



## فصل ۲

# الگوهای خطی



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

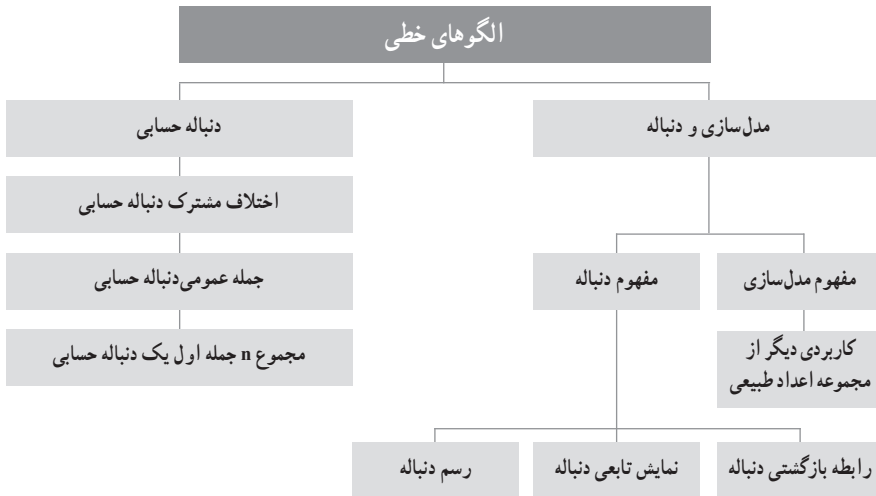
## نگاه کلی به فصل

فصل ۲ کتاب ریاضی پایه دوازدهم به مبحث الگوهای خطی اختصاص یافته است. در این فصل با استفاده از ارتباطات مفهومی میان مفاهیم ریاضی و غیرریاضی، موقعیت‌ها و وضعیت‌های واقعی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و در موارد مناسب مدل‌سازی شده‌اند. این فصل شامل دو درس است. در درس اول، ابتدا مفهوم مدل‌سازی برای بررسی مسائلی از دنیای واقعی یادآوری شده است و همچنین کاربردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی و رفتار تابع در این مجموعه بررسی می‌شود. از نمایش‌های ریاضی (نمودارها، نقشه‌ها، جدول‌ها، نمادها و علائم و...) به عنوان ابزاری برای فهم، درک، تجزیه و تحلیل مفاهیم ریاضی استفاده شده است. سپس با استفاده از مفاهیم الگو و تابع، مفهوم دنباله تشریح شده و نحوه به دست آوردن جمله عمومی دنباله به صورت رابطه بازگشتی و نمایش تابعی آن بیان می‌شود و نشان می‌دهد که مفاهیم ریاضی با یکدیگر در ارتباط هستند و شناخت این ارتباطات، درک و یادگیری مفاهیم ریاضی را عمیق‌تر می‌سازد. در درس دوم به مفهوم دنباله حسابی و مسائل مربوط به آن پرداخته شده است. ویژگی دنباله حسابی و شباهت آن با تابع خطی، پیدا کردن جمله عمومی آن و مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی همراه با مثال‌ها و مسائل متنوعی مطرح می‌شود. در این فصل، قبل از ورود به مبحث مورد نظر، مسائلی واقعی از محیط پیرامون و زندگی روزمره در قالب فعالیت‌های متنوع مطرح شده‌اند و هدف از این قسمت، ایجاد انگیزه و فعال‌سازی دانش‌آموزان و درگیر کردن عملی آنها برای ساختن مفاهیم جدید است که پس از پاسخ به فعالیت‌ها و نتیجه‌گیری از آن، به مفهوم موردنظر پی ببرند.

### اهداف کلی فصل الگوهای خطی عبارت است از:

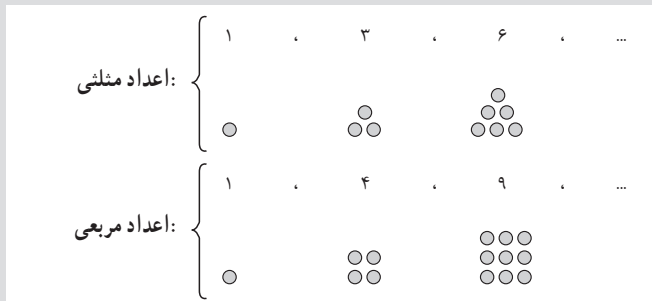
- ۱ نگاه کاربردی به مفاهیم ریاضی در توصیف پدیده‌های متفاوت محیط پیرامون و معنادار دیدن مفاهیم ریاضی.
- ۲ به کارگیری نمایش‌های ریاضی برای مدل‌سازی و تفسیر و درک پدیده‌های مختلف.
- ۳ ارتباطات مفهومی میان مفاهیم ریاضی و غیرریاضی و تجزیه و تحلیل موقعیت‌ها و وضعیت‌های واقعی.
- ۴ آشنایی با الگوهای خطی در برخی پدیده‌هایی از دنیای واقعی.
- ۵ آشنایی با مفهوم دنباله و رسم نمودار آن.
- ۶ آشنایی با مفهوم دنباله حسابی و به کارگیری آن در توصیف برخی پدیده‌های مختلف.
- ۷ توانایی در «حل مسئله» و طرح مسائل «باز پاسخ» و به کارگیری راهبردهای حل مسئله.
- ۸ ارتقای نگرش مثبت به ریاضی به عنوان ابزاری قدرتمند و اساسی برای درک و حل مسائلی از دنیای واقعی.

## نقشه مفهومی فصل دوم



## دانستنی‌هایی برای معلم

یکی از مفاهیمی که به همراه شناسایی عددهای طبیعی شناخته می‌شود، مفهوم دنباله‌ای این اعداد است؛ هر عدد طبیعی قبل و بعد از عدد طبیعی دیگر واقع است. این مفهوم زمینه را فراهم می‌سازد تا دنباله‌های دیگری از اعداد شناسایی شوند. از این رو تاریخ شناسایی دنباله‌های اعداد به قدمت تاریخ عددهای طبیعی است. در گذشته که نمادها و علامت‌ها در ریاضیات به کار نمی‌رفت و فراگیری ریاضیات و انجام دادن عملیات آن به سادگی امروز نبود، بعضی دنباله‌های اعداد را که می‌شناختند و با نام ویژه مشخص می‌کردند و بررسی ویژگی‌های هر یک را جداگانه انجام می‌دادند. مانند:



اعداد مخمسی، اعداد مسدسی و . . . . .  
 در سده‌های اخیر با استفاده از نمادها و علامت‌ها، امکان آن فراهم شده است که مفهوم دنباله اعداد از یک سو تعمیم یابد و از سوی دیگر به صورت اصولی و منظم بررسی گردد، تا آنجا که امروزه شاخه‌ای از آنالیز ریاضی به بحث درباره ویژگی‌های دنباله‌های اعداد اختصاص دارد.

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید.

- (الف) یک دنباله تابعی است که دامنه آن ..... و برد آن ..... است.  
 (ب) در رابطه بازگشتی، ..... میان جملات دنباله معرفی می‌شود و در ضابطه تابعی دنباله، ..... مشخص است.  
 (پ) دامنه تابع مدل ریاضی مسئله «میزان مصرف برق ماهیانه یک خانه از اول سال»، ..... است.  
 (ت) جمله چهارم دنباله  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ، برابر ..... است.  
 (ث) جمله ..... دنباله  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، برابر  $\frac{1}{81}$  می‌باشد.  
 (ج) یک دنباله حسابی دنباله‌ای است که ..... میان جملات متوالی دنباله، ثابت است.  
 (چ) اگر  $a_m$  و  $a_n$  جملات  $m$ ام و  $n$ ام یک دنباله حسابی باشند، حاصل  $a_m - a_n$  برابر با  $d \times (\dots)$  است.  
 (ح) اگر مقدار اختلاف مشترک در یک دنباله حسابی ..... باشد، دنباله افزایشی و اگر ..... باشد، دنباله کاهش می‌باشد.

- (خ) شیب خط در یک تابع خطی همان ..... جملات دنباله حسابی می‌باشد.  
 (د) اگر در یک دنباله حسابی  $a_5 = -8$  و  $d = -3$  باشد، جمله اول آن برابر ..... است.  
 (ذ) مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی ... ۱۵ و ۱۱ و ۷ و ۳، برابر ..... است.

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- (الف) رابطه بازگشتی دنباله اعداد ... ، -۵ ، -۱ ، ۳ ، ۷ ، به صورت  $a_n = a_{n-1} + 4$  است.  
 (ب) جمله عمومی دنباله ... ،  $\frac{1}{9}$  ،  $\frac{1}{99}$  ،  $\frac{1}{999}$  به صورت  $a_n = \frac{10^n - 1}{10^n}$  می‌باشد.  
 (پ) دنباله حسابی همان الگوی خطی است.  
 (ت) مجموع دنباله حسابی ۱۹۹ ، ... ، ۹ ، ۴ ، -۱ برابر ۲۰۵۹ می‌باشد.

ث) دنباله  $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots$  یک دنباله حسابی نیست.

ج) اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه:  $2b = a + c$

چ) جملات یک دنباله ممکن است فاقد یک الگو باشند.

ح) در یک دنباله حسابی  $a_5 - a_1 = 42$  است، اختلاف مشترک این دنباله برابر ۷ می باشد.

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) جمله ششم دنباله  $a_n = \frac{2n}{n+2}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{2}{3}$     ۲  $\frac{10}{7}$     ۳  $\frac{3}{2}$     ۴  $\frac{4}{3}$

ب) تفاضل دو عدد  $20$  است، بین آنها چهار عدد درج می کنیم به طوری که شش عدد حاصل، دنباله

حسابی تشکیل دهند. اختلاف مشترک این دنباله چقدر است؟

- ۱ ۳    ۲ ۴    ۳ ۵    ۴ ۶

پ) در یک دنباله حسابی جمله چهاردهم برابر  $\frac{2}{3}$  و جمله نهم برابر  $\frac{1}{4}$  است. جمله اول این دنباله کدام

است؟

- ۱  $-\frac{5}{12}$     ۲  $\frac{5}{12}$     ۳  $-\frac{1}{12}$     ۴  $-\frac{1}{12}$

ت) نخستین جمله یک دنباله حسابی  $25$  و اختلاف مشترک آنها  $18$  می باشد. کدام جمله دنباله برابر

$601$  است؟

- ۱ ۱۱    ۲ ۲۲    ۳ ۳۳    ۴ ۴۴

ث) کدام یک از گزینه های زیر رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی را نشان می دهد؟

- ۱  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$     ۲  $a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n-1}$     ۳  $a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$     ۴  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$   
 ۱  $a_1 = a_2 = 1$     ۲  $a_1 = a_2 = 1$     ۳  $a_1 = a_2 = 1$     ۴  $a_1 = a_2 = 1$

ج) جمله عمومی دنباله  $\frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{10}{11}, \frac{17}{14}, \dots$  کدام است؟

- ۱  $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$     ۲  $a_n = \frac{n^2+1}{2n+3}$     ۳  $a_n = \frac{n^2+1}{3n+2}$     ۴  $a_n = \frac{3n-1}{2n+3}$

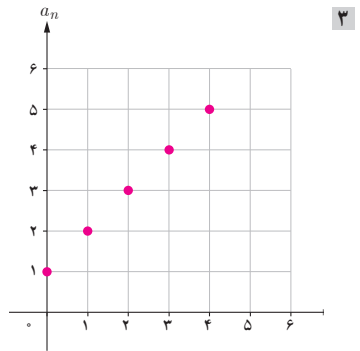
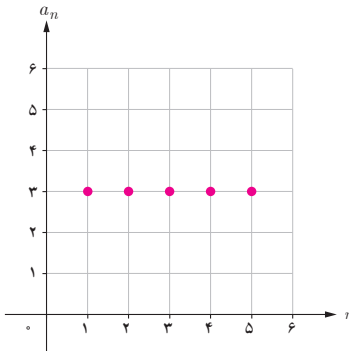
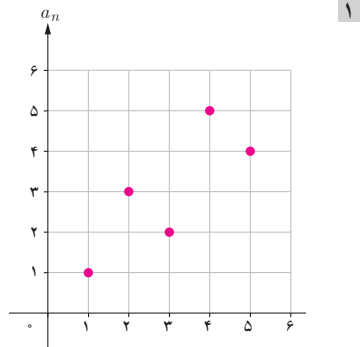
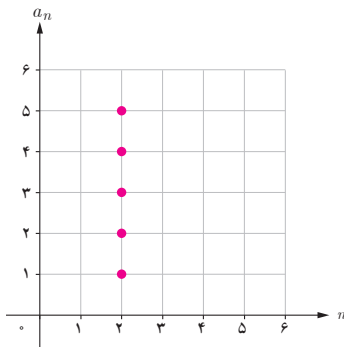
چ) در یک دنباله حسابی  $a_7 = 68$  و  $a_1 = 4$ ، جمله چندم  $408$  می شود؟

- ۱ ۱۲۱    ۲ ۱۰۲    ۳ ۱۲۰    ۴ ۱۰۱

ح) در یک دنباله حسابی  $a_7 = 20$ ، حاصل  $a_7 + a_8 + a_9 + a_{11}$  کدام است؟

- ۱ ۶۰    ۲ ۷۰    ۳ ۸۰    ۴ ۹۰

خ) کدام نمودار زیر می‌تواند بیانگر یک دنباله حسابی باشد؟



۲ جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
$\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{7}, \dots$			
۲، ۷، ۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ...			
۱، ۵، ۱، ۵، ۱، ۵، ...			
$-1, \frac{2}{5}, -3, \frac{4}{5}, -5, \frac{6}{5}, \dots$			

۵ نمودار دنباله‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $a_n = \frac{n+1}{n}$       ب)  $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$       پ)  $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{زوج } n \\ 2 & \text{فرد } n \end{cases} \quad \begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2+a_n} \\ a_1 &= -1 \end{aligned}$$

۶ در دنباله  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots$  جمله عمومی و جمله صدم را بیابید.

۷ مقدار  $m$  را طوری محاسبه کنید که جملات  $1-3m$  و  $2m$  و  $2m+1$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند.

۸ در یک دنباله حسابی جمله پنجم برابر با ۱۴ و جمله هفتم برابر با ۲۰ است. جمله عمومی این دنباله را مشخص کنید و جمله دهم آن را به دست آورید.

۹ بین دو عدد ۲- و ۵۴، سه عدد چنان بیابید که پنج عدد حاصل یک دنباله حسابی تشکیل دهند؟

۱۰ اعداد  $1-5p$ ،  $4+3p$  و  $3+2p$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی هستند. اختلاف مشترک این دنباله را بیابید.

۱۱ در یک دنباله حسابی جمله سوم برابر ۱ و جمله هفتم برابر با ۷ می‌باشد. مجموع دوازده جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۱۲ در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله برابر صفر است؟

۱۳ در یک دنباله حسابی، جمله  $m$ ام به صورت  $a_n = \frac{3}{4}n - 5$  است. مجموع پانزده جمله اول این دنباله را حساب کنید.

۱۴ اعداد  $\frac{5}{4}$  و  $y$  و  $x$  و ۱ به ترتیب چهار جمله اول از یک دنباله حسابی هستند. مجموع پانزده جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۱۵ مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$  است. مجموع جملاتی از این دنباله که از جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، را بیابید.



۱۶ جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = \frac{1+3n}{n+1}$  است.

(الف) چهار جمله اول این دنباله را بنویسید.

(ب) نمودار این دنباله را رسم کنید.

(پ) جمله چندم این دنباله برابر  $\frac{1}{3}$  است؟

۱۷ اگر  $a_n = n^2 + (-1)^n$  و  $b_n = -1$  و  $C_n = \frac{n-1}{4}$  باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف)  $a_1 + b_7 + c_9$       (ب)  $a_7 - b_7 + c_5$

۱۸ با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است؟

(الف)  $a_{n+1} = a_n + (n+1)$       (ب)  $a_{n+1} = 2a_n + 3$   
 $a_1 = 1$        $a_1 = -2$

(پ)  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 2$       (ت)  $a_{n+1} = a_n + 3$   
 $a_1 = 1$        $a_1 = -5$

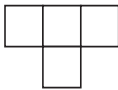
۱۹ جسمی از ارتفاع  $h$  متری سقوط می‌کند. در صورتی که جسم در ثانیه اول ۵ متر، در ثانیه دوم ۱۵ متر

و در ثانیه سوم ۲۵ متر طی کند، با فرض اینکه افزایش طول مسیر طی شده در هر ثانیه یکنواخت باشد

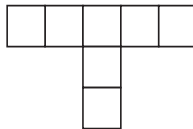
و جسم پس از مدت ۲۱ ثانیه به زمین برسد، اندازه  $h$  را به دست آورید.

۲۰ تعداد اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۷ چقدر است؟

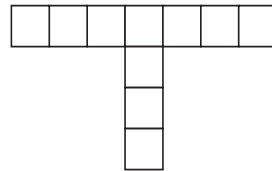
۲۱ ضلع هر مربع در الگوی زیر ۱ واحد است. اگر این الگو ادامه یابد:



۱



۲



۳

(الف) رابطه‌ای بنویسید که محیط تابعی از شماره شکل باشد. رابطه بازگشتی میان الگوی بالا را مشخص کنید.

(ب) محیط نهمین شکل را به دست آورید.

(ب) محیط شکل کدام مرحله ۷۶ واحد است؟

۲۲ مجموع چهار جمله اول یک دنباله حسابی  $4^\circ$  و مجموع سه جمله بعدی آن  $51$  می باشد. جمله اول آن را بیابید؟

۲۳ شیر آبی در هر دقیقه ۲ لیتر آب وارد یک حوض می کند. اگر این حوض از ابتدا ۱۸ لیتر آب داشته باشد، مقدار آب حوض را پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج دقیقه به صورت یک دنباله بنویسید. آیا این دنباله حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند دقیقه آب حوض  $6^\circ$  لیتر می شود؟

۲۴ یک قطار باری از ایستگاهی در  $6^\circ$  کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و با سرعتی ثابت به سمت طبرس حرکت می کند. در هر ساعت  $9^\circ$  کیلومتر به فاصله این قطار تا بندرعباس اضافه می شود. فاصله این قطار تا بندرعباس را در پایان ساعت اول، دوم، سوم، چهارم و پنجم در یک دنباله بنویسید. آیا دنباله حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند ساعت، فاصله این قطار تا بندرعباس  $96^\circ$  کیلومتر می شود؟

۲۵ مجموع سه جمله از یک دنباله حسابی برابر با ۲۷ و حاصل ضرب همین سه جمله برابر با ۶۴۸ است. اختلاف مشترک این دنباله چقدر است؟

۲۶ تعداد اعداد سه رقمی که رقم سمت راست آنها ۴ بوده ولی بر ۴ بخش پذیر نیستند را به دست آورید.

۲۷ بین اعداد ۱ و ۸۱، چه تعداد جمله درج شود تا مجموع جمله های دنباله حسابی حاصل، برابر ۲۴۶ شود؟

۲۸ اگر در یک دنباله حسابی  $a_3 = 33$  و  $a_5 = 19$  باشد، چند جمله این دنباله مثبت است؟

۲۹ یک شمع  $2^\circ$  سانتی متر ارتفاع دارد و در هر دقیقه  $5/^\circ$  سانتی متر می سوزد.

(الف) بعد از چند دقیقه ارتفاع شمع به  $7/5^\circ$  سانتی متر می رسد؟

(ب) پس از چند دقیقه شمع خاموش می شود؟

(ب) آیا این دنباله حسابی است؟ چرا؟

## مدل سازی و دنباله

## اهداف درس اول

- ۱ یادآوری مدل سازی مسائلی از دنیای واقعی و تفسیر نمودار تابع آنها.
- ۲ به کارگیری نمایش های مختلف ریاضی برای درک بهتر و تجزیه و تحلیل مفاهیم ریاضی.
- ۳ تشخیص دامنه توابع مدل شده ریاضی با استفاده از مفاهیم اساسی اعداد طبیعی و اعداد حقیقی.
- ۴ آشنایی با کاربردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی و درک رفتار تابع در این مجموعه.
- ۵ آشنایی با مفهوم الگوهای خطی و ارتباط آنها با دنیای واقعی.
- ۶ آشنایی با مفهوم دنباله و رسم نمودار آن.
- ۷ تشخیص الگوی موجود در برخی دنباله ها و پیدا کردن رابطه بازگشتی و نمایش تابعی آنها.
- ۸ توانایی در حل مسئله ریاضی و حل مسائلی از دنیای واقعی.

## روش تدریس

ورود به مطلب درس با فعالیتی آغاز شده است و سؤالات آن مثال های عینی هستند که یادآوری مفهوم مدل سازی در مسائلی از دنیای واقعی می باشد و مروری بر مفهوم تابع چندضابطه ای، تعیین دامنه و برد و رسم نمودار آن است. همچنین در این فعالیت، تفاوت نمودار تابع سؤال قسمت ۱ و ۲ را نشان می دهد، که تأکید بر تأثیر دامنه تابع بر روی نمودار آن را دارد. در فعالیت ها از نمایش های متفاوت ریاضی (نمودارها، جدول ها، نمادها و علائم و...) برای مدل سازی و تفسیر و درک مفاهیم ریاضی در پدیده های مختلف استفاده شده است. کاردر کلاس صفحه ۴۸، در قسمت ۱، سؤالات باز پاسخ مطرح شده و هدف از آن، تشخیص و تعیین دامنه توابع مدل شده ریاضی برخی مسائلی از دنیای واقعی است و در قسمت ۲، طرح سؤالات باز پاسخ خواسته شده و هدف از آن، پرورش خلاقیت و توانایی در طرح مسائلی از دنیای واقعی است که دامنه آنها مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه اعداد حقیقی می باشد. بهتر است برای ایجاد انگیزه و علاقه مند نمودن دانش آموزان برای یادگیری، با روش پرسش و پاسخ در کلاس به گفت و گو پرداخت، تا آنان ایده های خود را بیان نمایند.

همان طور که از نام اعداد طبیعی پیدا است، اولین دسته از اعداد هستند که به طور طبیعی در مسیر سیر تفکر ریاضیات ظاهر شده و به وجود آمده اند و در تعیین دامنه تعریف برخی توابع از آن استفاده می شود.



ج) گزینه ۳،

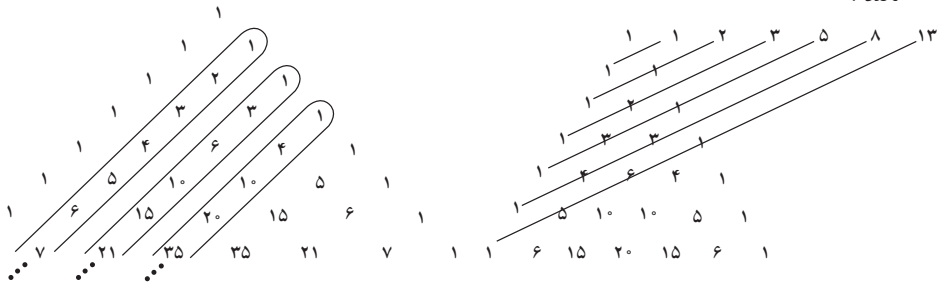
$$A(7, 50) , B(11, 100) \rightarrow m_{AB} = \frac{100 - 50}{11 - 7} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

$$y - 50 = \frac{25}{2}(x - 7) \xrightarrow{x=13} y - 50 = \frac{25}{2} \times 6 \rightarrow y = 75 + 50 = 125 \text{ (هزار ۱۲۵)}$$

در صفحه ۵۱، مطلب خواندنی در مورد شاخص بورس بیان شده است، که در واقع این مطلب می تواند مکمل مبحث شاخص بورس در کتاب اقتصاد باشد که دانش آموزان با آن آشنایی دارند و محاسبه شاخص سهام کل را با توجه به این مطلب به خوبی درک می کنند.

در فعالیت صفحه ۵۲، با استفاده از مفهوم الگو و تابع، که دانش آموزان در سال های قبل با آن آشنایی دارند، مفهوم دنباله بیان و تشریح می شود. در این فعالیت با استفاده از مثلث خیام، الگویی از اعداد معرفی می شود و در ادامه رابطه بازگشتی و ضابطه جمله  $n$ ام این الگو خواسته شده است. هدف این است که دانش آموزان با مفهوم رابطه بازگشتی آشنا شده و تفاوت آن با نمایش تابعی دنباله را تشخیص دهند و همچنین بدانند که اگر در رابطه بازگشتی، جمله اول داده شود، فقط یک دنباله تشکیل می شود ولی اگر رابطه بازگشتی بدون جمله اول باشد، تعداد نامتناهی دنباله می توان تشکیل داد. نگرش دقیق و یافتن الگوها، مهارت مهمی است که توجه به آن برای حل مسائل و به طور کلی کشف ایده های ریاضی در پدیده های واقعی ضرورت دارد. می توان برای ایجاد رغبت دانش آموزان به یادگیری، به صورت فعالیتی از آنها خواسته شود که الگوهای دیگری که در مثلث خیام وجود دارد را پیدا کنند.

مانند :



دنباله اعداد طبیعی، اعداد مثلثی و اعداد چهاروجهی

انتهای پیکان ها نشانگر دنباله اعداد فیبوناچی است.

کلمه دنباله در ریاضیات، اصطلاحی است که یک مجموعه از اشیایی را مشخص می کند که با ترتیبی آراسته شده باشند. در صفحه ۵۳، در قسمت تعریف دنباله، نمایش ماشینی تابع (دنباله) را نشان می دهد، که از یک ورودی، یک سیستم انجام عملیات ریاضی و یک خروجی تشکیل شده است، که چنانچه ورودی که همان اعضای دامنه دنباله است، مجموعه اعداد طبیعی باشد، سیستم این ماشین (ضابطه دنباله)، جملات

دنباله را می‌سازد و در خروجی، دنباله ای نامتناهی (اعضای برد دنباله) خارج می‌شوند. هر گاه دامنه دنباله، قطعه‌ای از اعداد طبیعی باشد، دنباله متناهی خواهد بود.

در صفحه ۵۴، کاربرد کلاسی مطرح شده و هدف این است که دانش آموزان با توجه به ضابطه تابعی دنباله که می‌تواند از انواع توابعی که با آن آشنایی دارند باشد، جملات دنباله را بسازند. همچنین مثالی مطرح شده تا دانش آموزان به درک بهتری از رابطه بازگشتی و ضابطه تابعی دنباله برسند.

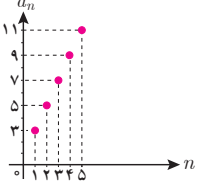
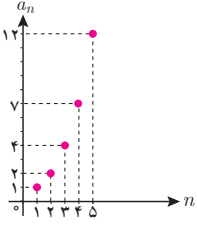
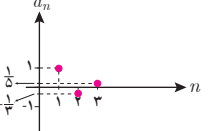
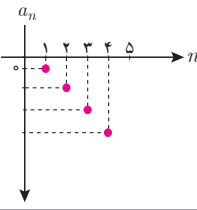
در صفحه ۵۵، مبحث رسم دنباله همراه با مثال‌های متنوع مطرح می‌شود و نشان می‌دهد که جمله عمومی دنباله از هر نوع تابعی که باشد، چون دامنه‌اش مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است، نمودار آن به صورت نقطه نقطه (گسسته) رسم می‌شود.

هدف از کار در کلاس صفحه ۵۶ این است که دانش آموزان حالت‌های مختلف نمایش یک دنباله (نوشتن جملات دنباله، رابطه بازگشتی، ضابطه دنباله و رسم نمودار آن) را یاد گرفته و درک کنند. نمایش‌های مختلف از یک مفهوم و رابطه‌های بین آنها، در درک مفاهیم و حل مسائل کارساز است.

### حل کاربرد کلاس صفحه ۵۶

جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = 3^{3-n}$	$a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}$ $a_1 = 9$	$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
	$a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$	$a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}$ $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

$3, 5, 7, 9, \dots$	$a_n = a_{n-1} + 2$ $a_1 = 3$	$a_n = 2n + 1$	
$1, 2, 4, 7, \dots$	$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$		
$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$		$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$	
$-1, -4, -9, -16, \dots$		$a_n = -n^2$	
$1, 1, 2, 3, 5, \dots$	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$		

## توصیه‌های آموزشی

در پاورقی صفحه ۵۶، دنباله فیبوناچی معرفی شده است. پیشنهاد می‌شود برای ایجاد انگیزه و علاقه‌مند نمودن دانش‌آموزان به یادگیری، از آنان خواسته شود تحقیقی در مورد دنباله‌های معروف مانند دنباله فیبوناچی انجام داده و در کلاس ارائه دهند.

بهتر است برای حل فعالیت‌ها در کلاس، به روش پرسش و پاسخ با دانش‌آموزان گفتگو شود تا به این طریق آنان تفکرات ریاضی خود را توصیف و سازماندهی کنند و استحکام بخشند. همچنین از راهبردهای متنوع حل مسئله برای فهمیدن و درک محتوای مفهومی ریاضی استفاده شود.

فراهم آوردن فرصت‌هایی که دانش آموزان از طریق فعالیت‌های فردی/گروهی و با هدایت و راهنمایی معلم به یادگیری مطلوب دست یابند.

## اشتباهات رایج دانش آموزان

هنگام مدل‌سازی وضعیت‌های مختلف با نمادها و زبان ریاضی، ممکن است دچار اشتباه شوند. عدم تشخیص درست برای یافتن دامنه توابع مدل شده ریاضی. برای به دست آوردن جمله عمومی برخی از دنباله‌ها، به صورت رابطه بازگشتی یا نمایش تابعی دنباله، معمولاً دچار اشتباه می‌شوند. چون در فرمول جمله عمومی که به دست می‌آورند، مقادیر به ازای  $n = 1, 2, 3, \dots$  را در آن امتحان نمی‌کنند که با توجه به جملات دنباله داده شده، فرمول جمله عمومی که به دست آورند، درست است یا نیست.

### حل تمرینات درس اول (صفحه ۵۷ کتاب)

۱ برای محاسبه قبض آب (آب‌بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و براساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب‌بها محاسبه می‌شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف  $\times$  میانگین مصرف = آب‌بها

\* جدول ۱- محاسبه آب‌بها براساس طبقات مصرف در استان تهران

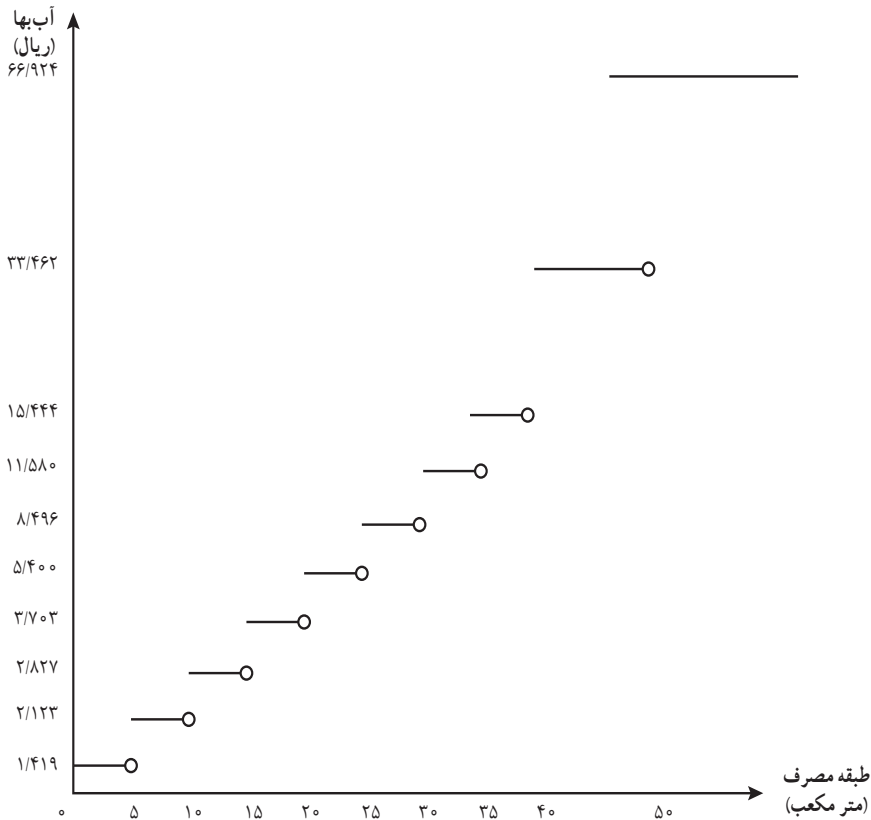
طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$0 \leq x < 5$	۱/۴۱۹	$25 \leq x < 30$	۸/۴۹۶
$5 \leq x < 10$	۲/۱۲۳	$30 \leq x < 35$	۱۱/۵۸۰
$10 \leq x < 15$	۲/۸۲۷	$35 \leq x < 40$	۱۵/۴۴۴
$15 \leq x < 20$	۳/۷۰۳	$40 \leq x < 50$	۳۳/۴۶۲
$20 \leq x < 25$	۵/۴۰۰	$x \geq 50$	۶۶/۹۲۴

\*. در ایران مشترکان تقریباً  $\frac{1}{3}$  هزینه واقعی تولید آب را می‌پردازند. هزینه آب در مقایسه با کشورهای منطقه و جهان در ایران بسیار پایین است. (تأکید بر مصرف بهینه آب توسط این سؤال به دانش‌آموزان)



الف) نمودار «طبقه مصرف – آب بها» جدول صفحه قبل را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 1/49 & 0 \leq x < 5 \\ 2/123 & 5 \leq x < 10 \\ 2/827 & 10 \leq x < 15 \\ 3/703 & 15 \leq x < 20 \\ 5/400 & 20 \leq x < 25 \\ 8/496 & 25 \leq x < 30 \\ 11/580 & 30 \leq x < 35 \\ 15/444 & 35 \leq x < 40 \\ 33/462 & 40 \leq x < 50 \\ 66/924 & x \geq 50 \end{cases}$$

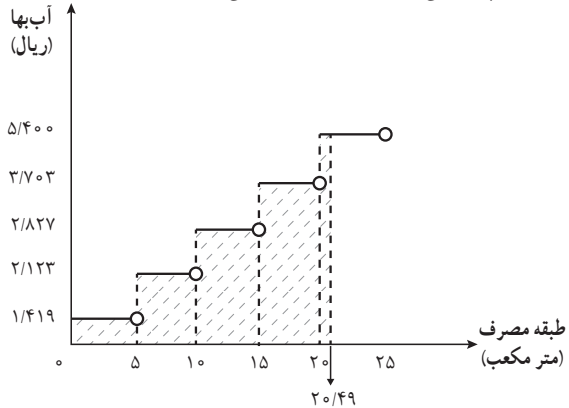


دامنه:  $x \geq 0$

برد:  $\{1/49, 2/123, 2/827, 3/703, 5/400, 8/496, 11/580, 15/444, 33/462, 66/924\}$

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی در تهران برای یک ماه  $۲۰/۴۹ \text{ m}^3$  باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی آب بها را مشخص می کند؟

$$f(x) = \begin{cases} ۱/۴۹ & ۰ \leq x < ۵ \\ ۲/۱۲۳ & ۵ \leq x < ۱۰ \\ ۲/۸۲۷ & ۱۰ \leq x < ۱۵ \\ ۳/۷۰۳ & ۱۵ \leq x < ۲۰ \\ ۵/۴۰۰ & ۲۰ \leq x < ۲۰/۴۹ \end{cases}$$



$$\text{آب بها} = ۵ \times ۱/۴۱۹ + ۵ \times ۲/۱۲۳ + ۵ \times ۲/۸۲۷ + ۵ \times ۳/۷۰۳ + ۰/۴۹ \times ۵/۴۰۰ = ۵۳/۰۰۶$$

۲ اگر تابع  $f$  مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> N            | <input checked="" type="checkbox"/> R |
| <input checked="" type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R            |
| <input type="checkbox"/> N            | <input checked="" type="checkbox"/> R |
| <input type="checkbox"/> N            | <input checked="" type="checkbox"/> R |
| <input checked="" type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R            |

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

ب) میزان استفاده دانش آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

ج) حجم مکعبی به ضلع  $x$

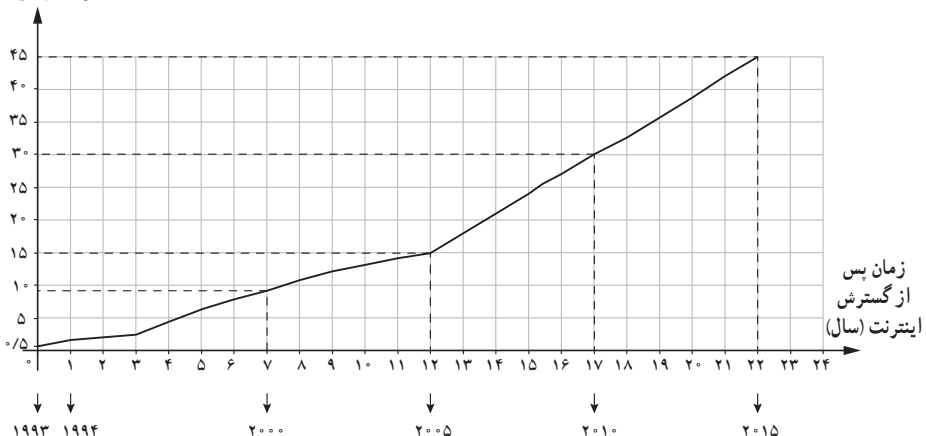
د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

۳ نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در

دنیاست، از اینترنت استفاده کرده اند.

درصد جمعیت



الف) اگر  $f(n)$  درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان،  $n$  سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر  $f(1)$  و  $f(7)$  را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

درصد جمعیت استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، یک سال پس از گسترش اینترنت برابر  $5/0$  می‌باشد

$$f(1) = 0/5$$

درصد جمعیت استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، هفت سال پس از گسترش اینترنت برابر  $9$  می‌باشد.

$$f(7) = 9$$

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال  $2005$  تا  $2015$  با به دست آوردن ضابطه تابع

خطی، در سال  $2020$  درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

$$(12, 15), (22, 45) \rightarrow m = \frac{45 - 15}{22 - 12} = 3$$

$$y - 15 = 3(x - 12) \rightarrow y = 3x - 21$$

با توجه به محور طول‌ها، سال  $2020$  عدد  $27$  می‌باشد:

$$y = 3 \times 27 - 21 = 81 - 21 = 60$$

۲ اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی  $y = 4x - 1$  پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

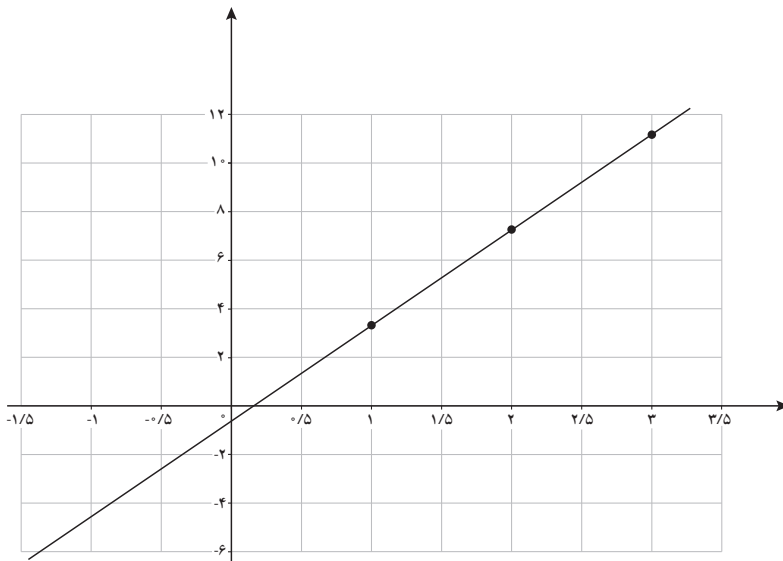
$$y = 4x - 1$$

$$a_n = 4n - 1$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 7$$

$$a_3 = 11$$



ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

جملات دنباله:  $3, 7, 11, 15, \dots$

نمایش تابعی دنباله:  $a_n = 4n - 1$

رابطه بازگشتی:  $a_{n+1} = a_n + 4$ ,  $a_1 = 3$

شیب خط همان اختلاف مشترک بین دو جمله متوالی در این رابطه بازگشتی است.

۵ با توجه به دنباله‌های  $a_n = 3^n$ ,  $b_n = (-\frac{1}{3})^{n+1}$ ,  $c_n = \frac{1}{3}$ ,  $d_n = n^2 - 1$  حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف)  $a_2 + b_1$       ب)  $c_2 - d_1$       ج)  $b_2 + d_2$

الف)  $a_2 + b_1 = 3^2 + (-\frac{1}{3})^2 = \frac{37}{3}$

ب)  $c_2 - d_1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

ج)  $b_2 + d_2 = (-\frac{1}{3})^{2+1} + 2^2 - 1 = \frac{95}{27}$

۶ جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف)  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ ,  $a_1 = -2$

ب)  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ,  $a_1 = 1$

ج)  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د)  $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ,  $a_1 = 1$

الف)  $-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, -\frac{2}{81}$

ب)  $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$

ج)  $1, 1, 1, 3, 5$

د)  $1, 0, 1, 0, 1$

۷ جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...	$a_{n+1} = a_n + 3$ $a_1 = 5$	$a_n = 3n + 2$	
۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...	$a_{n+1} = \frac{4}{a_n}$ $a_1 = 4$		$a_n = \begin{cases} 4 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}$
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 5, \frac{1}{4}, \dots$			$a_n = \begin{cases} n & \text{فرد } n \\ \frac{1}{n} & \text{زوج } n \end{cases}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$		$a_n = \frac{n}{n+1}$	

۸ شش جمله اول دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$  را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف)  $a_1 = 11$     ۱۱, ۳۴, ۱۷, ۵۲, ۲۶, ۷۹, ...

ب)  $a_1 = 25$     ۲۵, ۷۶, ۳۸, ۱۱۵, ۵۷/۵, ۱۷۳/۵, ...

۹ نمودار دنباله‌های زیر را برای  $n \leq 5$  رسم کنید.

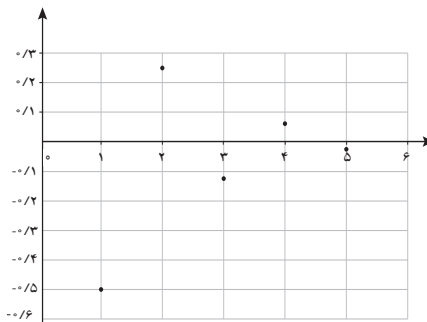
الف)  $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

$n$	۱	۲	۳	۴	۵
$a_n$	۲/۵	۲	۱/۵	۱	۱/۲



ب)  $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

$n$	۱	۲	۳	۴	۵
$a_n$	-1/2	1/4	-1/8	1/16	-1/32



ج)  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2$

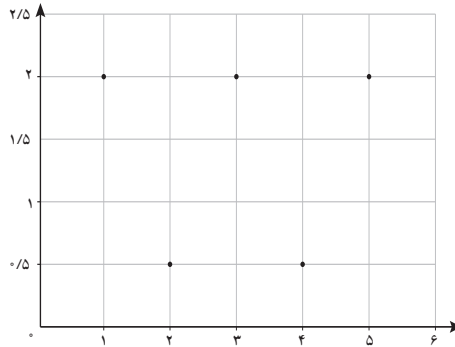
$a_1 = 2 \quad (1, 2)$

$a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} \quad (2, \frac{1}{2})$

$a_3 = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad (3, 2)$

$a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2} \quad (4, \frac{1}{2})$

$a_5 = \frac{1}{a_4} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad (5, 2)$



د)  $a_n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$

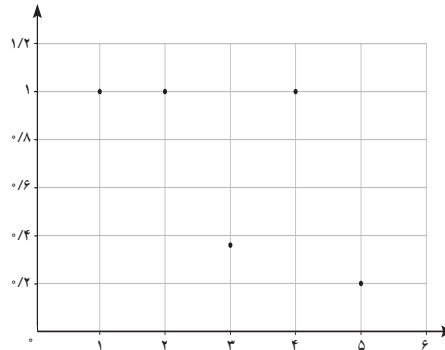
$a_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad (1, 1)$

$a_2 = 1 \quad (2, 1)$

$a_3 = \frac{1}{3} \quad (3, \frac{1}{3})$

$1 \quad (4, 1)$

$a_5 = \frac{1}{5} \quad (5, \frac{1}{5})$



۱۵ محاسبهٔ جذر اعداد در تمدن بابل — با نوشتن جملات دنبالهٔ بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد  $k$  یعنی  $\sqrt{k}$  نزدیک شویم.

$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

به کمک دنبالهٔ بازگشتی بالا، اگر  $a_n$  را تقریبی برای  $\sqrt{k}$  در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف)  $\sqrt{2}$

ب)  $\sqrt{3}$

ج)  $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

الف)  $k = 2 \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \quad , \quad a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{k}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{17}{12} \approx 1/416$$

ب)  $k = 3 \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right)$  ,  $a_1 = 3$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{3}{3} \right) = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{3}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4} \approx 1/75$$

ج)  $k = 5 \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{5}{a_n} \right)$  ,  $a_1 = 5$

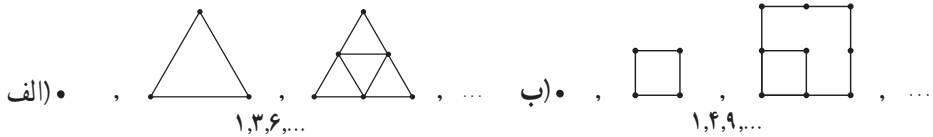
$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{5}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 5 + \frac{5}{5} \right) = 3$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{5}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{3} \approx 2/33$$

ماشین حساب حاصل جذر (ریشه دوم) یک عدد را فقط به صورت اعشاری نشان می‌دهد و گرد می‌کند. مزیت این روش این است که جذر یک عدد را به صورت عددی گویا نشان می‌دهد و می‌توان به جذر یک عدد نزدیک شد.

۱۱ جملات دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ،  $a_1 = 1$  را از الگوهای زیر را مشخص

می‌کنند؟



$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + (1+1) = 1+2=3$$

$$a_3 = a_2 + (2+1) = 3+3=6$$

۱۲ مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پس مانده‌های صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵٪ فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالانه ۱۰٪ فاضلاب

صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی اثر می کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است. اگر  $P_1 = ۲۵۰$  میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

$$P_{n+1} = (P_n + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰}, \quad P_1 = ۲۵۰$$

$$P_۲ = (P_1 + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۵۰ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۳۸/۵$$

$$P_۳ = (P_۲ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۳۸/۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۲۸/۱۵$$

$$P_۴ = (P_۳ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۲۸/۱۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۱۸/۸۳۵$$

$$P_۵ = (P_۴ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۱۸/۸۳۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۱۰/۴۵۱۵$$

$$P_۶ = (P_۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۱۰/۴۵۱۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۰۲/۹۰۶۳۵$$

### بازی و ریاضی

آیا می توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

$$a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}} \quad a_1 = a_۲ = ۱$$

ده جمله اول این دنباله: ۱، ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ۶



## دنباله حسابی

## اهداف درس دوم

- ۱ تشخیص ارتباط مفهومی میان مفاهیم الگوهای خطی و دنباله حسابی.
- ۲ آشنایی با مفهوم دنباله حسابی و یافتن اختلاف مشترک آن.
- ۳ شناسایی و تشخیص دنباله حسابی در بین دنباله‌ها و به دست آوردن جمله عمومی آن.
- ۴ آشنایی با قواعد دنباله حسابی و به کارگیری آنها در حل مسائل.
- ۵ شناخت کاربرد مفهوم دنباله حسابی در برخی پدیده‌های دنیای واقعی.
- ۶ مهارت در یافتن مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی.

## روش تدریس

در صفحه ۶۱، ورود به مطلب درس با فعالیتی که مسئله‌ای عینی و کاربردی است، آغاز می‌شود و هدف آن نشان دادن ارتباط مفهومی میان دنباله‌های حسابی و الگوهای خطی می‌باشد. همچنین تأثیر دامنه و برد در رفتار تابع با توجه به نمودار آن را یادآوری می‌کند.

## حل فعالیت صفحه ۶۱

(الف)

$$(۹۶۰ \text{ و } ۱۰) \text{ و } (۶۰ \text{ و } ۰)$$

$$m = ۹۰ \quad ; \quad y - ۶۰ = ۹۰(x - ۰)$$

$$\rightarrow y = ۹۰x + ۶۰$$

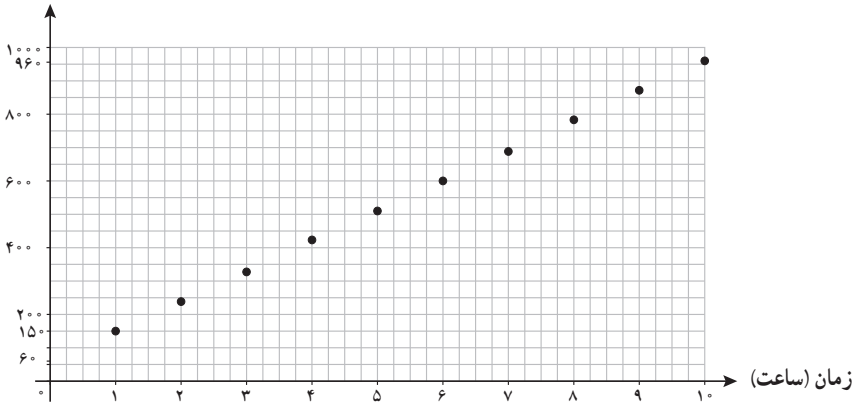
$$D = \{x | x \in \mathbb{R}, ۰ \leq x \leq ۱۰\}$$

$$R = \{y | y \in \mathbb{R}, ۶۰ \leq y \leq ۹۶۰\}$$

نمودار (۲)

(ب)

فاصله تا بندرعباس (کیلومتر)



(ج)

$$y = 90x + 60$$

$$D = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$R = \{150, 240, 330, 420, 510, 600, 690, 780, 870, 960\}$$

ضابطه‌ها تفاوتی ندارند.

دامنه و برد نمودار (۱) متعلق به قطعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی است، اما دامنه و برد نمودار (۲) متعلق به قطعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

(د)

جدول ۱

فاصله تا بندرعباس	مسافت	نام دو ایستگاه متوالی
$60 + 125 = 185$	۱۲۵	ایستگاه بارگیری - تزرچ
$185 + 145 = 330$	۱۴۵	تزرچ - گل گهر
$330 + 60 = 390$	۶۰	گل گهر - سیرجان
$390 + 155 = 545$	۱۵۵	سیرجان - میمند
$545 + 145 = 690$	۱۴۵	میمند - بافق
$690 + 130 = 820$	۱۳۰	باقف - جندق
$820 + 140 = 960$	۱۴۰	جندق - طبس

(هـ)

## جدول ۲

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = 60 + 90 = 150$	$a_2 = a_1 + 90$ $= 60 + 90 + 90$ $= 60 + 2 \times 90 = 240$	$a_3 = a_2 + 90$ $= 60 + 2 \times 90 + 90$ $= 60 + 3 \times 90 = 330$	$a_4 = a_3 + 90$ $= 60 + 4 \times 90$ $= 420$	$a_5 = a_4 + 90$ $= 60 + 5 \times 90$ $= 510$

$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$a_6 = a_5 + 90$ $= 60 + 6 \times 90$ $= 600$	$a_7 = a_6 + 90$ $= 60 + 7 \times 90$ $= 690$	$a_8 = a_7 + 90$ $= 60 + 8 \times 90$ $= 780$	$a_9 = a_8 + 90$ $= 60 + 9 \times 90$ $= 870$	$a_{10} = a_9 + 90$ $= 60 + 10 \times 90$ $= 960$

(و)

ایستگاه‌های گل گهر، بافق و طبس. با توجه به جدول ۱، فاصله ایستگاه‌ها تا بندرعباس مشخص می‌شود و طبق جدول ۲،  $a_n$  مسافت طی شده قطار در  $n$  ساعت پس از ترک ایستگاه است، یعنی تا ایستگاه گل گهر ۳ ساعت، تا ایستگاه بافق ۷ ساعت و تا ایستگاه طبس ۱۰ ساعت زمان سپری شده است و این ایستگاه‌ها محل تماس راهبر قطار می‌باشند.

(ز)

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + 90 \\ a_4 = a_3 + 2 \times 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{10} + 90 \\ a_{12} = a_{11} + 10 \times 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7 = a_6 + 90 \\ a_8 = a_7 + 6 \times 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_8 = a_7 + 6 \times 90 \\ a_9 = a_8 + 3 \times 90 \end{cases}$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times 90 \quad (۱)$$

$$a_n - a_{n-1} = 90 \quad (\text{رابطه بازگشتی})$$

$$a_n - a_m = (n-m) \times 90$$

(ح) اختلاف هر دو جمله متوالی ثابت است.

(ط) هر دو به صورت الگوی خطی هستند.

دانش‌آموزان با حل این فعالیت به مفهوم دنباله حسابی پی می‌برند. این فعالیت نشان می‌دهد که دنباله حسابی همان الگوی خطی است و در این دنباله اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است که به آن

اختلاف مشترک می‌گویند. پس از نتیجه‌گیری از حل این فعالیت، در صفحه ۶۳، تعریف کاملی از دنباله حسابی و ویژگی و فرمول جمله عمومی آن بیان شده است.

هدف از کار در کلاس‌های صفحه ۶۴، این است که دانش‌آموزان در حل مسئله ریاضی و حل مسائلی از دنیای واقعی مربوط به بحث دنباله حسابی توانایی کسب نمایند. در قسمت ۲ کاردرکلاس اول، به تأثیر اختلاف مشترک،  $d$ ، در جملات دنباله حسابی اشاره می‌کند، اگر  $d$  مثبت باشد دنباله افزایشی، اگر  $d$  منفی باشد دنباله کاهش‌ی و اگر  $d$  صفر باشد دنباله ثابت است.

### حل کار در کلاس دوم صفحه ۶۴

اگر  $a_n$  عمق چاه حفر شده  $n$ ام تا سطح کانال قنات باشد، با توجه به پرسش، عمق هر چاه نسبت به چاه پیشین نیم متر کاهش یافته است. پس:

$$a_1 = 3^\circ, \quad a_2 = 29/5, \quad a_3 = 29, \quad \dots, \quad a_n = 1/5$$

در این صورت  $d = -\frac{1}{5}, a_1 = 3^\circ, a_n = 1/5$ :

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 1/5 = 3^\circ + (n-1) \times (-\frac{1}{5}) \rightarrow n-1 = 57 \rightarrow n = 58$$

۵۸ چاه حفر شده که شامل یک مادر چاه و ۵۷ میله چاه است.

در صفحه ۶۵، برای اطلاعات عمومی و ترغیب دانش‌آموزان به یادگیری، مطلب خواندنی مرتبط با مسئله قنات که مربوط به تاریخچه قنات در ایران می‌باشد، بیان شده است، تا به این طریق دانش‌آموزان کاربرد مفاهیم ریاضی در پدیده‌های محیط پیرامون و زندگی روزمره را به خوبی درک نمایند.

هدف از کاردرکلاس صفحه ۶۶، این است که نشان دهد شیب خط در تابع خطی، همان اختلاف مشترک دنباله حسابی است.

در صفحه ۶۷، نمایش‌های مختلف ریاضی برای درک مفهوم دنباله حسابی مطرح شده است و هدف این است که دانش‌آموزان شباهت ضابطه دنباله با معادله خط و تفاوت دامنه و برد آنها را درک کنند. همچنین تأکید شود برای تشخیص دنباله حسابی از روی نمودار، همه نقاط به مختصات  $(n, a_n)$  که  $n \in N$ ، روی یک خط واقع هستند.

### حل فعالیت صفحه ۶۸

(الف)

$$a_1 = 25^\circ - 15 = 235, \quad a_n = 13^\circ, \quad d = -15$$

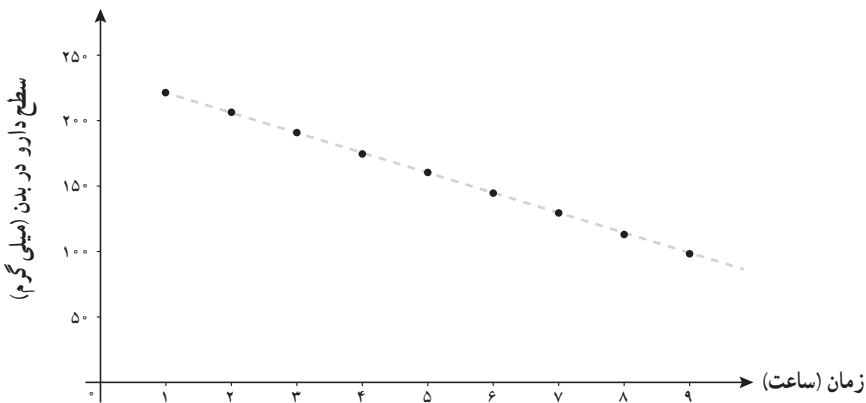
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$130 = 235 + (n-1) \times (-15)$$

$$-105 = -15n + 15 \rightarrow -15n = -120 \rightarrow n = 8 \text{ (۸ ساعت پس از مصرف دارو)}$$

(ب)

زمان $n$ (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	...
سطح دارو در بدن پس از $n$ ساعت $a_n$	۲۳۵	۲۲۰	۲۰۵	۱۹۰	۱۷۵	۱۶۰	۱۴۵	۱۳۰	۱۱۵	...



(ج)

پس از ۵ ساعت، میزان داروی قبلی در بدن = ۱۷۵ میلی گرم

میزان داروی قرص جدید = ۲۵۰ میلی گرم

پس از مصرف قرص جدید  $a_1 = 425 \rightarrow$  میلی گرم  $175 + 250 = 425$

$$130 = 425 + (n-1) \times (-15) \rightarrow n-1 = \frac{59}{3} \rightarrow n = \frac{62}{3} = \frac{63}{3} - \frac{1}{3} = 21 - \frac{1}{3}$$

یعنی پس از بیست ساعت و چهل دقیقه بعد از خوردن قرص دوم، سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی گرم

خواهد شد.

حل کار در کلاس صفحه ۶۸

$$260,000 \times \frac{9}{100} = 2,340,000 \rightarrow a_1 = 2,340,000 + 11,000 = 2,351,000$$

پس از یک ساعت اضافه کاری

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 3,000,000 = 2,351,000 + (n-1) \times 11,000$$

$$649,000 = (n-1) \times 11,000 \rightarrow n-1 = 59 \rightarrow n = 60 \text{ ساعت}$$

طبق فرض مسئله، ماه ۳۰ روزه در نظر گرفته شده است. پس یعنی  $2 = 30 \div 60$  روزی ۲ ساعت اضافه کاری داشته باشد تا دریافتی او ۳ میلیون تومان شود.

در صفحه ۶۹، مبحث مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله عددی (حسابی) با روش محاسبه گاوس، برای حل مسئله «محاسبه تعداد روز کاری یک مقنی برای حفر چاه‌های قنات» مطرح شده است، تا دانش آموزان استدلال رابطه مجموع جملات دنباله حسابی را به طور شهودی درک کرده و سطح مطلوبی از یادگیری در آنان ایجاد گردد. سپس با نتیجه‌گیری از این فعالیت، رابطه مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی بیان می‌شود. هدف این است که از طریق حل این گونه مسئله‌ها، یادگیری معنادار صورت گیرد و مسیر و جریان رشد و توسعه مفهومی ریاضی را آشکار سازند.

در کاردر کلاس صفحه ۷۰، سؤالات متنوعی برای تعیین مجموع  $n$  جمله اول دنباله حسابی مطرح شده است.

### حل کار در کلاس صفحه ۷۰

۱

(الف)

$$n = \frac{199 - (-1)}{5} + 1 = 41 \rightarrow S_{41} = \frac{41}{2}(-1 + 199) = 20/5 \times 198 = 4059$$

(ب)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -2 \\ a_2 = 5 + a_1 = 5 + (-2) = 3 \\ a_3 = 5 + a_2 = 5 + 3 = 8 \\ a_4 = 5 + a_3 = 5 + 8 = 13 \\ \vdots \end{array} \right\} \rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times (-2) + (10 - 1) \times 5) = 205$$

۲

$$a_1 = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{30} = a_1 + (30 - 1)d = 1 + 29 \times 2 = 1 + 58 = 59$$

$$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15 \times (1 + 59) = 15 \times 60 = 900$$

۳

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow 870 = \frac{n}{2}(2 \times 15 + (n-1) \times 3)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 1740 = 3n + 3n^2 - 3n \rightarrow 3n^2 + 27n - 1740 = 0$$

$$\rightarrow n^2 + 9n - 580 = 0 \rightarrow \Delta = (9)^2 - 4(1)(-580) = 81 + 2320 = 2401$$

$$n = \frac{-9 \pm \sqrt{2401}}{2} \rightarrow \begin{cases} n = \frac{-9 + 49}{2} = \frac{40}{2} = 20 & \text{بیست ردیف} \\ n = \frac{-9 - 49}{2} = \frac{-58}{2} = -29 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

## توصیه‌های آموزشی

■ برای ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان به یادگیری درس، با توجه به نمونه مسائلی از دنیای واقعی که در فعالیت‌ها و تمرینات این فصل مطرح شده است، ترغیب شوند با دقت به محیط پیرامون خود، مثال‌هایی که مرتبط با موضوع و مفاهیم درس است را یافته و در کلاس ارائه دهند. این روش به پرورش خلاقیت دانش‌آموزان نیز کمک خواهد نمود.

■ با روش گفت‌وگو ریاضی در کلاس، یعنی ارتباط کلامی دانش‌آموزان با یکدیگر و با معلم، باعث می‌شود معلم با بسیاری از تفکرات، ایده‌ها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان آشنا شده و امکان برطرف کردن آنها را در کلاس و با مشارکت دیگر دانش‌آموزان پیدا کند. این مستلزم تمرکز و بازتاب بر فرایند حل مسئله ریاضی و به ویژه پس از ارائه پاسخ از طرف دانش‌آموزان است.

■ با نشان دادن ارتباط میان مفاهیم ریاضی مطرح شده، می‌توان دانش‌آموزان را در تثبیت و تعمیق مفاهیم آموزش داده شده، یاری نمود.

■ برای حل مسئله‌ها و تمرینات کتاب، دانش‌آموزان را محدود به استفاده از یک روش خاص نکنیم و اجازه دهیم از روش‌های درست دیگر برای حل مسئله استفاده کنند.

■ سطح سؤالات ارزشیابی از محدوده مطالب کتاب فراتر نرود و در سطح مسائل مطرح شده در کتاب درسی باشد.

## اشتباهات رایج دانش‌آموزان

■ معمولاً در رسم نمودار دنباله حسابی، به اشتباه نقاط را به هم وصل می‌کنند.

■ ممکن است در تشخیص و شناسایی اینکه کدام جمله عمومی یا کدام نمودار از دنباله‌ها، مربوط به دنباله حسابی است، دچار اشتباه شوند.

■ برخی از دانش‌آموزان فقط فرمول حفظ می‌کنند بدون اینکه درک درستی از مفهوم و ویژگی مربوط به آن را داشته باشند و دچار بدفهمی و اشتباه می‌شوند.

■ ممکن است در حل مسئله‌ها بر اثر بی‌دقتی، خطاهای محاسباتی داشته باشند.

حل تمرینات درس دوم (صفحه ۷۱ کتاب)

۱ با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف)  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$   $a_1 = 2$  دنباله حسابی نیست.

ب)  $a_{n+1} = a_n + 5$   $a_1 = -1$   $-1, 4, 9, 14, \dots$  دنباله حسابی است.

ج)  $a_{n+1} = 5a_n + 1$   $a_1 = -1$   $-1, -4, -19, -94, \dots$  دنباله حسابی نیست.

د)  $a_{n+1} - a_n = n$   $a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 2, a_4 - a_3 = 3, a_5 - a_4 = 4$  دنباله حسابی نیست. زیرا اختلاف بین دو جمله متوالی ثابت نیست.

۲ در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$$a_1 = -5, d = 8, a_n = 555$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 555 = -5 + (n-1) \times 8$$

$$555 = -5 + 8n - 8 \rightarrow 8n = 568 \rightarrow n = 71$$

۳ یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

$$a_{11} = 52, a_{19} = 92 \rightarrow d = \frac{92-52}{19-11} = \frac{40}{8} = 5$$

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d \rightarrow 52 = a_1 + 10 \times 5 \rightarrow a_1 = 2$$

$$a_{30} = a_1 + (30-1)d \rightarrow a_{30} = 2 + 29 \times 5 = 147$$

۴ برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل



مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

$$a_1 = 3, d = 5, n = 12$$

فاصله دوازدهمین چرخ تا موتور ۵۸ متر است. (شعاع دایره‌ای است که توسط این میله آبیاری می‌شود.)

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{12} = 3 + (12-1) \times 5 = 58$$

$$S = \pi r^2 \approx 3/14 \times (58)^2 = 10562/96 \text{ متر مربع}$$



۵ در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن  $۱۲۵۰۰$  گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین  $۱۸۷۵$  گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

$$a_1 = 12500 - 1875 = 10625, \quad d = -1875$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_6 = 10625 + (6-1) \times (-1875) = 1250$$

۶ میان دو عدد  $a$  و  $b$ ، عدد  $n$  را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله  $a$  تا  $b$  یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه  $d = \frac{b-a}{n+1}$  به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات  $(n+2)$  جمله است.)

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{n+2} - a_1}{n+2-1} = \frac{b-a}{n+1}$$

۷ براساس رابطه به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد  $۱۰$  و  $۱۸$  قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

$$d = \frac{18-10}{3+1} = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow 10, 12, 14, 16, 18$$

۸ مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

۴۰۱ و ..... و ۹ و ۵ و ۱ (الف)

۱۳ و ... و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹ (ب)

$$\text{الف) } n = \frac{401-1}{4} + 1 = 101 \rightarrow S_{101} = \frac{101}{2}(1+401) = 20301$$

$$\text{ب) } n = \frac{13-89}{-4} + 1 = 20 \rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(89+13) = 1020$$



۹ باغ‌داران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان  $۱۲۵$  سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن  $۴۵$  سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله  $۱۰$  سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به

چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

$$d = \frac{b-a}{n+1} \rightarrow -10 = \frac{45-125}{n+1} \rightarrow -10n-10 = 45-125 \rightarrow -10n = -70 \rightarrow n = 7$$

۷ پله بین دو پله قرار دارد، پس نردبان کلاً ۹ پله دارد.

طول پله‌ها:  $125 + 115 + \dots + 45$

$$S_9 = \frac{9}{2}(125+45) = 765 \quad \text{متر} \quad 765 \div 100 = 7/65 \text{ سانتی متر}$$

**۱۰** ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران — عمق مادر چاه قنات زارچ  $84/6$  متر

است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م)، ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله)  $12^\circ$  سانتی متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل

قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی)  $25^\circ$  هزار تومان باشد، هزینه

حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه

به میانگین هزینه  $35^\circ$  هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی:  $a_n$ :

را عمق چاه  $n$ م تا کانال قنات و  $a_1$  را عمق مادر چاه در نظر بگیرید.)

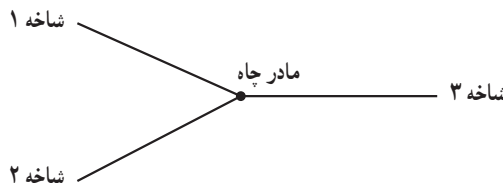
الف)  $a_n = 12^\circ$  با فرض

$$\begin{cases} a_1 = 84/6 \times 100 = 8460 \text{ cm} \\ a_{56} = 78 \times 100 = 7800 \text{ cm} \end{cases} \rightarrow d = \frac{7800 - 8460}{55} = -12 \text{ cm}$$

$$12^\circ = 8460 + (n-1) \times (-12) \rightarrow 12n = 8352 \rightarrow n = 696 \text{ میله}$$

$$\text{ب) } S_{696} = \frac{696}{2}(8460 + 12^\circ) = 298584^\circ \text{ cm} = 29858/4 \text{ m}$$

$$\text{مجموع طول کل چاه‌های حفر شده} = 3 \times 29858/4 - 2 \times 84/6 = 8940.6 \text{ m}$$



ج) هزینه  $c(x) = ۸۹۴۰۶ \times ۲۵۰۰۰۰ = ۲۲۳۵۱۵۰۰۰۰۰$

د) هزینه حفر کانال:  $۷۱۰۰۰ \text{ m} \times \text{تومان } ۳۵۰۰۰۰ = ۲۴۸۵۰۰۰۰۰۰۰$

ارزش حفاری قنات زارچ:  $۲۴۸۵۰۰۰۰۰۰ + ۲۲۳۵۱۵۰۰۰۰۰ = ۴۷/۲۰۱/۵۰۰/۰۰۰$