# فصل ۵

# کاربرد مشتق

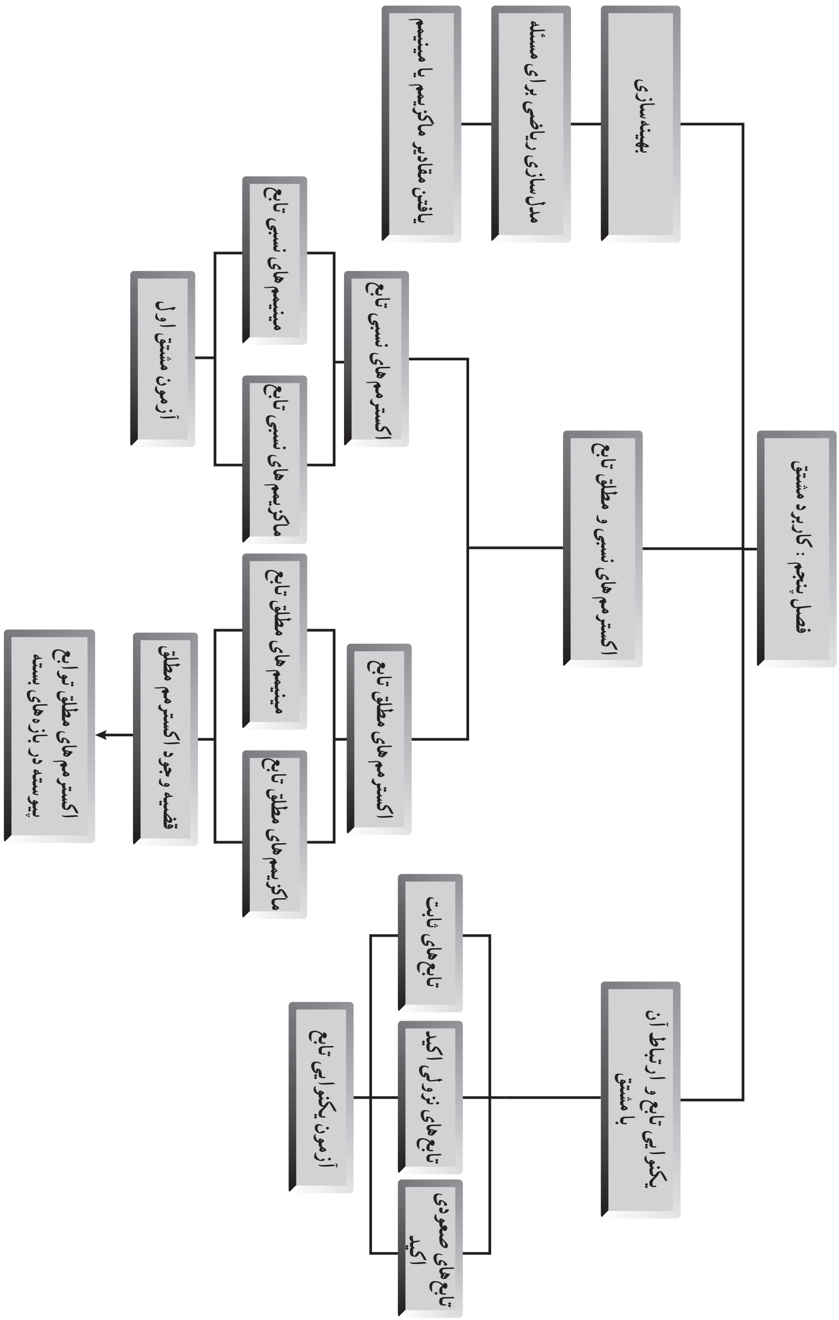
## نگاه کلی به فصل

در فصل قبل دانش‌آموزان با یکی از مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال یعنی مشتق تابع آشنا شده‌اند؛ بنابراین بهتر است که کاربردهای آن را نیز ملاحظه کنند. در این فصل بعضی از کاربردهای مشتق تابع ارائه شده است.

کاربردهایی که در این فصل مطرح شده شامل بررسی یکنوایی تابع، یافتن نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع و همچنین حل مسائل بهینه‌سازی است. برای شروع مطلب ابتدا دانش‌آموز ضمن انجام فعالیت با مفهوم و اهمیت موضوع آشنا شده و در ادامه با استفاده از قضایا و آزمون‌های مطرح شده در کتاب، روش‌های مورد نظر را فرا می‌گیرد. سپس مثال‌های معلم برای کمک به ساخت دانش در ذهن فراگیران ارائه می‌شود و در ادامه دانش‌آموزان با انجام کار در کلاس مفاهیم را بهتر می‌آموزند. در پایان انجام تمرین‌ها در منزل به تثبیت یادگیری آنها کمک می‌کند.

بهینه‌سازی، کاربردی‌ترین بخش مشتق تابع است و به همین دلیل در این فصل، یک درس مستقل به آن اختصاص یافته است. در این درس است که دانش‌آموزان می‌توانند برای مسائل مختلفی از دنیای واقعی، مدل‌های ریاضی ارائه کنند و به کمک روش‌هایی که در فصل ۴ و درس اول از فصل حاضر فرا گرفته‌اند، آنها را حل کنند. بهینه‌سازی درس دوم این فصل است. درس اول نیز به پیش‌نیازها، مفاهیم و روش‌هایی پرداخته است که در درس دوم مورد نیاز خواهند بود.

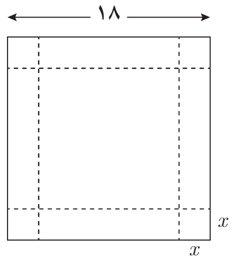
## نقشه مفهومی فصل پنجم



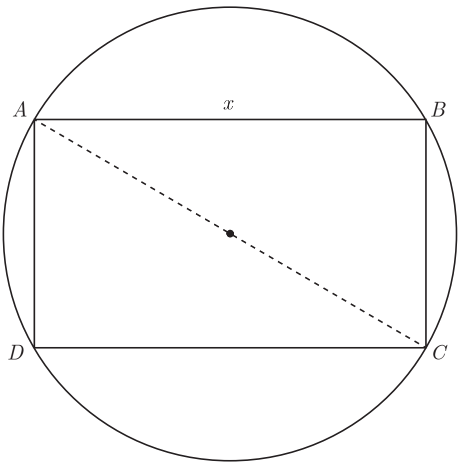
## نمونه‌سؤال‌های ارزشیابی

۱ دو عدد پیدا کنید که مجموعشان ۶ و مجموع مربعات آنها کمترین مقدار ممکن باشد.

۲ از یک قطعه مقوای مربع شکل به ضلع ۱۸ سانتی‌متر می‌خواهیم یک قوطی در باز بسازیم. برای این منظور از چهار گوشه این مقوا چهار مربع بریده اطراف آن را تا می‌کنیم. مربع‌های اطراف را به ضلع چند سانتی‌متر انتخاب کنیم تا حجم قوطی حاصل بیشترین مقدار ممکن باشد؟




۳ در دایره‌ای به شعاع ۵ مستطیلی به مساحت ماکزیمم محاط کرده‌اند، اضلاع مستطیل را بیابید.




۴ ثابت کنید اگر حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی و مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم خواهد بود که دو عدد با هم برابر باشند.

۵ ثابت کنید اگر حاصل جمع دو عدد حقیقی و مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم خواهد بود که آن دو عدد با هم برابر باشند.

۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۲x}{x^۲+۱}$ را در بازه [۲ و ۲−] در نظر بگیرید و اکسترمم‌های مطلق آن را در این بازه بیابید.

۷ تابع $y=ax^۲+bx-۳$ داده شده‌است. ضریب‌های $a$ و $b$ را چنان بیابید که (۴− و ۱−) یک نقطه اکسترمم نسبی آن باشد.

۸ اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x)=۲x^۳-۳mx^۲$ برابر ۸ باشد، مقدار $m$ را بیابید.

۹ نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=x^۳-۳x+۱$ در بازه $[-\frac{۳}{۲}$ و $۳]$ را بیابید.

۱۰ توپی به فضا پرتاب می‌شود. مسیر حرکت توپ به‌گونه‌ای است که در ثانیهٔ tام در ارتفاع $h(t)=۳۰t-۵t^۲$ متری قرار دارد.

الف) در ثانیهٔ چندم پس از پرتاب، توپ در بالاترین نقطه ممکن قرار دارد؟

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج توپ چقدر است؟

۱۱ تابع $f(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$ روی بازه‌ای مثل [a,b] صعودی اکید است بیشترین مقدار $b-a$ را محاسبه کنید.

۱۲ مشخص کنید تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۷$ در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

۱۳ مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که در نیم‌دایره‌ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره قرار دارد.

درس اول

# اکسترمم‌های تابع

## اهداف درس

❑ برقراری ارتباط بین علامت مشتق تابع و یکنوایی آن تابع در یک بازه
❑ آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم اکسترمم نسبی و مطلق تابع و همچنین توانایی آنان در محاسبه مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق برخی توابع
❑ توانا ساختن دانش‌آموزان جهت بررسی رفتار برخی توابع با استفاده از تعیین علامت مشتق آنها

## روش تدریس

موضوعات نسبتاً متنوع و در عین حال مرتبطی در این درس مطرح شده‌اند که عبارتند از :
❑ یکنوایی تابع و ارتباط آن با علامت مشتق آن تابع
❑ اکسترمم‌های نسبی تابع
❑ نقاط بحرانی تابع
❑ اکسترمم‌های مطلق تابع

این موضوعات را می‌توان با ترتیب‌های مختلفی به دانش‌آموزان تدریس کرد. امّا ترتیب ارائه شده در این کتاب با بررسی فراوان انتخاب شده است. ابتدا دانش‌آموز با یکنوایی تابع و ارتباط آن با علامت مشتق تابع در یک بازه آشنا می‌شود. به کمک یکنوایی تابع می‌توان مفهوم نقطه‌های اکسترمم نسبی را بیان کرد. در مسیر معرفی اکسترمم‌های نسبی، مفهوم نقطهٔ بحرانی ضرورت پیدا می‌کند و الی آخر. توصیه می‌شود که تدریس مفاهیم با همین ترتیبی که در کتاب آمده است انجام گیرد.

**یکنوایی تابع و ارتباط آن با علامت مشتق** : دانش‌آموزان در فصل اول با مفهوم یکنوایی تابع و

در فصل چهارم با مشتق تابع آشنا شده‌اند. در اینجا ابتدا به ارتباط بین این دو موضوع پرداخته می‌شود. فعالیت آغازین درس در صفحه ۱۰۲ و ۱۰۳ تلاش دارد تا با یک نگرش استقرایی، دانش‌آموز را به ارتباط بین علامت مشتق تابع در یک بازه و صعودی یا نزولی بودن تابع در آن بازه سوق دهد. کار در کلاس پایین صفحهٔ ۱۰۳ نیز به این موضوع پرداخته است. در نهایت، آزمون یکنوایی تابع که انتظار می‌رود پس از انجام فعالیت و کار در کلاس مربوطه، دانش‌آموز خود به آن پی برده باشد، در صفحه ۱۰۴ ارائه گردیده است.

**اکسترمم‌های نسبی تابع و نقاط بحرانی تابع :** ابتدا اکسترمم‌های نسبی تابع به شکل غیر رسمی در انتهای صفحه ۱۰۴ معرفی شده است و پس از آن در صفحه ۱۰۵ تعاریف رسمی مربوطه ذکر شده‌اند. به‌صورت تعمدی، بحث نقطهٔ بحرانی پس از اکسترمم‌های نسبی تابع آمده است تا ضرورت تعریف چنین مفهومی برای دانش‌آموز احساس شود. در ادامه، قضیه فرما آمده است که به ارتباط بین نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع و نقاط بحرانی آن مربوط است. در نهایت با مقدمه‌چینی مناسب، آزمون مشتق اول ارائه شده است که در درس بعدی نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

**اکسترمم‌های مطلق تابع :** مفهوم اکسترمم‌های مطلق تابع در صفحه ۱۰۹ با یک مثال دنیای واقعی شروع شده است و سپس تعاریف رسمی آنها آمده‌اند. کار در کلاس صفحه ۱۱۰ کتاب یک جمع‌بندی و مرور نسبتاً جامع از بیشتر مفاهیم مطرح شده در این درس با تأکید بر بازنمایی هندسی می‌باشد.

آخرین مطلب این درس، به روش یافتن اکسترمم‌های مطلق توابع پیوسته در بازه‌های بسته پرداخته است که قضیه مربوطه و روش مورد نظر در صفحه (۱۱۱) ذکر شده است.

### چند نکته در مورد تدریس درس اول از فصل پنجم کتاب

۱ در سراسر این درس، دو مورد جدول تغییرات تابع آمده است که اولاً در انواع ارزشیابی‌های مختلف نباید تأکید زیادی بر این گونه جدول‌ها باشد؛ به عبارت دیگر در کتاب، جدول تغییرات مربوط به یک تابع آمده است و سپس رفتار آن تابع به کمک این جدول توضیح داده شده است. به استثنای دو تمرین پایان درس، هیچ‌گاه از دانش‌آموز خواسته نشده است که برای تابع خاصی، جدول تغییرات را رسم نمایند. ثانیاً جدول‌های رفتار تابع که در متن درس آمده‌اند، مربوط به تابع‌های چند جمله‌ای درجه دوم و سوم هستند و به تابع‌های دیگر پرداخته نشده است. با توجه به اینکه خطوط مجانب تابع جزء سرفصل‌های کتاب ریاضی ۳ تجربی نیستند، در تدریس کلاسی و ارزشیابی‌ها به این نکته باید توجه ویژه نمود.

۲ در مفاهیمی که در این درس برای اولین بار دانش‌آموزان با آنها مواجه می‌شوند، تأکید بر بازنمایی هندسی است و در بیشتر موارد شروع بحث با رویکرد هندسی است و سپس به بازنمایی جبری پرداخته می‌شود که لازم است در تدریس این مفاهیم به این نکته هم توجه شود.

۳ همانند جاهای دیگر کتاب، سعی شده است از سؤالات باز پاسخ در قسمت‌های مختلف استفاده

شود. استفاده از اینگونه سؤال‌ها در جریان تدریس و همچنین در انواع ارزشیابی‌ها توصیه می‌شود.

## پاسخ کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۰

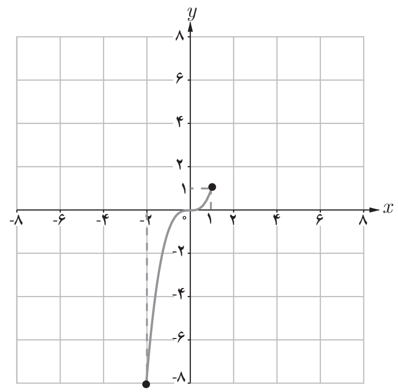
۱

| طول نقطه | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max مطلق | × | × | × | × | × | × | × | × | ✓ |
| min مطلق | × | × | × | × | × | × | ✓ | × | × |
| max نسبی | × | × | ✓ | × | ✓ | × | × | × | × |
| min نسبی | × | ✓ | × | ✓ | ✓ | × | ✓ | × | × |
| نقطه بحرانی | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | ✓ |

۲

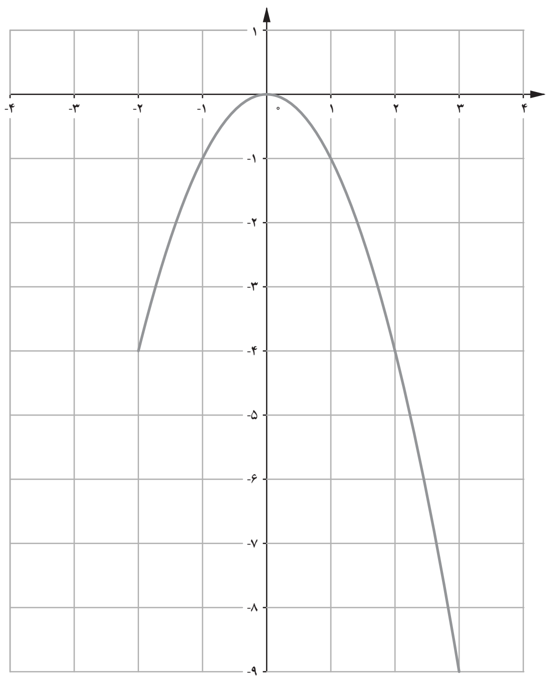
الف) $t(x) = x^۳ \, , x \in [-۲,۱]$

الف) اکسترمم نسبی ندارد. در نقطه به طول ۱ ماکزیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۱ است. در نقطه به طول ۲− مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۸− است.



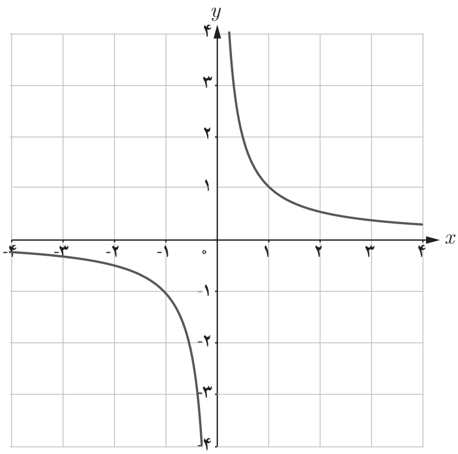
ب) $g(x) = -x^{۲}\ ,\ x \in [-۲,۳]$

ماکزیمم نسبی و مطلق در مبدأ مختصات دارد که مقدار آنها صفر است. مینیمم مطلق در نقطه به طول ۳ و با مقدار ۹−



پ) $u(x) = \frac{۱}{x}$

اکسترمم مطلق و نسبی ندارد.



## حل تمرین‌های صفحه ۱۱۲ کتاب درسی

**۱**

$$f(x) = x^3 - 12x + 4 \qquad f'(x) = 3x^2 - 12 < 0 \Rightarrow x^2 < 4$$

$$\Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow x \in (-2\,,\,2)$$

مشتق در این بازه منفی است.

بنابراین، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است، عبارت است از $[-2, 2]$.

**۲**

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\ ,\ g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

تابع $g$ در بازهٔ $(-\infty\,,\,0]$ صعودی اکید و در بازهٔ $[0\,,\,+\infty)$ نزولی اکید است.

**۳**

الف) $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

$D_f = [-2,2]$

بنابراین، نقاط به طول‌های $-2$ و $2$ و $0$، نقاط بحرانی $f$ هستند.

ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

بنابراین نقاط بحرانی تابع عبارت‌اند از $(0\,,\,-4)$ و $(-2\,,\,0)$

پ) $h(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

چون $0 \in D_h$ و $0 \notin D_{h'}$ بنابراین نقطهٔ $(0\,,\,0)$ یک نقطهٔ بحرانی برای تابع $h$ است.

**۴**

الف) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -3 \end{cases} \text{(نقاط بحرانی تابع)}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-۳$ | | $۱$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $۱۷$ | ↘ | $-۱۵$ | ↗ | $+\infty$ |

max نسبی     min نسبی

ب) $g(x)=-۲x^{۳}+۳x^{۲}+۱۲x-۹ \Rightarrow g'(x)=-۶x^{۲}+۶x+۱۲=۰$

$\Rightarrow -x^{۲}+x+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۲ \end{cases}$ (نقاط بحرانی)

| $x$ | $-\infty$ | | $-۱$ | | $۲$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $۰$ | $+$ | $۰$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $-۱۶$ | ↗ | $۱۱$ | ↘ | $-\infty$ |

min نسبی     max نسبی

پ) $h(x)=-x^{۳}-۳x+۲ \Rightarrow y'(x)=-۳x^{۲}-۳<۰ \Rightarrow$

تابع $h$ همواره نزولی اکید است و بنابراین فاقد ماکزیمم و مینیمم نسبی است.

**۵**

الف) $f(x)=-۲x^{۳}+۹x^{۲}-۱۳ \Rightarrow f'(x)=-۶x^{۲}+۱۸x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰,-۱,۲ \\ x=۳ \notin [-۱,۲] \end{cases}$

طول نقاط بحرانی تابع عبارت‌اند از صفر، ۱− و ۲.

| $x$ | $-۱$ | $۰$ | $۲$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-۲$ | $-۱۳$ | $۷$ |

با توجه به جدول، مقدار ماکزیمم مطلق تابع f در بازه [۲ و ۱−] برابر ۷ و مقدار مینیمم مطلق آن در این بازه برابر ۱۳− است.

ب) $g(x)=x^{۳}+۲x-۵ \Rightarrow y'=۳x^{۲}+۲\neq ۰ \Rightarrow x=-۲\,,\,۱$ طول نقاط بحرانی

| $x$ | $-۲$ | $۱$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $-۱۷$ | $-۲$ |

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $g$ در بازهٔ [۱ , ۲−] به ترتیب برابر ۲− و ۱۷− می‌باشد.

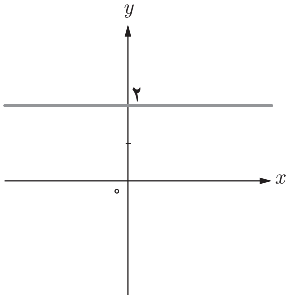
۶

$$f(x) = x^{۳} + bx^{۲} + d$$

$$(۲,۱) \in f \Rightarrow f(۲) = ۱ \Rightarrow ۸ + ۴b + d = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$$

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۲bx \overset{f'(۲)=۰}{\Longrightarrow} ۱۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۳ \Rightarrow d = ۵$$

۷ بی‌شمار تابع با ویژگی خواسته شده می‌توان معرفی کرد؛ مثل تابع ثابت، تابع جزء صحیح، تابع علامت و ...




$y = ۲ \qquad f'(x) = ۰$

درس دوم

# بهینه‌سازی

## اهداف درس

❑ آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم بهینه‌سازی به عنوان یکی از کاربردهای مهم مشتق تابع
❑ تسلط دانش‌آموزان به مدل‌سازی ریاضی از پدیده‌ها و مسائل دنیای واقعی و حل آنها به کمک مشتق تابع

## روش تدریس

بهینه‌سازی یکی از کاربردی‌ترین حوزه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال است. دانش‌آموزان بهینه‌سازی به کمک تابع درجه ۲ را در پایهٔ یازدهم فرا گرفته‌اند و به همین دلیل مثال آغازین درس نیز تابعی از درجه ۲ انتخاب شده است. حتی در شروع کار، مستقیماً تابع درجه ۲ را در حالت کلی در نظر نگرفته‌ایم بلکه فعالیت آغازین درس در صفحه ۱۱۳ یک مثال گسسته است که درک و تجربهٔ آن برای دانش‌آموز راحت است و پس از آن مثال‌های پیوسته عرضه شده است.

با توجه به اینکه دانش‌آموزان رشته تجربی، مشتق توابع مثلثاتی و معکوس مثلثاتی را در فصل قبل نیاموخته‌اند، بنابراین برای مثال‌های قابل ارائه در این درس دچار محدودیت بودیم. با این حال مثال‌های متنوعی از هندسه، فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد و معماری در این درس گنجانده شده است که تابع‌های مورد استفاده در آنها چند جمله‌ای، گویا یا رادیکالی هستند و دانش‌آموزان با مشتق آنها آشنا هستند.

با نگاه به برنامه‌درسی تلفیقی، به مفهوم حرکت با سرعت ثابت توجه ویژه‌ای شده است به طوری که در این زمینه هم مثال حل شده در درس وجود دارد، هم در بخش کار در کلاس به آن پرداخته شده است و هم در تمرین‌های پایان درس. توصیه می‌شود که در تدریس این درس و همچنین در ارزشیابی‌ها نیز فقط سؤال‌های محض و ریاضی مطرح نگردد بلکه از حوزه‌های مختلف مانند فیزیک، زیست‌شناسی،

باستان‌شناسی، اقتصاد و معماری نیز مسائل واقعی طرح گردد.

با توجه به اینکه مخاطب این کتاب دانش‌آموزان رشته تجربی هستند، این درس شامل پنج مثال حل شده است تا آنها ارتباط مناسبی با موضوع برقرار کنند. همچنین در کار در کلاس انتهای درس که سه مسئله از حوزه‌های اقتصاد، فیزیک و معماری طرح شده است، قسمت مدل‌سازی ریاضی این مسائل در کتاب آورده شده است و دانش‌آموز تنها لازم است با مشتق‌گیری از تابع مربوطه بتواند مقدار بهینهٔ کمیت خواسته شده را به‌دست آورد. در واقع، فقط در تمرین‌های پایان درس لازم است تمام کار حل مسئله از جمله بخش مدل‌سازی ریاضی آن را خود دانش‌آموزان انجام دهند.

**تذکر** : اگر در حل یک مسئله بهینه‌سازی، جواب آخر به شکل یک عدد رادیکالی به‌دست آید، توصیه می‌شود که حتماً مقدار تقریبی آن به صورت اعشاری برای دانش‌آموز محاسبه شود تا او حس مناسبی نسبت به بزرگی عدد داشته باشد.

## حل کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۸

۱

$$S(r)=\pi r^{۲}+\frac{۲۰۰۰}{r}\qquad r>۰$$

$$S'(r)=۲\pi r-\frac{۲۰۰۰}{r^{۲}}=۰\Rightarrow \pi r^{۳}=۱۰۰۰\Rightarrow r=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\quad,\quad S(r)=۳۰۰\sqrt[۳]{\pi}$$

| $r$ | ۰ | | $\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'$ | | $-$ | ۰ | $+$ | |
| $S$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $۳۰۰\sqrt[۳]{\pi}$ | $\nearrow$ | ۰ |

پس اگر شعاع قاعده و همچنین ارتفاع استوانه هر دو برابر $r=h=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\simeq ۶/۸۳$ سانتی‌متر در نظر گرفته شوند، کمترین مقدار فلز مصرف خواهد شد.

۲

$$C(v)=\frac{۸۰۰۰۰۰}{v}+۳۲۰v\Rightarrow C'(v)=-\frac{۸۰۰۰۰۰}{v^{۲}}+۳۲۰=۰$$

$$\Rightarrow v^{۲}=\frac{۱۰۰۰۰}{۴}\Rightarrow v=\frac{۱۰۰}{۲}=۵۰\qquad C(۵۰)=۳۲۰۰۰$$

| $v$ | ۰ | | ۵۰ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'$ | | $-$ | ۰ | $+$ | |
| $C$ | $+\infty$ | $\searrow$ | ۳۲۰۰۰ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

بنابراین، اگر قطار با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، هزینهٔ آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن خواهد بود.

۳

$$x-y=۱۰ \Rightarrow y=x-۱۰$$

$$P=xy=x(x-۱۰)=x^{۲}-۱۰x \quad p'(x)=۲x-۱۰=۰ \qquad x=۵\ ,\ y=-۵$$

۴

$$S(r)=-(\frac{\pi+۴}{۲})r^{۲}+\frac{۹}{۲}r \qquad S'(r)=-(\pi+۴)r+\frac{۹}{۲}=۰$$

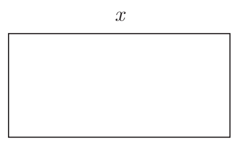
$$\Rightarrow r=\frac{۹}{۲(\pi+۴)} \qquad S(r)=\frac{۸۱}{۸(\pi+۴)}$$

| $r$ | ۰ | | $\frac{۹}{۲(\pi+۴)}$ | | $\frac{۹}{۲(\pi+۲)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(r)$ | | $+$ | ۰ | $-$ | |
| $S(r)$ | ۰ | $\nearrow$ | $\frac{۸۱}{۸(\pi+۴)}$ | $\searrow$ | $\frac{۸۱\pi}{۸(\pi+۲)^{۲}}$ |

پس اگر $r$ برابر $۳۲/۱۴ \simeq \frac{۹}{۲(\pi+۴)}$ سانتی‌متر در نظر گرفته شود، این پنجره بیشترین نوردهی را خواهد داشت.

## حل تمرین‌های صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

۱ الف)




$y=\frac{۱۰۰۰۰}{x}$ (واحد بر حسب میلیون تومان است)

$$C_{(x)}=۲x\times۲+۲\times\frac{۱۰۰۰۰}{x}\times۸ \Rightarrow C_{(x)}=۴x+\frac{۱۶۰۰۰۰}{x}$$

ب) $C'_{(x)} = 4 - \frac{160000}{x^{2}} = 0 \Rightarrow x^{2} = 40000 \Rightarrow x = 200 \Rightarrow y = \frac{10000}{200} = 50$

| $x$ | $0$ | | $200$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $C(x)$ | | $\searrow$ | $1600$ | $\nearrow$ | |

بنابراین اگر طول دیوارهای شمالی و جنوبی ۲۰۰ و عرض آن برابر ۵۰ متر باشد، هزینه دیوارکشی، حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

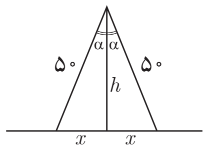
۲ الف)

$$h = \sqrt{2500 - x^{2}}$$

$$S_{(x)} = x\sqrt{2500 - x^{2}} \Rightarrow S'_{(x)} = \sqrt{2500 - x^{2}} - \frac{x^{2}}{\sqrt{2500 - x^{2}}}$$

$$s'(x) = 0 \Rightarrow 2500 - x^{2} = x^{2}$$

$$x^{2} = \frac{2500}{2} \Rightarrow x = \frac{50}{\sqrt{2}} \Rightarrow S\left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right) = 1250$$



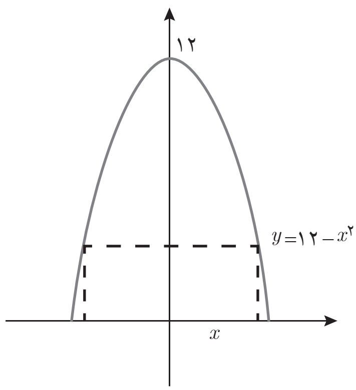

ب) از کلاس دهم می‌دانیم $S = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times \sin\alpha$ ، مقدار $S$ زمانی ماکزیمم می‌شود که مقدار $\sin\alpha$ برابر ۱ باشد پس $S_{\max} = \frac{1}{2} \times 50^{2} = 1250$

۳ الف)

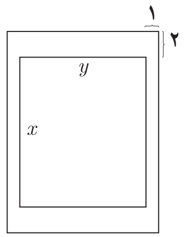
$$S = 2x(12 - x^{2}) = 24x - 2x^{3}$$

$$S' = 24 - 6x^{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $2\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S$ | $0$ | $\nearrow$ | $32$ max | $\searrow$ | $0$ |




پس طول مستطیل باید $2x = 4$ و عرض آن برابر $y = 12 - 2^{2} = 8$ باشد.




۴

$$xy = ۳۲$$

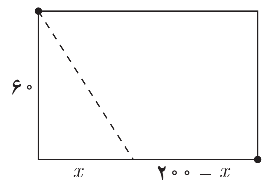
$$S = (y+۲)(x+۴) = (\frac{۳۲}{x}+۲)(x+۴) = ۴۰+\frac{۱۲۸}{x}+۲x$$

$$S'_{(x)} = -\frac{۱۲۸}{x^{۲}}+۲=۰ \Rightarrow x^{۲} = ۶۴ \Rightarrow x = ۸ \quad \text{و} \quad y = ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۴ = ۱۲ \\ y+۲ = ۶ \end{cases}$$ **ابعاد صفحه :**

پس اگر طول صفحه برابر $x + ۴ = ۱۲$ سانتی‌متر و عرض آن $y + ۲ = ۶$ سانتی‌متر(S = ۷۲) در نظر گرفته شود، مقدار کاغذ مصرفی مینیمم می‌شود.

۵




$$t(x) = \frac{۲۰۰-x}{۳}+\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}}}{۲}$$

$$t'(x) = -\frac{۱}{۳}+\frac{x}{۲\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳x = ۲\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}} \Rightarrow x = ۲۴\sqrt{۵} \simeq ۵۳/۶۷(\mathrm{m})$$

| **x** | ۰ | | $۲۴\sqrt{۵}$ | | ۲۰۰ |
|---|---|---|---|---|---|
| **t'(x)** | | − | ۰ | + | |
| **t(x)** | $۹۶\frac{۲}{۳}$ | ↘ | $\frac{۲۰۰}{۳}+۱۰\sqrt{۵}$ | ↗ | $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۳۶۰۰} \simeq ۱۰۴/۴$ |

پس اگر $x$ تقریباً ۵۳/۶۷ متر در نظر گرفته شود، آروین در کمترین زمان ممکن به ایستگاه خواهد رسید.