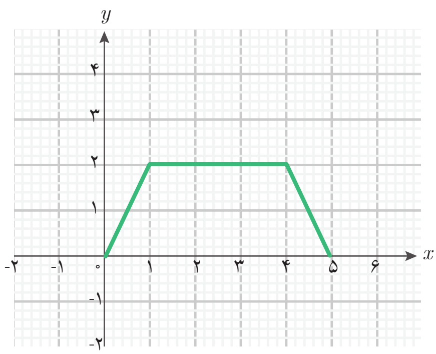
ت) در ساعت ۶ بعد از ظهر، یازده ساعت از زمان تزریق گذشته است، بنابراین t=۱۱ و باید طبق ضابطهٔ چهارم تابع عمل کنیم و داریم: f(۱۱)=۶۰

۷ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری

توابع بسیاری را می‌توان مثال زد که به‌طور نمونه در زیر یک مورد آمده است :



۸ مهارت‌ها و فرایندها : حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن



وضعیت‌های مختلفی از زندگی روزمره را می‌توان مثال زد. به‌طور نمونه می‌توان گفت:

اگر محور xها زمان سپری شده بر حسب ساعت و محور yها فاصله هنرجو (برحسب کیلومتر) تا منزل یکی از دوستان او باشد، می‌توان گفت: هنرجویی صبح از منزل خارج می‌شود تا به منزل دوست خود برود. پس از یک ساعت که به‌طور یکنواخت راه رفته است با طی ۲ ساعت به خانه دوست خود می‌رسد. ۳ ساعت در منزل دوست خود می‌ماند و سپس به خانه باز می‌گردد و پس از یک ساعت به منزل می‌رسد.

۹ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری

مطابق با آخرین مصوبه وزیر نیرو، تعرفه‌های برق و شرایط عمومی‌آنها برای کلیه مشترکین تحت پوشش شرکت‌های برق منطقه‌ای و توزیع نیروی برق برای اجرا از تاریخ ۹۵/۵/۱ به شرح زیر است :

۱ـ۱ـ تعرفه مناطق عادی و ماه‌های غیرگرم مناطق گرمسیر

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰	۴۵۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۳۵
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۰۳۵
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۳۳۴۵
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۳۹۳۶
مازاد بر ۶۰۰	۴۴۴۶

۱ـ ۲ـ تعرفه ماه‌های گرم در مناطق گرمسیر ۱

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰۰	۱۵۰
مازاد بر ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰	۱۶۶
مازاد بر ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰	۱۸۰
مازاد بر ۲۰۰۰ تا ۳۵۰۰	۷۵۰
مازاد بر ۳۵۰۰ تا ۴۵۰۰	۱۳۵۱
مازاد بر ۴۵۰۰ تا ۶۰۰۰	۱۷۳۶
مازاد بر ۶۰۰۰	۲۰۲۵

تعرفه شماره ۱ : مصارف خانگی

۱ـ۳ـ تعرفه ماه‌های گرم در مناطق گرمسیر ۲

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰۰	۳۳۰
مازاد بر ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰	۷۵۰
مازاد بر ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰	۱۲۷۵
مازاد بر ۲۰۰۰ تا ۳۵۰۰	۱۵۷۵
مازاد بر ۳۵۰۰ تا ۴۵۰۰	۱۸۷۶
مازاد بر ۴۵۰۰ تا ۶۰۰۰	۲۰۲۵
مازاد بر ۶۰۰۰	۲۱۷۶

۱ـ۴ـ تعرفه ماه‌های گرم در مناطق گرمسیر ۳

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰۰	۹۷۵
مازاد بر ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰	۹۷۶
مازاد بر ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰	۱۷۳۶
مازاد بر ۲۰۰۰ تا ۳۵۰۰	۱۸۳۶
مازاد بر ۳۵۰۰ تا ۴۵۰۰	۲۰۲۵
مازاد بر ۴۵۰۰ تا ۶۰۰۰	۲۱۷۶
مازاد بر ۶۰۰۰	۲۳۳۵

۱ـ۵ـ تعرفه ماه‌های گرم در مناطق گرمسیر ۴

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰	۳۶۱
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۴۲۱
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۷۵۰
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۱۲۰۰
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۱۷۲۶
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۲۲۵۱
مازاد بر ۶۰۰	۲۷۰۱

حداکثر بهای پرداختی بدون احتساب اضافه پرداختی و تخفیف بند ۱ـ۱ شرایط اختصاصی به ازای هر کیلووات ساعت به‌طور متوسط در مناطق عادی و ماه‌های غیر گرم مناطق گرمسیر ۱۶۵۰ ریال و در ماه‌های گرم مناطق گرمسیر ۱۶۵۰ ریال می‌باشد.

شرایط اختصاصی مربوط به مصارف خانگی

۱ـ۱ـ به‌منظور تشویق مشترکین برای جابه‌جایی مصرف از ساعات اوج بار، پس از محاسبه بهای برق مصرفی براساس جداول فوق، اضافه پرداختی مصارف اوج بار و تخفیف مصارف غیر اوج بار برای آن دسته از مشترکینی که دارای لوازم اندازه‌گیری چند زمانه می‌باشند به شکل زیر محاسبه می‌شود :

کل مصرف اوج بار در دوره × ۴۵۰ ریال = اضافه پرداختی مصارف اوج بار

تخفیف مصارف غیر اوج بار =

(برای مشترکینی که دارای لوازم اندازه‌گیری سه‌زمانه می‌باشند)کل مصرف کم‌باری در دوره× ۳۳۵ ریال

(برای مشترکینی که دارای لوازم اندازه‌گیری دوزمانه می‌باشند) کل مصرف غیر اوج بار در دوره ×۹۰ ریال

تبصره : ارقام فوق برای ماه‌های گرم مناطق گرمسیر ۱ با ضریب یک سوم و مناطق گرمسیر ۲ و ۳ و ۴ با ضریب دو سوم محاسبه می‌شود.

۱ـ۲ـ بهای برق مشترکین جانباز ۲۵ درصد و بیشتر در مناطق عادی و گرمسیر به ترتیب با کسر ۸۰ و ۱۰۰ کیلو وات ساعت از متوسط مصرف ماهانه انرژی برق آنها محاسبه می‌گردد.
۱ـ۳ـ به تشخیص هیئت مدیره شرکت می‌توان برای خانوارهایی که در یک واحد مسکونی زندگی می‌کنند کد خانوار به شرح زیر در نظر گرفت :

$$\frac{\text{مصرف ماهانه قرائت شده}}{\text{کد خانوار}} = \text{متوسط مصرف ماهانه مبنای صدور صورت‌حساب برای هر یک از خانوارها}$$

تعداد خانوار ساکن در یک واحد مسکونی = کد خانوار (حداکثر برابر ۵)

۱ـ۴ـ بهای برق ماهانه با فروش برای مصارف روستایی براساس جدول تعرفه‌های خانگی بر حسب مورد، محاسبه و دریافت می‌گردد. مصرف هر مشترک به شرح زیر تعیین می‌شود :
تعداد مشترک در کل مصرف ماهانه کنتور اشتراکی = متوسط مصرف مشترک
تبصره ۱: به منظور تأمین هزینه‌های اداری برق روستا شرکت به ازای هر مشترک مبلغ ۲۲۲۰ ریال از مبلغ صورت‌حساب کسر می‌نماید.
تبصره ۲ : شورای اسلامی روستا (نگهدارنده شبکه برق) مکلف است بهای برق تحویلی به مشترکین را بر حسب مورد براساس تعرفه‌های مربوطه (۱، ۲، ۳، ۴، ۵) محاسبه و از مصرف‌کنندگان دریافت نماید.
۱ـ۵ـ دوره زمانی و محدوده تحت پوشش مناطق گرمسیر ۳، ۲، ۱ و ۴ طبق جدول صفحه بعد تعیین می‌شود :

منطقه	محدوده تحت پوشش	مدت (ماه)	دوره زمانی
گرمسیر (۲)	کلیه شهرستان‌های استان خوزستان، بوشهر و هرمزگان و شهرستان‌های چابهار و کارک و شهرستان دهلران	۹	اول فروردین تا پایان آذر
	شهرستان‌های دوگنبدان و لیکک	۷	شانزدهم فروردین تا پانزدهم آبان
	شهرستان‌های لامرد، مهره جیرفت، کهنوج، قلعه گنج، عنبرآباد، رودبار جنوب، قوچان و بخش لاریاب	۷	اول فروردین تا پایان مهر
	شهرستان‌های مهران، نورشهر، آبادان و شهرستان‌های نیک شهر	۶	اول اردیبهشت تا پایان مهر
	شهرستان لارستان، عنج و گولش	۵	اول خرداد تا پایان مهر
	شهرستان‌های ایرانشهر و سریار، کارزین و فراشبند	۴	اول خرداد تا پایان مرداد
	شهرستان گنبد	۳	اول تیر تا پایان شهریور
	شهرستان‌های کازرون، خشت و کمارج، جهرم، داراب و زرین دشت	۲	مرداد و شهریور
	شهرستان‌های ماهدشت، چرام، ارزون، شاهمران، بم، فهرج، زابل، رهک، هیرمند و نیمروز	۶	اول اردیبهشت تا پایان مهر
	شهرستان ایذه	۳	اردیبهشت، خرداد و مهر
	شهرستان‌های ایرانشهر، شیراز، قیر، کارزین و فراشبند	۳	اردیبهشت، شهریور و مهر
	شهرستان‌های کازرون، خشت و کمارج، جهرم، داراب و زرین دشت	۲	خرداد و تیر
	شهرستان لارستان، خنج و گرنی	۱	اردیبهشت
گرمسیر (۳)	شهرستان‌های گیلانغرب، سرپل‌ذهاب، قصر شیرین، روستاهای سرقلعه و جمگران	۳	اول اردیبهشت تا پایان مهر
	استان قم	۴	اول خرداد تا پایان شهریور
	شهرستان‌های گنبد، کلاله، مینو دشت و آق قلا	۳/۵	اول خرداد تا ۱۵ شهریور
	شهرستان طبس	۳	اول خرداد تا پایان مرداد
	شهرستان پل دختر	۳	اول تیر تا پایان شهریور
	شهرستان ممسنی و نورباف	۲	تیر و مرداد

گرمسیر (۴)	شهرستان و سلم	۶	اول خرداد تا پایان شهریور
	کلیه شهرستان‌های استان گلستان به استثنای شهرستان‌های (گنبد، کلاله، مینودشت و آق قلا)	۳/۵	اول خرداد تا ۱۵ شهریور
	شهرستان‌های حصرآباد، پارس آباد، اسلاندوز و پله‌سوار و ارگه	۳	اول تیر تا پایان شهریور
	شهرستان‌های بافق و میرجاوه	۳	اول خرداد تا پایان مرداد
	کلیه شهرهای استان گیلان به استثناء (ماسوله، دیلمان و جیرنده)، کلیه شهرستان‌های استان مازندران به استثناء (بلده، رینه، مجوره، محمودآباد، کیاسر، مرزن آباد، کلاردشت و آلاشت)	۳	۱۵ خرداد تا ۱۵ شهریور
	شهرستان‌های گرمسار، کاشان، آران و بیدگل، خور و بیابانک، ساوه و زرند، یزد، شلگر، میبد، اردکان، فسا و سیروان	۲	اول تیر تا پایان مرداد
	شهرستان طبس	۲	اردیبهشت و شهریور
	شهرستان ممسنی (نورآباد)	۲	خرداد و شهریور

۱ـ۶ـ در مناطق گرمسیر؛ در صورت‌حساب‌هایی که دورهٔ مصرف آنها شامل ایام گرم و غیرگرم می‌باشد، انرژی مصرفی براساس نسبت ضرایب جدول زیر محاسبه می‌شود.

منطقه گرمسیر	ضریب ایام گرم	ضریب ایام غیر گرم
منطقه گرمسیر یک	۴	۱
منطقه گرمسیر دو	۳	۱
منطقه گرمسیر سه	۲	۱
منطقه گرمسیر چهار	۱/۳	۱

با توجه به جداول داده شده می‌توان تابع چند ضابطه‌ای هزینه مصرف برق برحسب میزان مصرف برق در ماه را در هر منطقه از کشور نوشت.

بخش دوم: تابع‌های مثلثاتی

اهداف بخش

۱ درک رفتار تناوبی تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$
۲ رسم تابع‌های مثلثاتی به کمک انتقال نمودار تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$
۳ محاسبهٔ مقدار تابع‌های مثلثاتی در نقاط دامنه
۴ برحسب رادیان بودن متغیر تابع‌های مثلثاتی
۵ برقراری ارتباط بین حرکت روی دایره و نمودار تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$
۶ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های مثلثاتی

واژه‌های کلیدی: مختصات نقطه، زاویه چرخش، نسبت مثلثاتی

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، آشنایی با تابع‌های مثلثاتی است. در این بخش برای رسیدن به تابع‌های مثلثاتی، مانند سال قبل، از زمینه حرکت چرخ‌وفلک استفاده شده است. در اینجا، رابطهٔ دو کمیت زاویهٔ چرخش یک کابین و ارتفاع کابین از سطح زمین مورد پرسش قرار می‌گیرد و در یک فعالیت به این پرسش پاسخ داده می‌شود. نتیجه این فعالیت یافتن یک تابع مثلثاتی است و در ادامه، تابع‌های مثلثاتی اساسی $\sin x$ و $\cos x$ با جزئیات بیشتر از لحاظ نموداری و رفتارهای صعودی و نزولی، مورد بررسی قرار می‌گیرند. همچنین، ارتباط بین نمودار این تابع‌های اساسی و حرکت روی محیط یک دایره توضیح داده می‌شود.

ورود به مطلب

بهترین شروع تابع‌های مثلثاتی، ارائه یک زمینه مناسب است که در آن دو کمیت مرتبط حضور داشته باشند که در قانون تابع توصیف‌کننده این رابطه، نسبت‌های مثلثاتی به‌کار رفته باشد. در کتاب از زمینه حرکت چرخ‌وفلک و کمیت‌های زاویهٔ چرخش و ارتفاع از سطح زمین استفاده شده است. پس از یافتن تابع مثلثاتی توصیف نموداری تابع و تغییرات مقادیر تابع و هم‌زمان تفسیر معنای آن در زمینه ارائه شده می‌تواند آموزش مناسبی از تابع‌های مثلثاتی باشد.

فعالیت آموزشی

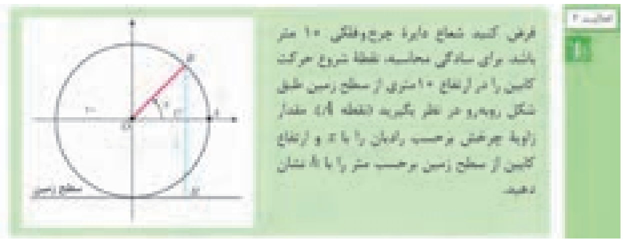
در ابتدای این بخش، سؤالی توسط یک هنرجو مطرح می‌شود که پاسخ آن در فعالیت(۲) به‌دست می‌آید.

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم تابع مثلثاتی.

فرایندها:

- مدل‌سازی.
- پیوندها و اتصالات (ریاضی و خارج ریاضی).



فرض کنید شعاع دایرهٔ چرخ‌وفلکی ۱۰ متر باشد. برای سادگی محاسبه، نقطهٔ شروع حرکت کابین را در ارتفاع ۱۰ متری از سطح زمین طبق شکل روبه‌رو در نظر بگیرید (نقطهٔ A). مقدار زاویهٔ چرخش برحسب رادیان را با x و ارتفاع کابین از سطح زمین برحسب متر را با h نشان دهید.

حل فعالیت (۲)

۱ در نقطهٔ ابتدای حرکت که زاویهٔ چرخش صفر است، ارتفاع ۱۰ متر است.

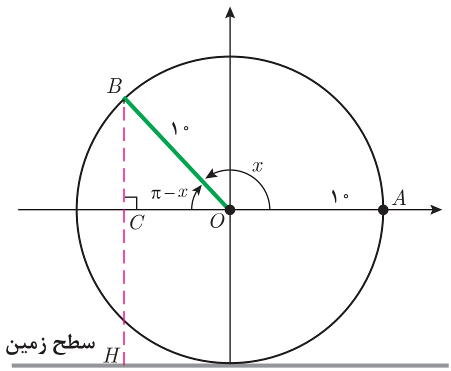
۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCB با استفاده از تعریف سینوس زاویه‌های تند داریم:

$BC = ۱۰\sin x$

۳ $h=BC+CH=۱۰\sin x+۱۰$

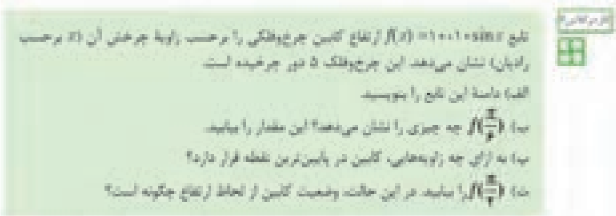
۴ در این حالت داریم:

$h=BH=BC+CH=۱۰\sin(\pi-x)+۱۰=۱۰+۱۰\sin x$



پس از این فعالیت نمونه‌ای از تابع‌های مثلثاتی ساخته شده است. دامنهٔ این تابع‌ها بستگی به موقعیت و وضعیتی دارد که این تابع‌ها برای توصیف آنها ساخته می‌شوند. بنابراین، در مورد هر تابع مثلثاتی باید جداگانه دامنهٔ آنها را مورد بررسی قرار داد. نکتهٔ مهم در تابع‌های مثلثاتی آن است که طبق قرارداد، متغیر آنها زاویه‌ای بر حسب رادیان است.

پس از ذکر مثال‌هایی به عنوان تمرین و تثبیت یادگیری، کار درکلاس(۲) مطرح می‌شود.


تابع $f(x)=10+10\sin x$ ارتفاع کابین چرخ‌وفلکی را برحسب زاویهٔ چرخش آن (x برحسب رادیان) نشان می‌دهد. این چرخ‌وفلک ۵ دور چرخیده است.

الف) دامنهٔ این تابع را بنویسید.

ب) $f(\frac{\pi}{6})$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ این مقدار را بیابید.

پ) به ازای چه زاویه‌هایی، کابین در پایین‌ترین نقطه قرار دارد؟

ت) $f(\frac{\pi}{2})$ را بیابید. در این حالت وضعیت کابین از لحاظ ارتفاع چگونه است؟

حل کاردرکلاس (۲)

الف) از آنجا که چرخ‌وفلک ۵ دور چرخیده است و به ازای هر دور، زاویه چرخش 2π رادیان بیشتر می‌شود، دامنهٔ این تابع عبارت است از: $D=[0,10\pi)$

ب) $f(\frac{\pi}{6})$ ارتفاع کابین در زاویهٔ چرخش $\frac{\pi}{6}$ را نشان می‌دهد. $f(\frac{\pi}{6})=15$.

پ) در زاویه‌های $\frac{3\pi}{2}, 2\pi+\frac{3\pi}{2}, 4\pi+\frac{3\pi}{2}, 6\pi+\frac{3\pi}{2}, 8\pi+\frac{3\pi}{2}$ کابین در سطح زمین قرار می‌گیرد و ارتفاع صفر است.

ت) $f(\frac{\pi}{6})=20$ ، در این حالت، کابین در بالاترین ارتفاع قرار دارد.

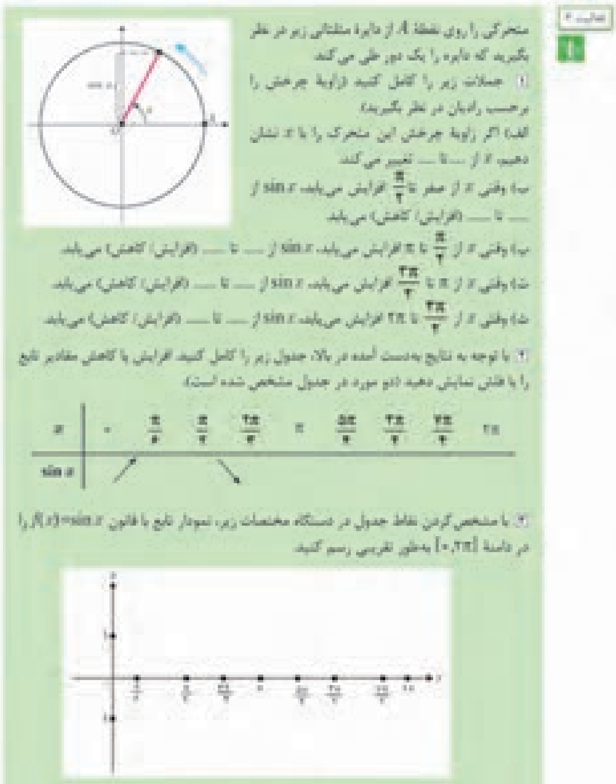
در ادامه تابع مهم $\sin x$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا در فعالیت (۳) رفتار این تابع بررسی می‌شود.

اهداف موضوعی:

- شناخت رفتار (صعودی/ نزولی) تابع $\sin x$.
- آشنایی با جدول تغییرات تابع $\sin x$.
- کسب مهارت رسم نمودار تقریبی تابع $\sin x$ از طریق نقطه‌یابی.

فرایندها:

- پیوندها و اتصالات (ریاضی و خارج ریاضی).
- بازنمایی‌ها.



فعالیت ۳

۱

متحرکی را روی نقطهٔ A از دایرهٔ مثلثاتی زیر در نظر بگیرید که دایره را یک دور طی می‌کند.

۱) جملات زیر را کامل کنید (زاویهٔ چرخش را برحسب رادیان در نظر بگیرید).

الف) اگر زاویهٔ چرخش این متحرک را با x نشان دهیم، x از ... تا ... تغییر می‌کند.

ب) وقتی x از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد، $\sin x$ از ... تا ... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

پ) وقتی x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π افزایش می‌یابد، $\sin x$ از ... تا ... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

ت) وقتی x از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد، $\sin x$ از ... تا ... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

ث) وقتی x از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π افزایش می‌یابد، $\sin x$ از ... تا ... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

۲) با توجه به نتایج به‌دست آمده در بالا، جدول زیر را کامل کنید. افزایش یا کاهش مقادیر تابع را با فلش نمایش دهید (دو مورد در جدول مشخص شده است).

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π
$\sin x$	↗		↘						

۳) با مشخص کردن نقاط جدول در دستگاه مختصات زیر، نمودار تابع با قانون $f(x)=\sin x$ را در دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌طور تقریبی رسم کنید.

۱

الف) از آنجا که متحرک فقط یک دور دایره را طی می‌کند، x از صفر تا ۲π تغییر می‌کند.

ب) وقتی x از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد $\sin x$ از صفر تا ۱، افزایش می‌یابد.

پ) وقتی x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π افزایش می‌یابد $\sin x$ از ۱ تا ۰، کاهش می‌یابد.

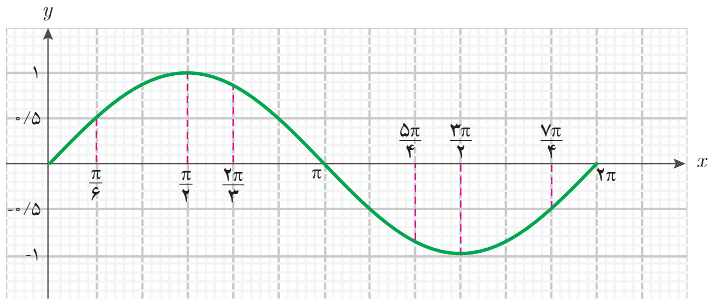
ت) وقتی x از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد $\sin x$ از ۰ تا ۱-، کاهش می‌یابد.

ث) وقتی x از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π افزایش می‌یابد $\sin x$ از ۱- تا ۰، افزایش می‌یابد.

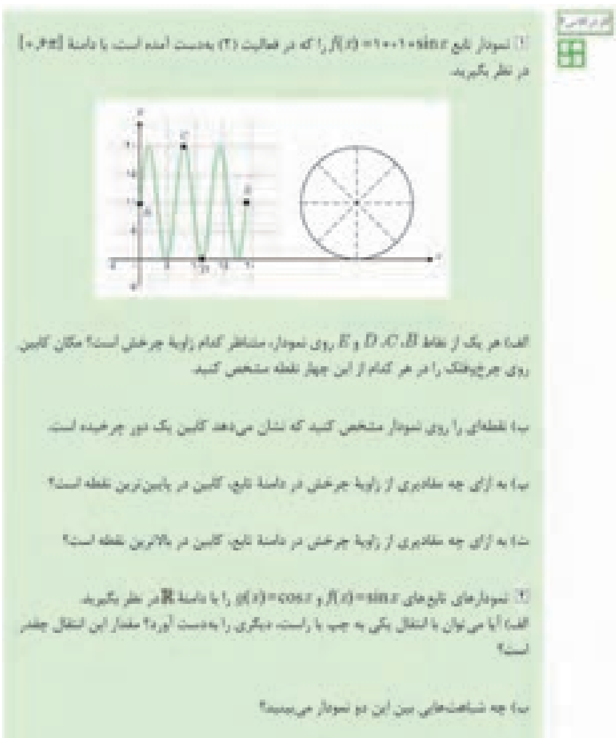
۲

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۲\pi}{۳}$		π		$\frac{۵\pi}{۴}$		$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		۲π
$\sin x$	۰	↗	$\frac{۱}{۲}$	↗	۱	↘	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↘	۰	↘	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↘	۱-	↗	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	۰

۳ نمودار :



در ادامه، نمودار تابع $\sin x$ در دامنه‌های دیگر نیز توضیح داده می‌شوند. در مثال‌ها توضیحات مشابه دربارهٔ تابع $\cos x$ نیز ارائه می‌شود. نهایتاً در کار در کلاس (۳) آن تابع مثلثاتی که ارتفاع کابین یک چرخ‌وفلک را بر حسب زاویهٔ چرخش بیان می‌کرد مورد بررسی قرار می‌گیرد.


کار در کلاس

۱ نمودار تابع $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$ را که در فعالیت (۲) به‌دست آمده است با دامنهٔ $[۰,۴\pi]$ در نظر بگیرید.

الف) هر یک از نقاط B، C، D و E روی نمودار، متناظر کدام زاویهٔ چرخش است؟ مکان کابین روی چرخ‌وفلک را در هر کدام از این چهار نقطه مشخص کنید.

ب) نقطه‌ای را روی نمودار مشخص کنید که نشان می‌دهد کابین یک دور چرخیده است.

پ) به ازای چه مقادیری از زاویهٔ چرخش در دامنهٔ تابع، کابین در پایین‌ترین نقطه است؟

ت) به ازای چه مقادیری از زاویهٔ چرخش در دامنهٔ تابع، کابین در بالاترین نقطه است؟

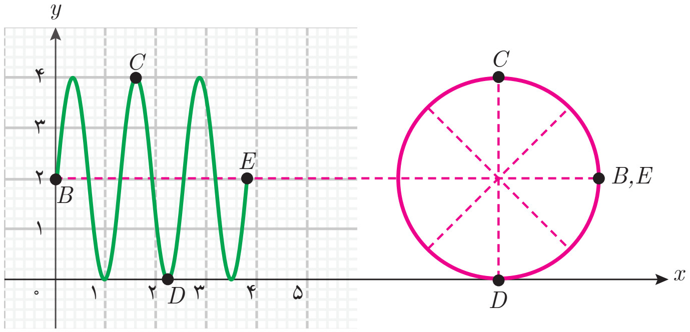
۲ نمودارهای تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

الف) آیا می‌توان با انتقال یکی به چپ یا راست، دیگری را به‌دست آورد؟ مقدار این انتقال چقدر است؟

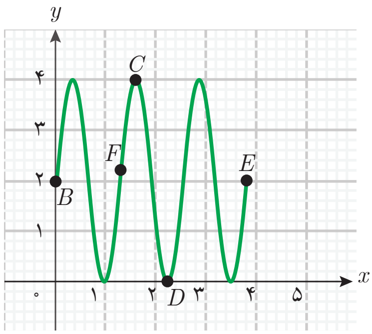
ب) چه شباهت‌هایی بین این دو نمودار می‌بینید؟

حل کار درکلاس (۳)

۱ الف) B : متناظر صفر رادیان، C : متناظر $۲\pi+\frac{\pi}{۲}$ ، D : متناظر $۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ و E : متناظر ۶π



ب) نقطهٔ F



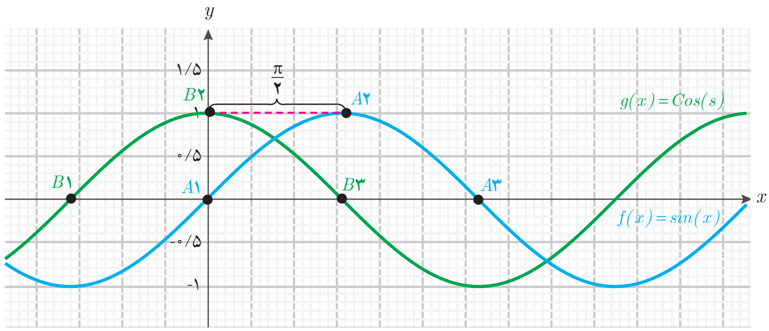
پ) در زاویه‌های $\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}, ۴\pi+\frac{۳\pi}{۲}$

ت) در زاویه‌های : $\frac{\pi}{۲}, ۲\pi+\frac{\pi}{۲}, ۴\pi+\frac{\pi}{۲}$

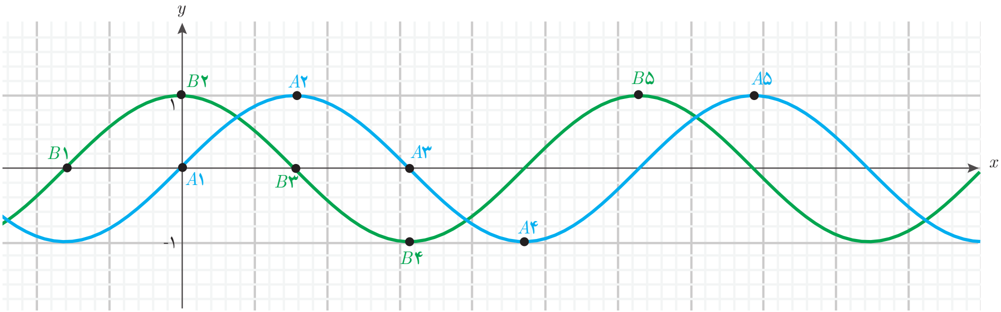
۲ الف) بله، می‌توان نمودار تابع $\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ موازی محور xها، به سمت چپ انتقال داد، در این صورت برای نمونه نقاط $A۱$، $A۲$ و $A۳$ روی نقاط $B۱$، $B۲$ و $B۳$ از نمودار $\cos x$ قرار می‌گیرند و نهایتاً دو نمودار بر هم منطبق می‌شوند.

درستی این مطلب به دلیل درستی تساوی $\sin(x)=\cos(x--)$ است که در صورت آمادگی هنرجویان می‌توانید آن را مطرح کنید. به‌طور مشابه می‌توان گفت با انتقال نمودار تابع $\cos x$ به اندازهٔ — به راست نمودار تابع $\sin x$ به‌دست می‌آید

که نشان‌دهندهٔ درستی تساوی $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$ است.



ب) برخی از شباهت‌ها عبارت‌است از:



در هر کدام از نمودارها:

- عرض پایین‌ترین نقطه ۱- و عرض بالاترین نقطه ۱ است. (نقاط A۲,B۲ و همچنین $A۴,B۴$)
- فاصلهٔ بین بالاترین نقاط متوالی ۲π است. (فاصلهٔ بین $B۲$ و $B۵$ وهمچنین $A۲$ و $A۵$)
- فاصلهٔ طول بالاترین نقطه از طول پایین‌ترین نقطهٔ بعد (قبل) از آن π است. (فاصلهٔ $B۲,B۴$ و همچنین $A۲,A۴$)
- فاصلهٔ بین دونقطهٔ متوالی که محور xها را قطع می‌کند π است. (فاصلهٔ $A۱,A۳$ و همچنین $B۱,B۳$)
- دو نقطه که اختلاف طول آنها ۲π است عرض برابر دارند.
- نمودار یکی با انتقال افقی نمودار دیگری به اندازهٔ مناسب به‌دست می‌آید.

حل مسائل

۱ مهارت‌ها و فرایندها : حل مسئله

$u(x)=۴\sin x-۳\cos(۲x)$

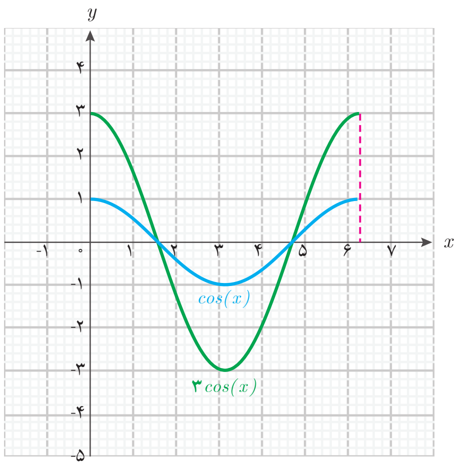
$u(۳\pi)=۴\sin ۳\pi-۳\cos(۲\times۳\pi)=۴\times۰-۳\times۱=-۳$

$u(\frac{\pi}{۶})=۴\sin\frac{\pi}{۶}-۳\cos(۲\times\frac{\pi}{۶})=۴\times\frac{۱}{۲}-۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۴-۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$

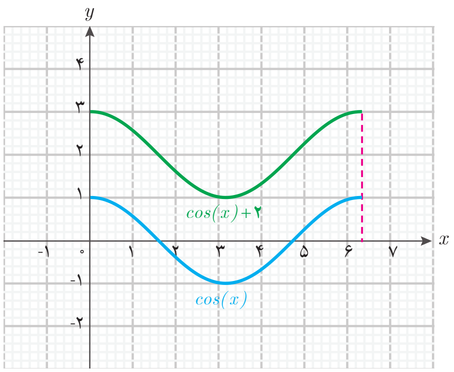
$u(۲)=۴\sin(۲)-۳\cos(۲\times۲)\approx ۴\times(۰/۹)-۳\times(-۰/۶۵)=۵/۵۵$

۲ مهارت‌ها و فرایندها : بازنمایی‌ها، استدلال

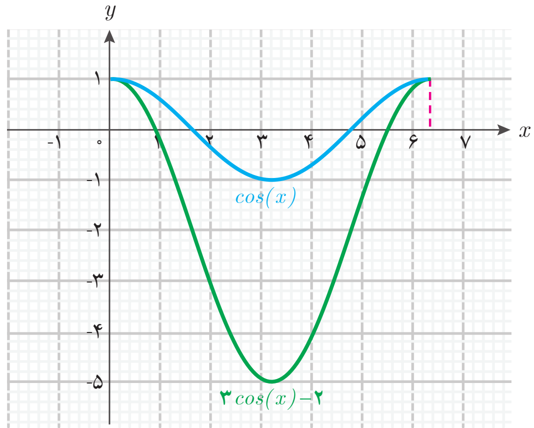
عرض نقاط نمودار تابع $۳\cos x$ با ضرب ۳ در عرض نقاط نمودار تابع $\cos x$ به‌دست می‌آیند.



نمودار تابع $۲+\cos x$ از طریق انتقال نمودار تابع $\cos x$ به اندازه ۲ واحد به بالا رسم شده است.



برای رسم نمودار تابع $3\cos x - 2$ ، عرض نقاط نمودار تابع $\cos x$ را در ۳ ضرب کرده تا نمودار تابع $3\cos x$ به‌دست آید. سپس نمودار جدید به اندازه ۲ واحد به پایین انتقال داده شده است.

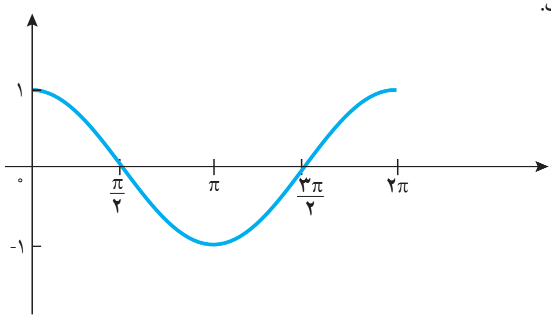


۳ مهارت‌ها و فرایندها : بازنمایی‌ها، استدلال کردن

با رسم نمودارهای دو تابع $\sin(2x)$ و $2\sin x \cos x$ معلوم می‌شود دو نمودار برهم منطبق‌اند و تساوی داده شده درست است. برای آنکه دو نمودار جداگانه دیده شوند مناسب است که یکی را ۲ واحد به بالا منتقل کنیم.

۴ مهارت‌ها و فرایندها : پیوندها و اتصالات، استدلال کردن.

با توجه به نمودار می‌توان گفت نمودار تابع $\cos x$ محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند و طول این نقاط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ است که همان جواب‌های معادله $\cos x = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ است.



۵ مهارت‌ها و فرایندها : استدلال کردن، بازنمایی‌ها

به دلخواه سه زاویه برای x از دامنه $\mathbb{R}$ انتخاب کرده و آنها را در دو تابع f و g جاگذاری کرده و مقادیر آنها را محاسبه می‌کنیم. به‌طور مثال :

$$x=۰ \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=\cos ۰ = ۱ \\ g(۰)=\sin\left(۰+\frac{\pi}{۲}\right)=۱ \end{cases} \quad \Rightarrow f(۰)=g(۰)$$

$$x=-\pi \Rightarrow \begin{cases} f(-\pi)=\cos(-\pi)=-۱ \\ g(-\pi)=\sin\left(-\pi+\frac{\pi}{۲}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right)=-۱ \end{cases} \quad \Rightarrow f(-\pi)=g(-\pi)$$

$$x=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ g\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases} \quad \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{۶}\right)=g\left(\frac{\pi}{۶}\right)$$

با کمک رسم نمودارهای دو تابع $\cos x$ و $\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ ملاحظه می‌شود تمامی‌نقاط این دو نمودار بر هم منطبق هستند. بنابراین تساوی $f(x)=g(x)$ به ازای هر مقدار x برقرار است.