درس سوم

تابع وارون

اهداف درس

- ❑ تسلط بر مفهوم تابع وارون
- ❑ درک رابطه بین دامنه و برد یک تابع و وارون آن
- ❑ تشخیص وارون بودن دو تابع نسبت به هم
- ❑ محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون توابع خطی، درجهٔ دوم، $\sqrt{ax+b}$ ، $x^{۳}$ و $\sqrt[۳]{x}$
- ❑ تحدید دامنهٔ توابع غیر یک به یک برای تبدیل به تابعی یک به یک (وارون‌پذیر)

درس سوم با عنوان تابع وارون با یادآوری مفهوم وارون تابع یک به یک f(زوج مرتبی) از ریاضی **۲** آغاز می‌شود. اگر تابع یک به یک f را داشته باشیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب آن تابع جدیدی به دست می‌آید که تابع وارون f است و آن را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

به این ترتیب اگر نقطهٔ (a , b) روی نمودار f قرار داشته باشد نقطهٔ (b , a) روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. همین مطلب قرینه بودن نمودارهای f و $f^{-۱}$ را نسبت به خط $y = x$ نتیجه می‌دهد.

در مثال صفحهٔ **۲۴** یک تابع زوج مرتبی داده شده است که وارون آن را به دست آورده است و سپس دو تابع مرکب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را تشکیل می‌دهد. در هر تابع داریم :

$$(fof^{-۱})(x) = x \quad \text{و} \quad (f^{-۱}of)(x) = x$$

اما در $fof^{-۱}$:

$$fof^{-۱} = \{(۴ , ۴) , (۳ , ۳) , (۵ , ۵)\}$$

$fof^{-۱}$ تابع همانی با اعضای دامنهٔ $f^{-۱}$ است و در $f^{-۱}of$:

$$f^{-۱}of = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۳ , ۳)\}$$

$f^{-۱}of$ تابع همانی با اعضای دامنهٔ f است. بنابراین این دو تابع هر دو همانی هستند ولی با هم مساوی نیستند.

در صفحهٔ **۲۵** کتاب جزئیات این موضوع با سه نمودار ون نشان داده شده است و در حالت کلی f و g وارون یکدیگرند اگر دو شرط زیر با هم برقرار باشند :

$$\begin{cases}(fog)(x)=x \ ; \ x\in D_g \\ (gof)(x)=x \ ; \ x\in D_f\end{cases}$$

در صفحهٔ **۲۶** مثالی بیان شده است که در آن دو تابع با ضابطه معرفی شده‌اند و اثبات می‌کند که وارون یکدیگرند. اثبات با توجه به مطلبی است که گفته شد. مشابه این مثال در تمرین‌های پایان درس نیزآورده شده است.

تذکر : در مورد محاسبهٔ تابع وارون در کتاب ریاضی ۳ محدودیت‌هایی وجود دارد. معلمان محترم و طراحان آزمون‌ها تنها مجاز به استفاده از توابع خطی، درجهٔ دوم ، $x^۳$ ، $\sqrt{ax+b}$ ، و $\sqrt[۳]{x}$ در طرح سؤالات مربوط به تابع وارون هستند و این موضوع باید در ارزشیابی‌های مدارس، مؤسسات برگزارکنندهٔ آزمون و کنکور رعایت شود.

در توابع فوق‌الذکر که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، در صورت امکان x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس با تبدیل y و x به هم، ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

در کار در کلاس همین صفحه مجدداً تابع $x^۳$ یادآوری شده است. با توجه به آزمون خط افقی می‌توان گفت که این تابع یک به یک است و سپس قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$ رسم شود تا نمودار وارون آن نیز به‌دست آید، برای ضابطهٔ تابع وارون نیز داریم :

$$f(x)=x^۳ \to y=x^۳ \to x=\sqrt[۳]{x} \to y=\sqrt[۳]{x}$$
$$\to f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

توجه : با توجه به حدود وثغور کتاب درسی طرح سؤال از توابع درجهٔ ۳ دیگر مجاز نیست.

در مثال صفحهٔ۲۷، روش محاسبهٔ تابع وارون به روش جبری و نموداری تثبیت می‌شود. توجه به رسم تابع و تابع وارون در یک دستگاه و ارتباط آن با نیم ساز ناحیهٔ اول و سوم از اهمیت بالایی برخوردار است. توجه شودکه جای دامنه و برد تابع و تابع وارون با هم عوض می‌شود.

مشابه این مثال، سؤال‌های کار در کلاس همین صفحه است که در کلاس توسط دانش‌آموزان حل می‌شود.

محدود کردن دامنه تابع

تمام توابع یک به یک نیستند، بنابراین وارون‌پذیر هم نیستند و نمی‌توان حرفی از تابع وارون آنها به میان آورد ولی می‌توان دامنه آنها را طوری محدود کرد که یک به یک شوند. با توجه به مطالب **صفحهٔ ۲۷** در این زمینه از دانش‌آموزان خواسته شود ابتدا ایده‌هایشان را در مورد محدود کردن دامنه بیان کنند و پاسخ‌هایشان را در کلاس با هم مقایسه کنید.

در مثال صفحهٔ ۲۸ با محدود کردن دامنه به بازهٔ (∞+ و ۱] تابع را یک به یک کرده است. از دانش‌آموزان خواسته شود بازه‌های دیگری برای همین تابع پیدا کنند که در آنها یک به یک باشد و تابع و وارونش را در بازه‌های موردنظر جدید رسم کنند. این کار ذهن دانش‌آموز را فعال ساخته و اعتماد به نفس او را در حل مسائل بالا می‌برد.

حل برخی از تمرین‌های درس سوم

۱

الف) $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}\to y=\dfrac{-۸x+۳}{۲}\to \dfrac{۲y-۳}{-۸}=x$

$\to y=\dfrac{۲x-۳}{-۸}\to f^{-۱}(x)=\dfrac{۲x-۳}{-۸}$

۲ برای اثبات اینکه دو تابع f و g وارون یکدیگرند، دو تساوی زیر را ثابت می‌کنیم و

$$\begin{cases}(fog)(x)=x\ ;\ x\in D_g\\ (gof)(x)=x\ ;\ x\in D_f\end{cases}$$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}\ ;\ g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\leq ۰$

$\to (fog)(x)=f(g(x))=-\sqrt{g(x)-۸}=-\sqrt{۸+x^۲-۸}=-\sqrt{x^۲}=-|x|$

$,x\leq ۰\to (fog)(x)=-(-x)x$

$,(gof)(x)=g(f(x))=۸+(f(x))^۲=۸+(-\sqrt{x-۸})^۲=۸+x-۸=x$

بنابراین f و g وارون یکدیگرند.

۳ در مورد این سؤال دامنه را به صورت‌های مختلفی می‌توان محدود کرد، مثلاً در مورد قسمت الف، بازه‌های $(-\infty, ۰)$ یا $(۰, +\infty)$ یا $[۱ , +\infty)$ و مانند آن پاسخ صحیح هستند.

۴ نمودار داده شده تابع f را نشان می‌دهد و نقاط آن به‌صورت زیراند.

x	-۳	-۱	۰	۱	۳
$f(x)$	-۴	-۲	۰	۲	۳

بنابراین جدول خواسته شده به‌صورت زیر تکمیل می‌شود:

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	-۳	-۱	۱	۳

۶ این تمرین مشابه مثال صفحهٔ ۲۸ است و می‌توان تابع را به‌صورت $f(x) = (x-۲)^۲ + ۱$ نوشت و بازه‌های مختلفی را برای محدود کردن آن درنظر گرفت، مانند $(۲,+\infty)$ یا $(۳,+\infty)$ یا $(-\infty, ۲)$ و مانند آن...

۷ $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^۳$

الف) $(fog)^{-۱}(۵) = ?$

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم و سپس با استفاده از خواص تابع وارون، مقدار مجهول را می‌یابیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{۱}{۸}g(x) - ۳ = \frac{۱}{۸}x^۳ - ۳$$

می‌دانیم اگر $(a , b) \in fog$ آن‌گاه $(a , b) \in (fog)^{-۱}$ و به عکس.

پس اگر $(fog)^{-۱}(۵) = a$ آنگاه $(۵ , a) \in (fog)^{-۱}$ و بنابراین $(a , ۵) \in fog$، پس:

$$\frac{۱}{۸}a^۳ - ۳ = ۵ \rightarrow \frac{۱}{۸}a^۳ = ۸ \rightarrow a^۳ = ۶۴ \rightarrow a = ۴ \rightarrow (fog)^{-۱}(۵) = ۴$$

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶) = ?$

$$f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳ \rightarrow y = \frac{۱}{۸}x - ۳ \rightarrow x = ۸(y+۳)$$
$$\rightarrow y = ۸(x+۳) \rightarrow f^{-۱}(x) = ۸(x+۳)$$
$$\rightarrow (f^{-۱}of^{-۱})(x) = f^{-۱}(f^{-۱}(x)) = ۸(f^{-۱}(x)+۳) =$$
$$۸(۸(x+۳)+۳) = ۶۴x + ۲۱۶$$

$\rightarrow (f^{-۱}of^{-۱})(۶) = ۶۰۰$

پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵) = ?$

$(g^{-۱}of^{-۱})(x) = g^{-۱}(f^{-۱}(x)) \; =?$

$g(x) = x^{۳} \rightarrow g^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x} \;,\; f^{-۱}(x) = ۸(x+۳)$

$\rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(x)) = \sqrt[۳]{f^{-۱}(x)} = \sqrt[۳]{۸x+۲۴}$

$\rightarrow (g^{-۱}of^{-۱})(۵) = \sqrt[۳]{۸\times۵+۲۴} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y = -(x-۱)^{۳} + \frac{۱}{۲}$

ب) $y = (x+۲)^{۳} - \frac{۳}{۲}$

۲ نمودار توابع $y = -\sin x - ۱$ و $y = \cos x + ۱$ را در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$ رسم کرده و بازه‌هایی را که در آنها صعودی یا نزولی است مشخص نمایید.

۳ نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

الف) $y = ۳^{x} - ۱$

ب) $y = (\frac{۱}{۳})^{x} - ۱$

پ) $y = -\log_{۳}^{x} + ۲$

ت) $y = x^{۲} - ۴x$

ث) $y = -|x+۱| - ۲$

ج) $y = \begin{cases} ۲x-۳ & x > ۲ \\ x^{۳} & -۱ \le x \le ۱ \\ -x+۱ & x \le -۳ \end{cases}$

۴ اگر $f(x) = \sqrt{x-۲}$ و $g(x) = ۲x - ۳$، حاصل عبارات زیر در صورت امکان را به دست آورید.

الف) $(gof)(۵)$

ب) $(gof)(\frac{۳}{۲})$

پ) $(fof)(۶)$

ت) $(gog)(-۳)$

ث) $(fog)(-۳)$

ج) $(fog)(\frac{۳}{۴})$

۵ در هر قسمت ضابطه و دامنهٔ fog و gof را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $f(x) = -۵x + ۳\ ,\ g(x) = \sqrt{x}$

ب) $f(x) = \frac{۲x - ۳}{x + ۲}\ ,\ g(x) = \sqrt{x - ۳}$

۶ تابع $f(x) = \frac{۱}{-x^۲ + ۲x - ۳}$ را طوری بنویسید که حاصل ترکیب دو تابع دیگر باشد.

۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۲x - \sqrt{x - ۳} & x \geq ۵ \\ -x^۲ - ۳x & x < ۵ \end{cases}$ ، مقدار $f(f(۷)) + f(f(-۱))$ را به‌دست آورید.

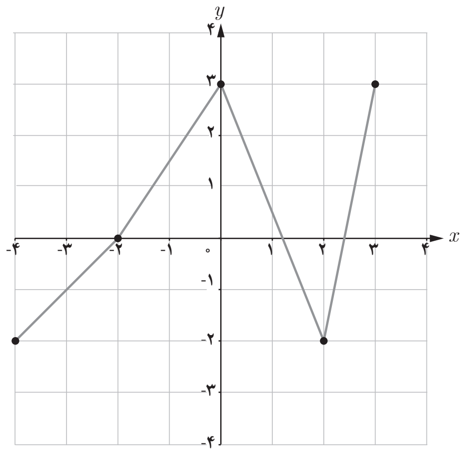
۸ نقطهٔ $A(۱\ ,\ -۴)$ روی نمودار تابع $y = ۳ - f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطهٔ نظیر A را روی نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲} f(x - ۲)$ بیابید.

۹ اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.

الف) $y = -f(x + ۱)$

ب) $y = f(۲x) - ۱$

پ) $y = f(x - ۲) + ۲$



۱۰ اگر $f(x) = \cos x$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۲\cos x - ۲$

ب) $y = \cos(-x) + ۱$

پ) $y = \cos(\frac{x}{۲}) - ۱$

ت) $y = -\cos ۲x - ۱$

۱۱ اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = x^۲ + bx$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$(fog)(x) = x^۲ + ۴x + ۱$

۱۲ اگر $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۹}$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}$ باشد، حاصل $(fog)(x)-(gof)(x)$ را حساب کنید.

۱۳ اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}+۲$ ، دامنه و برد توابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز محاسبه کنید.

۱۴ ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع را مشخص نمایید.

الف) $f(x)=\frac{۲x}{۵}-۸$ ب) $g(x)=-۳+\sqrt{x+۳}$

پ) $h(x)=x^{۲}-۴x+۶\ (x\geq ۲)$ ت) $l(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{۲}$

۱۵

۱۶ برای تابع $f(x)=\frac{x-۳}{۲}$ ثابت کنید $(fof^{-۱})(x)=x$ و $(f^{-۱}of)(x)=x$ در هر مورد دامنهٔ تابع را مشخص کنید.

۱۷ توابع زیر یک به یک نیستند. به دو روش مختلف از آنها تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=x^{۲}-۴x+۱۱$

ب) $y=-|x-۱|+۳$

پ) $y=|x+۳|-۴$

۱۸ اگر $y=m_۱x+b_۱$ و $y=m_۲x+b_۲$ معادلهٔ دو خط باشند که نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید $m_۱m_۲=۱$.

۱۹ اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۵,۱)\}$ و $g=۲|x|+۱$ و $f^{-۱}(g(a))=۲$ ، a را بیابید.

۲۰ در صورت یک به یک بودن تابع $f(x)=-(x-۲)^{۲}$ برای $x\leq ۲$، وارون آن را بیابید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.