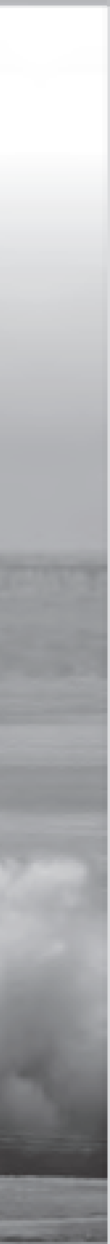


فصل ۴

مشتق

ماهواره‌بر سیمرغ ـ پایگاه فضایی امام خمینی(ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

مشتق

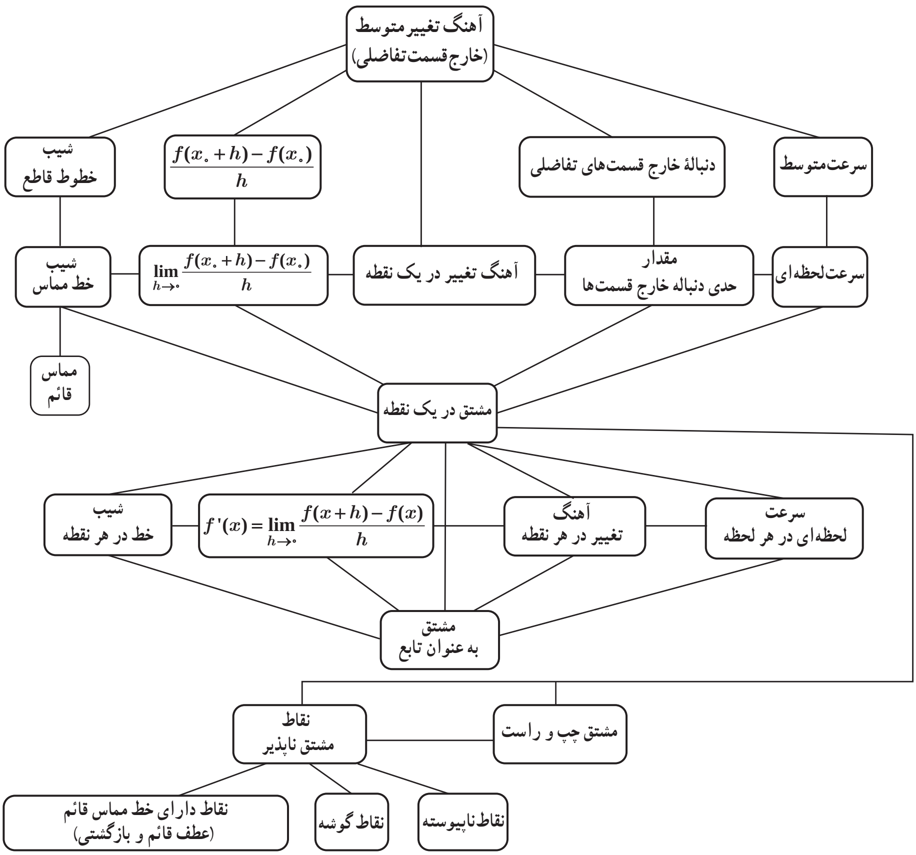
اهداف کلی فصل ۴

- آشنایی با مفهوم مشتق در یک نقطه
- درک رابطه بین شیب خط مماس و مشتق
- بررسی نقاط مشتق ناپذیر
- درک مشتق به عنوان یک تابع
- درک آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر و رابطه آن با مشتق

نگاه کلی به فصل

مفهوم مشتق شامل سه درس است که درس اول شامل مفهوم شهودی خط مماس، مشتق در یک نقطه و معرفی بازنمایی‌های مختلف مشتق می‌باشد و درس دوم به بیان مشتق‌پذیری و معرفی مشتق به عنوان تابع می‌پردازد و در درس سوم آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و کاربردهای آن اشاره می‌شود. اتصال بین این مفاهیم نیز حائز اهمیت است. برای ارائه هر مفهومی در کتاب علاوه بر برنامه درسی، به پشتوانه نظری و پژوهشی نیاز است. در این قسمت ابتدا نقشه مفهومی فصل (مشتق) و سپس مختصری راجع به چارچوب‌های نظری مورد استفاده در این بخش ارائه شده است.

نقشهٔ مفهومی


آهنگ تغییر متوسط (خارج قسمت تفاضلی)
شیب خطوط قاطع
$\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$
دنبالهٔ خارج قسمت‌های تفاضلی
سرعت متوسط
شیب خط مماس
$\lim\limits_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$
آهنگ تغییر در یک نقطه
مقدار حدی دنباله خارج قسمت‌ها
سرعت لحظه‌ای
مماس قائم
مشتق در یک نقطه
شیب خط در هر نقطه
$f'(x)=\lim\limits_{h\to\circ}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
آهنگ تغییر در هر نقطه
سرعت لحظه‌ای در هر لحظه
مشتق به عنوان تابع
نقاط مشتق ناپذیر
مشتق چپ و راست
نقاط دارای خط مماس قائم (عطف قائم و بازگشتی)
نقاط گوشه
نقاط ناپیوسته

دانستنی‌هایی برای معلم[1]

حساب دیفرانسیل یکی از بزرگترین دستاوردهای انسان است (NCTM، ۲۰۰۰؛ هاگس ــ هالت و دیگران، ۲۰۱۷) که نقش مهمی در تمدن بشری ایفا کرده است. یکی از مباحث حساب دیفرانسیل که بسیار حائز اهمیت می‌باشد، مشتق[2] است. این مفهوم در کتاب‌های جدید ریاضی در پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ارائه می‌گردد. تحقیقات نشان می‌دهند که مفهوم مشتق یکی از مفاهیم مشکل برای دانش‌آموزان و دانشجویان می‌باشد و علت این امر، پیچیدگی تعریف و بازنمایی‌های آن است (تامپسون، ۱۹۹۴؛ زندیه، ۲۰۰۰). مطالعات زیادی در مورد بررسی تفکر دانش‌آموزان در ارتباط با مفاهیم حساب دیفرانسیل، شامل مشتق انجام شده است (به‌طور مثال، اوهرتمن و دیگران، ۲۰۰۸؛ بری و نیمن، ۲۰۰۳؛ سلدن. جی، سلدن. ای، هاک، و میسن، ۲۰۰۰). مشتق، ابتدا به کار برده شده، سپس کشف و توسعه یافته و در نهایت تعریف شده است (گرابینر، ۱۹۸۳). سیر تاریخی استفاده از مشتق تا تعریف آن بیش از ۲۰۰ سال طول کشیده است. فرما[3] در ابتدا از آن استفاده می‌کرد، نیوتن[4] و لایب نیتز[5] آن را کشف نمودند، تیلور، اولر و مک لورن آن را توسعه داده، لاگرانژ آن را نامگذاری و تعیین نمود و در پایان کوشی[6] و وایراشتراس[7] آن را تعریف کردند (گرابینر، ۱۹۸۳). از طرفی مشتق یکی از مفاهیم حساب دیفرانسیل است که در علوم مختلف مهندسی، فیزیک، شیمی، علوم انسانی و اقتصاد و غیره کاربرد و اهمیت دارد (رودرا و گودهرت، ۲۰۱۰).

از جمله اهداف این فصل آن است که مفاهیم ریاضی جدید به کمک مفاهیم قبلی در کتاب‌های درسی ساخته شوند. در این راستا، چگونگی ارائه مبحث مشتق درکتاب‌های درسی حائز اهمیت است؛ زیرا یکی از شاخصه‌های اصلی تدریس معلمان کتاب‌های درسی هستند، بنابراین نحوهٔ بیان مفهوم‌سازی مشتق در کتاب‌ها مهم است. همچنین سعی شده است که از شهود نهایت بهره را ببریم. از مفاهیم پایه در این بررسی مفهوم فرایند ــ شئ[8] است، که در ادامه، از منظر اسفارد[9](۲۰۰۸) به آن می‌پردازیم.

فرایند و شئ از دیدگاه اسفارد (۲۰۰۸)

نظریه فرایند و شئ توسط افراد مختلفی به‌صورت‌های گوناگون تعریف شده است. یکی از این نظریه‌ها، نظریه کاربردی **شئ انگاری**[10] اسفارد(۲۰۰۸) می‌باشد. بر اساس این نظریه یک دوگانگی فرایند ــ شئ ذاتی در بیشتر مفاهیم ریاضی وجود دارد. اساس نظریه این است که در ابتدا مفهوم عملیاتی (فرایند محور)

۱ـ مطالب این قسمت برگرفته از مقاله‌های شماره ۱ تا ۳ مراجع است.

۲ـ Derivative　　۳ـ Fermat　　۴ـ Newton

۵ـ Leibniz　　۶ـ Cauchy　　۷ـ Weierstrass

۸ـ Process_object　　۹ـ Sfard　　۱۰ـ Reification

ایجاد می‌شود و پس از آن از طریق شئ انگاری فرایندها، اشیای ریاضی(مفاهیم ساختاری) ایجاد می گردند. فرایندهای پویا، عملیاتی هستند که روی اشیای ثابت و ایستای گذشته عمل می کنند. هر فرایندی که روی یک شئ، عمل می کند؛ خود از عمل، توسط فرایند دیگر به‌وجود آمده است. این فرایند زنجیر مانند، زوج‌های فرایند ــ شئ نامیده می‌شوند. اسفارد از سه مرحله فرایند برای رشد مفهوم صحبت می کند (شکل۲ــ۱) :

مرحله درونی‌کردن[1] : فرایند یا عملیاتی که یک شخص روی یک شئ ذهنی آشنا و در دسترس انجام می‌دهد و قادر به تکرار آن باشد، گوییم آن را درونی کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص بین فرایندهای مرتبط گام بردارد).

مرحله فشرده‌سازی یا جمع‌بندی[2] : اگر یادگیرنده قادر باشد فرایند را در نظر بگیرد بدون آنکه در واقعیت اتفاق افتاده باشد گوییم آن را فشرده‌سازی و خلاصه کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص فرایند را به عنوان کل در نظر بگیرد و بتواند به عنوان یک زیرفرایند در فرایند دیگر به کار برد).

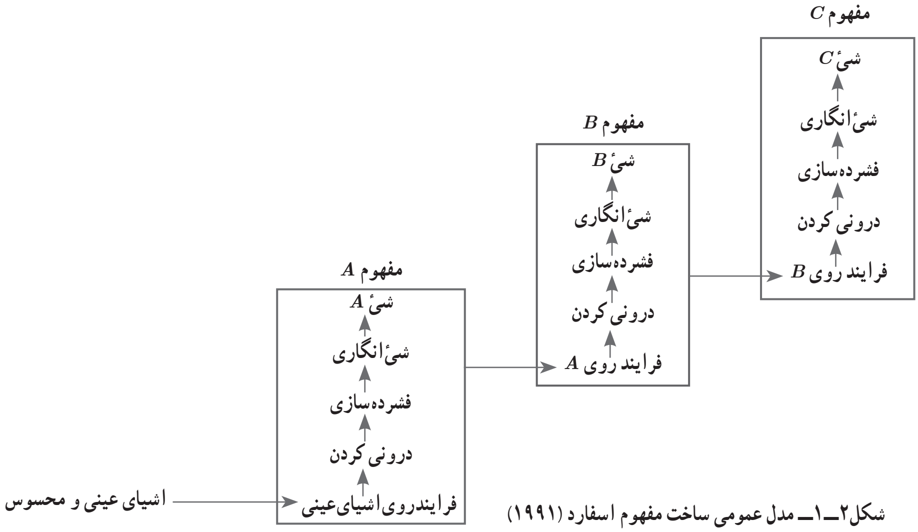
مرحله شئ انگاری : زمانی که یادگیرنده از اشیای آشنا به یک نگاه کلی و جدید برسد به طوری که بتواند با آن دست‌ورزی کند، به مرحله شئ انگاری رسیده است. در این حالت فرایند، تبدیل به یک شئ ساختاری ایستا می‌شود و خود پایه‌ای برای فرایند پیشرفته‌تر بعدی می‌گردد (زمانی اتفاق می‌افتد که فرایندها به‌طور ساختاری به عنوان یک شئ در نظر گرفته شوند).

شکل۲ــ۱، مراحل ساخت یک مفهوم از دیدگاه اسفارد شامل درونی کردن، فشرده سازی و شئ انگاری را نشان می‌دهد و ساختار زنجیر مانند فرایند ــ شئ را در هر مرحله نمایان ساخته است. به عنوان مثال، می‌توان روند توسعه ساخت مفهوم تابع را نام برد. در ابتدا شخص با تناظر کردن دو شئ، آشنا می‌شود. به عنوان نمونه هر شخص یک کد ملی دارد یا در هر لحظه دماسنج یک دما را نشان می‌دهد. سپس این تناظر را به عنوان زوج مرتب (شئ) در نظر می‌گیرد، (شخص، کد ملی)؛ کار با زوج‌های مرتب به عنوان اشیا و ادامه مراحل درونی کردن و فشرده‌سازی با برقراری رابطه بین آنها دنبال می‌شود، سپس مفهوم رابطه درک می‌شود. فرایند نگاشتن عضوی از دامنه به درون عضوی از برد با این شرط که یک عضو از دامنه به دو عضو از برد نگاشته نشود را تابع به عنوان فرایند نامیم. اعمال روی تابع و دست ورزی با آن به شئ تبدیل می‌شود. مجموعه توابع را نیز می‌توان به عنوان یک خانواده توابع در نظر گرفت که منجر به جبر توابع می‌شوند. به عنوان مثالی دیگر، خارج قسمت تفاضلی را به عنوان اندازهٔ آهنگ متوسط متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل درنظر می‌گیریم. محاسبهٔ نسبت تفاضلات، به عنوان فرایند A می‌باشد. با انجام چندین محاسبه برای مقادیر مختلف و جمع‌بندی کردن آن، به عنوان یک شئ (شئ A همان نسبت تفاضلات به عنوان عدد است)خلاصه می‌شود. این شئ در فرایند دوم یعنی فرایند حدگیری مورد استفاده قرار می گیرد.

---

[1] ــ Interiorization
[2] ــ Condensation

فرایند حدگیری در این مرحله، شامل تجزیه و تحلیل یک دنباله از آهنگ‌های متوسط تغییرات وقتی که تفاضل مخرج به سمت صفر میل کند، می‌باشد. نماد لایب نیتسی آن نیز به صورت $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ است. فرایند حدگیری به عنوان آهنگ آنی تغییرات، خلاصه شده و با $\frac{dy}{dx}(x_0)$ نشان می‌دهیم (شئ B). فرایند خلاصه شده آهنگ آنی تغییرات در هر مقدار ورودی به عنوان یک شئ در ساخت تابع مشتق مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع فرایند در این مرحله، تغییرات هم‌زمان مقادیر ورودی و خروجی یا مقادیر آهنگ آنی تغییر خواهد بود و با نماد $\frac{dy}{dx}(x)$ نشان می‌دهیم (شئ C).



شکل۲ــ۱ــ مدل عمومی ساخت مفهوم اسفارد (۱۹۹۱)

زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰) چارچوبی برای درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه نموده است که در قسمت بعد به آن می‌پردازیم.

چارچوب زندیه برای درک مفهوم مشتق

زندیه (۱۹۹۷) نشان داد که درک اساسی که منجر به مفهوم مشتق می‌شود در طی بازنمایی‌های مختلف و تکالیف متنوع در زمینه‌های حساب دیفرانسیل محقق می‌شود. زندیه (۲۰۰۰) چارچوبی برای تجزیه و تحلیل درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه داده است. دو مؤلفه اصلی چارچوب، یکی بازنمایی‌های چندگانه[۱](زمینه‌ها[۲]) و دیگری لایه‌هایی از زوج‌های فرایند ــ شئ[۳] می‌باشد که در ادامه هرکدام به اختصار

۱ــ Multiple representations
۲ــ Contexts
۳ــ Layers of process–object pairs

توضیح داده می‌شوند. بازنمایی‌های چندگانه مفهوم مشتق عبارت‌اند از :

الف) نموداری[1] : به عنوان شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه؛

ب) کلامی[2] : به عنوان آهنگ تغییر لحظه‌ای؛

ج) فیزیکی[3] : به عنوان سرعت (شتاب و در حالت کلی حرکت)؛

د) نمادین[4] : به عنوان حد خارج قسمت تفاضلی.

لایه‌های مشتق که هر کدام می‌توانند در نقش فرایند و شیئ باشند به صورت زیر است :

نسبت { فرایند، فرایند تقسیم صورت کسر به مخرج کسر.
شیئ، یک جفت عدد صحیح و یا خروجی فرایند تقسیم.

حد { فرایند، فرایند نزدیک شدن به یک مقدار.
شیئ، مقدار حد.

تابع { فرایند، تناظر بین دو مجموعه ناتهی.
شیئ، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب.

جدول ۲ــ۱، چارچوب درک دانش‌آموزان از مفهوم مشتق را که زندیه (۲۰۰۰) ارائه داد، به همراه بازنمایی‌ها و لایه‌های آن نشان می‌دهد.

جدول ۲ــ۱ــ چارچوب درک مفهوم مشتق زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰)

زمینه‌ها / لایه‌ها	نموداری	کلامی	فیزیکی	نمادین	غیره
(فرایند ـ شیئ)	شیب	آهنگ	سرعت	خارج قسمت تفاضلی	
نسبت					
حد					
تابع					

چارچوب نظری اسفارد

از چارچوب نظری مورد استفاده در ارائه مفهوم مشتق در این کتاب، چارچوب اسفارد، همان رویکرد گفتمان شناختی[5] در متن‌های کتاب حساب دیفرانسیل است. رویکرد گفتمانی بر این پایه استوار است که

۱ــ Graphically　۲ــ Verbally　۳ــ Physically
۴ــ Symbolically　۵ــ Commognitive approach

تفکر نوع معینی از گفتمان با خود یا دیگران است. گفتمان شناختی از دو کلمه گفتمان[1] و شناخت[2] تشکیل شده‌اند که هر دو با هم یک پدیده را توصیف می‌کنند (اسفارد، ۲۰۰۸). نظریه گفتمان شناختی یک نظریه منسجم و دقیق برای تفکر دربارۀ تفکر، مبتنی بر تجزیه و تحلیل گفتمان کلاسیک است (یاکل،۲۰۰۹). نظریه گفتمان شناختی کاربرد زیادی در تجزیه و تحلیل توصیفی و کمی محتوای کتاب‌ها دارد. این نظریه شامل ساختارهایی مانند کنایه[3]، تفکر و گفتمان است و گفتمان شناختی به عنوان نتیجه‌ای از ارتباط بین فردی میان فرایند گفتمان و شناخت است. گفتمان شناختی دارای پنج خاصیت استدلال[4]، انتزاع یا تجریدسازی[5]، عینی‌سازی[6]، ذهنی‌سازی[7] و خودآگاهی[8] می‌باشد. از طرفی ریاضی دارای سیستمی شامل اشیای گفت‌وگو به همراه خود گفت‌وگو است که وقتی اشیای جدید یکی پس از دیگری اضافه شوند از درون بی وقفه رشد می‌کند و گسترش می‌یابند (اسفارد، ۲۰۰۸) و به این ترتیب یک مفهوم، ساخت و گسترش می‌یابد.

رویکرد گفتمان شناختی مبانی اساسی را از بین چهار مشخصه گفتمان شرح می‌دهد :

استفاده از کلمات ـ واسطه‌های تصویری ـ روال‌ها یا روتین‌ها ـ روایت‌های تأییدی

۱ **استفاده از کلمات**[9] : استفاده از کلمات، کلید مهمی در تدریس و یادگیری حساب دیفرانسیل می‌باشد. گفتمان ریاضی در حساب، گفتمانی است که در آن از جملات تکنیکی در متن‌ها استفاده می‌کنیم. برای نمونه روش استفاده آموزشگران از کلمات برای توضیح معنی حد و مشتق مهم است زیرا دانش‌آموزان نیاز به فرصت برای بیان خود و حس یکپارچه‌ای از مفاهیم دارند.

۲ **واسطه‌های تصویری**[10] : واسطه‌های تصویری اشاره به ابزارهای غیرکلامی گفتمان دارند. در مباحث حساب دیفرانسیل، واسطه‌های تصویری اغلب با نمودارها، اشکال، جدول‌ها، علائم نمادین مشخص می‌گردند.

۳ **روال‌ها یا روتین‌ها**[11] : روال‌ها همان الگوهای تکراری هستند که در سخنرانی‌های کلامی و واسطه‌های تصویری و روایت‌های تأییدی یافت می‌شوند.

۴ **روایت‌های تأییدی**[12] : روایت‌های تأییدی یا تصدیقی اظهاراتی هستند که به عنوان صحبت‌های درست در نظر گرفته می‌شوند. در گفتمان ریاضی، روایت‌های تأییدی، جملاتی از مفاهیم ریاضی مانند تعاریف، قضایا یا توجیه‌ها می‌باشد (جدول ۱ و جدول ۲ را مشاهده کنید). این رویکرد تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنا بخشی[13] می‌نامد. یک شخص، یک کلمه یا نماد ریاضی را با اشیای ملموس و قابل

۱ـ Communication
۲ـ Cognition
۳ـ Metaphor
۴ـ reasoning
۵ـ abstracting
۶ـ objectifying
۷ـ subjectifying
۸ـ consciousness
۹ـ Word ـ use
۱۰ـ Visual mediators
۱۱ـ Routines
۱۲ـ Endorsed narratives
۱۳ـ Realizations

دسترس درک می‌کند. برای نمونه یک شخص، کلمه تابع را با نمودار یا جدول درک می‌کند (اسفارد، ۲۰۰۸، ص۱۵۴).

جدول ۱ــ اجزای گفتمان ریاضی در رویکرد گفتمان شناختی (اسفارد، ۲۰۰۸)

اجزا	توصیف‌ها
استفاده از کلمات (Word use)	استفاده از کلمات برای معنی کردن اشیای ریاضی
واسطه‌های تصویری (Visual Mediators)	روشهای غیر کلامی گفتمان
روال‌ها یا روتین‌ها (Routines)	الگوهای تکراری خوش تعریف
روایت‌های تأییدی یا تصدیقی (Endorsed Narratives)	اظهاراتی که سخنرانان به عنوان عبارات درست تأیید می‌کنند.

علاوه بر مشخصه‌های چارچوب گفتمان شناختی، این چارچوب شامل اشیای مختلفی از گفتمان ریاضی مانند : نشانگرها یا دلالت‌گرها [1]،درخت‌های معنابخشی[2]، مفاهیم[3]، اشیای اولیه[4] و اشیای استدلالی[5] است.

گفتمان ریاضی

گفتمان ریاضی دارای اجزایی است که عبارت‌اند از :

اشیای اولیه : هر موجود درک‌پذیر و قابل دسترسی که مستقل از گفتمان‌های انسانی وجود دارد و شامل چیزهایی است که ما می‌توانیم ببینیم و لمس کنیم (اشیای مادی و تصاویر).

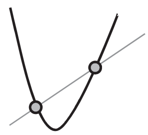
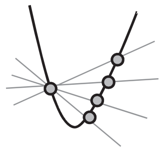
اشیای استدلالی : در فرایند نام‌گذاری صحیح به‌وجود می‌آیند : دادن اسم یا عنصر نمادین مشابه به یک شئ خاص. در این فرایند یک زوج (اسم یا ضمیر، شئ اولیه معین) ایجاد می‌شود. اولین عنصر از زوج نشانگر این است که در برقراری ارتباط با شئ دیگر زوج استفاده می‌شود و به عنوان نشانگر معنابخشی شمرده می‌شود (اسفارد،۲۰۰۸).

درخت معنابخشی : مجموعهٔ سلسله مراتب سازماندهی شده از تمامی مفاهیم نشانگرهای داده شده همراه با معنا بخشی این مفاهیم که به خوبی نشانگرهای قبلی خود را معنابخشی کنند و مفاهیمی برای نشانگرهای بعدی باشند. درخت‌های معنابخشی و در نتیجه اشیای ریاضی دارای ساختار شخصی هستند و اطلاعات ارزشمندی در مورد گفتمان شخص می‌دهند. در این بررسی فرایندی که مشتق یک تابع به‌صورت شئ در نظر گرفته می‌شود را فرایند مشتق و شیئی که فرایند مشتق روی آن اعمال می‌شود شئ اولیه و نتیجه فرایند مشتق را شئ نهایی می‌نامیم.

۱ـ signifiers
۲ـ realization trees
۳ـ realisations
۴ـ primary objects
۵ـ discursive objects

رویکرد گفتمان شناختی تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنابخشی می‌نامد. معنابخشی به جای درک و فهم استفاده می‌شود و زمانی به کار می‌بریم که یک مفهوم مشکل ریاضی را با استفاده از کلمات و تصاویر به مفاهیم ساده‌تر و قابل درک به کمک اشیای ریاضی تبدیل کنیم.

جدول۲ــ کلمات و واسطه‌های تصویری به عنوان معنا بخشی‌های مشتق

واسطه‌ها	اشیای اولیه	فرایند حد	اشیای نهایی
نمادین	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
عددی	$\frac{42-35}{3-1}$	دنباله‌ای از چند عدد	عدد
نموداری	(خط قاطع) 	(خطوط قاطع) 	(خط مماس) 

نماد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ به صورت فرایند و شی هر دو بازنمایی می‌شود، این دوگانگی اغلب منجر به مشکل شدن درک نماد به عنوان شئ برای دانش‌آموزان می‌شود (زندیه، ۲۰۰۰).

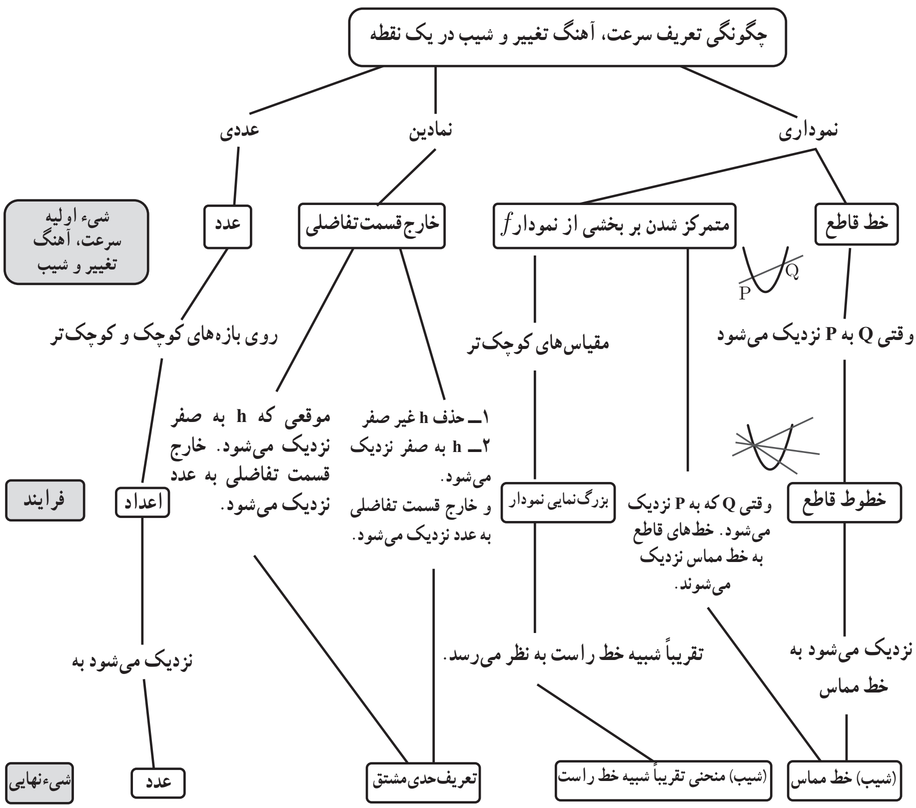
درخت معنا بخشی مشتق در یک نقطه

کتاب حسابان۲، حدوداً ۱۵۰ صفحه است که ۷۳ صفحهٔ آن (معادل ۴۹٪ کتاب) به مشتق و کاربرد آن اختصاص یافته است. در این کتاب از ۵۵ آیتم در مورد مشتق در یک نقطه، ۲۷ آیتم نموداری و ۱۷ آیتم نمادین و ۱۱ آیتم عددی می‌باشند که از آنها، ۳۴ آیتم به فرایند حد پرداخته می‌شوند، ۱۹ آیتم (نموداری) و ۱۵ آیتم (نمادین).

جدول موضوعات و تعداد صفحات و درصد اختصاص یافته به مشتق در کتاب

موضوع	تعداد صفحه	درصد از مبحث مشتق
شیب و خط مماس	۱۲	۱۶٪
مشتق‌پذیری و پیوستگی	۶	۸٪
تابع مشتق	۵	۷٪
مشتق تابع مثلثاتی و تابع مرکب ـ مشتق‌پذیری روی یک بازه	۷	۹٪
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر	۹	۱۲٪
کاربرد مشتق	۳۴	۴۶٪

درخت معنابخشی مشتق در یک نقطه، در کتاب در ادامه نمایش داده شده است.



برخی از بدفهمی‌های رایج در مورد مشتق

یکی از عوامل مؤثر در طراحی این فصل، مطالعات انجام شده در مورد آموزش مفهوم مشتق بوده است. در این مطالعات برخی بدفهمی‌های رایج در مورد مفهوم مشتق مشاهده گردیده است که برخی از آنها به شرح زیر است. اطلاعات بیشتر در مراجع آمده است.

۱ عدم توجه به فرایند حدی : دانش‌آموزان صرفاً به نوشتن خارج قسمت تفاضلی بسنده می‌کنند و توجهی به مفهوم حدگیری ندارند. به عنوان نمونه ممکن است بنویسند : $f'(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

۲ درک نادرست از تعریف نمادین : برخی دانش‌آموزان تعریف مشتق در یک نقطه را به این صورت معرفی می‌کنند : $f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. این شخص علاوه بر اینکه مفهوم حدی را نادیده گرفته است، تفاوتی بین مشتق در یک نقطه و مشتق به عنوان تابع نیز قائل نیست.

۳ درک ناقص یا اشتباه از مشتق : برخی دانش‌آموزان مشتق را به نوعی کم کردن توان معرفی می‌کنند یعنی $f(x)=x^{۳} \to f'(x)=۳x^{۲}$.

۴ مشتق‌گیری از عبارات در توابع چند ضابطه‌ای بدون فراهم بودن شرایط.

۵ در توابعی که شامل چند متغیر هستند و برخی متغیرها ثابت فرض می‌شوند، به نادرستی مشتق گرفته می‌شود.

۶ در محاسبه تعبیر مشتق در یک نقطه در زندگی واقعی برداشت‌های متناقضی دارند.

۷ در مقایسه شیب‌های با مقادیر منفی اشتباهات چشم‌گیری دیده می‌شود.

۸ درک درستی از تقریب در محاسبات مربوط به شیب ندارند.

درس ۱

آشنایی با مفهوم مشتق

هدف کلی : درک مفهوم مشتق

اهداف جزئی

۱ یادآوری مفهوم شیب خط
۲ آشنایی با مفهوم خط مماس به صورت شهودی
۳ محاسبه شیب خط مماس با جدول مقادیر خارج قسمت تفاضلی و نمودار
۴ آشنایی با پیدا کردن معادله خط مماس
۵ محاسبه مشتق به روشی دیگر

پیش نیازها

۱ آشنایی با روش‌های حدگیری
۲ آشنایی با محاسبه شیب

روش تدریس

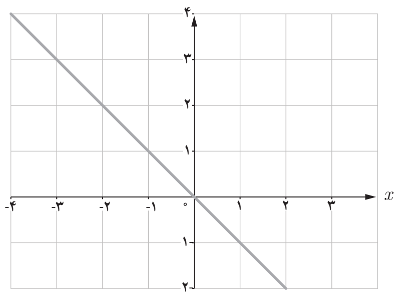
با تکیه بر مفهومی آشنا به نام شیب یک خط، تدریس آغاز می‌شود. مقایسه شیب‌های مختلف، به ویژه تغییرات شیب‌ها وقتی که مثبت یا منفی هستند و مقادیر آنها مفید و آموزنده است. سپس شیب خط مماس بر منحنی به طور شهودی ارائه می‌گردد و در ادامه به صورت دقیق‌تر و در یک فرایند حدی، شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه تعریف می‌گردد و مفهوم مشتق تابع در یک نقطه از آن استخراج می‌گردد.

فعالیت ص ۷۲

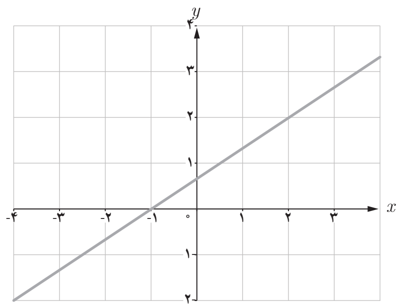
هدف این فعالیت، یادآوری مفهوم شیب خط، محاسبه و مقایسه شیب خطوط با یکدیگر است. به دانش‌آموزان اجازه دهید تا فعالیت را انجام دهند و در انتها مفاهیم را دوره نمایید.

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

$m = -۱$

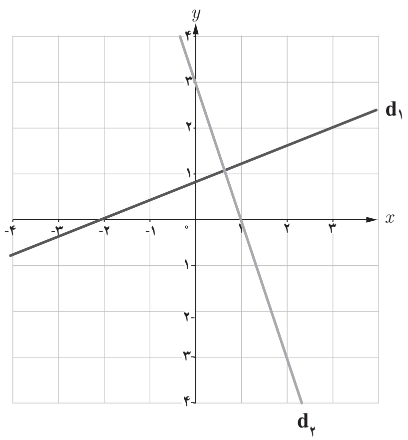


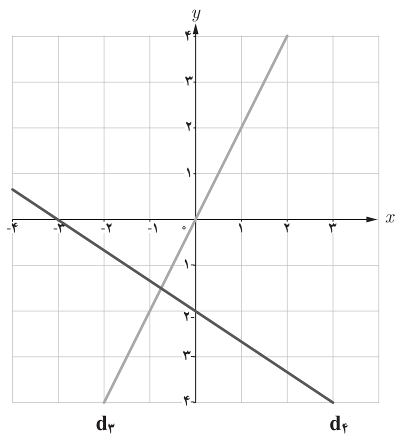
$m = \frac{۲}{۳}$



۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط به خط‌های $d_۱$, $d_۲$, $d_۳$ و $d_۴$ را روی شکل مشخص کنید.

خط	$d_۱$	$d_۲$	$d_۳$	$d_۴$
شیب	$\frac{۲}{۵}$	-۳	۲	$-\frac{۲}{۳}$





توصیه آموزشی

در صورت لزوم شیب‌های دیگر ر ا مطرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید که آنها را به دست آورند. به ویژه مقایسه شیب‌های منفی مختلف ضروری و آموزنده است.
تصاویر صفحهٔ ۷۳ صرفاً برای آشنایی اولیه با خط مماس می‌باشد. مثال‌هایی برای اینکه چه خطوطی را به عنوان مماس می‌شناسیم و چه خطوطی را خط مماس در نظر نمی‌گیریم. همچنین خط مماس لزوماً نبایستی نمودار را در یک نقطه قطع کند و یا هرخطی که در یک نقطه نمودار را قطع کند، لزوماً خط مماس نیست.

فعالیت ص ۷۴

هدف از ارائه این فعالیت درک شهودی خط مماس به کمک نمودار و با استفاده از حد خطوط قاطع است. ارائه مفهوم مشتق بدون فراهم ساختن مقدمات آن، فرصت یادگیری مناسب را از دانش‌آموزان می‌گیرد. باید به دانش‌آموزان فرصت داده شود تا تغییرات خطوط قاطع و حالت‌های حدی را به‌طور شهودی بررسی نمایند.

فعالیت ص ۷۵

هدف از این فعالیت، گذر از درک شهودی خط مماس و انجام محاسبات عددی و رسیدن به دقت می‌باشد. همان‌طور که در مبانی نظری نیز بیان شد، مشتق بازنمایی‌های مختلفی دارد و یکی از آنها عددی و نموداری است. در این فعالیت از دانش‌آموزان می‌خواهیم حدس بزنند، محاسبات انجام دهند، فرایند حدی را مشاهده کنند و در نهایت استدلال نمایند. چالش دیگری که در اینجا مطرح است بحث ورود متغیر می‌باشد که با انجام محاسبات و توجه به تغییرات متغیر طول‌ها، تأثیرات آن بر تغییرات عرض‌ها را متوجه شوند.

بازه [a,b]	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
[۲,۲/۴]	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{-(۲/۴)^{۲}+۱۰(۲/۴)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۲/۲۵}{۰/۴}=۵/۶$
[۲,۲/۳]	$\frac{f(۲/۳)-f(۲)}{۲/۳-۲}=\frac{-(۲/۳)^{۲}+۱۰(۲/۳)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۳-۲}=\frac{۱/۷۱}{۰/۳}=۵/۷$
[۲,۲/۲]	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{-(۲/۲)^{۲}+۱۰(۲/۲)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
[۲,۲/۱]	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{-(۲/۱)^{۲}+۱۰(۲/۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
[۲,۲/۰۱]	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{-(۲/۰۱)^{۲}+۱۰(۲/۰۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
[۲,۲/۰۰۱] ⋮	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{-(۲/۰۰۱)^{۲}+۱۰(۲/۰۰۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{۰/۰۰۵۹۹۹}{۰\ \ ۰۰۱}=$ $=\frac{۰/۰۰۵۹۹۹}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$ ⋮
[۲,۲+ h] (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{(۲+h)-۲}=\frac{-(۲+h)^{۲}+۱۰(۲+h)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{h}$ $=\frac{-h^{۲}+۶h}{h}=-h+۶$

توصیه آموزشی

اجازه دهید دانش‌آموان محاسبات را انجام دهند و در نتیجه‌گیری به آنها کمک کنید تا خط مماس را به خوبی درک کنند. در صورت لزوم می‌توانند بازه‌های دیگری را نیز انتخاب کنند و محاسبات را انجام دهند. معلمان عزیز می‌توانند در این فعالیت این دو سؤال را از دانش‌آموزان بپرسند و یا به بحث بگذارند.

الف) به نظر شما مقادیر خارج قسمت تفاضلی به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

ب) آیا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم خارج قسمت تفاضلی را به آن عدد (۶)نزدیک کنیم؟ اگر پاسخ مثبت است، به چه شرطی؟

کار در کلاس ص ۷۸

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^۲ + ۳$ را در نقطه‌ای به طول ۲− بنویسید.

حل : نقطه تماس $A(-۲ ، ۷)$ می‌باشد و برای پیدا کردن شیب خط مماس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم :

$$m = f'(-۲) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}\lim_{h\to ۰}\frac{(-۲+h)^۲+۳-(-۲)^۲-۳}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{h^۲-۴h}{h} = \lim_{h\to ۰}(h-۴) = -۴$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y = -۴x - ۱ \quad \leftarrow \quad y - ۷ = -۴(x+۲)$ است.

کار در کلاس ص ۸۰

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(❊ راهنمایی : تغییر متغیر $x = a + h$ را به‌کار برید. توجه کنید وقتی که $h \to ۰$ آنگاه $x \to a$)

حل :

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

هدف از ارائه این کاردرکلاس، کاربرد فراوان روش دیگر برای محاسبه مشتق می‌باشد. توجه شود که هر دو روش جبری و هندسی مفید می‌باشند.

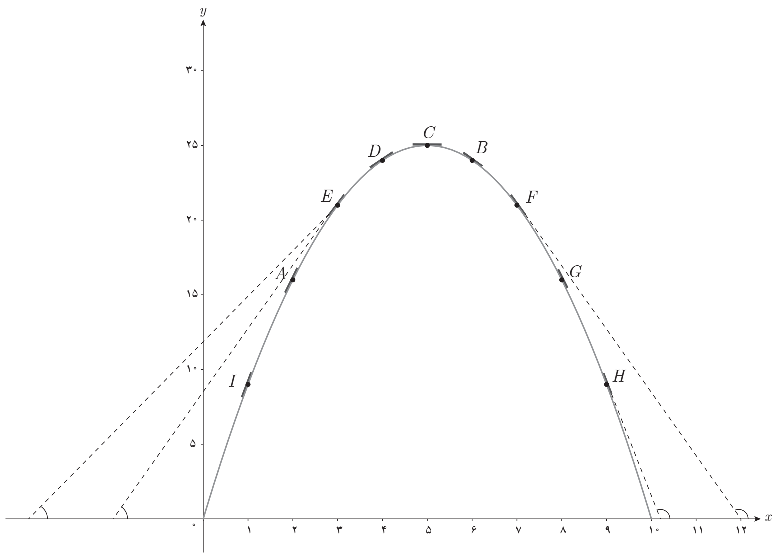
کار در کلاس ص۸۰

الف) برای تابع $f(x) = -x^{۲} + ۱۰x$، $f'(۸)$ و $f'(۵)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشخص تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی دارای مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.



ث) با محاسبه $f'(۳)$ و $f'(۴)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

حل :

الف)

$$f'(۵) = \lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵} = \lim_{x\to ۵}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۵}{x-۵} = \lim_{x\to ۵}\frac{-(x-۵)^{۲}}{x-۵}$$

$$= \lim_{x\to ۵}-(x-۵) = ۰$$

$$f'(۸) = \lim_{x\to ۸}\frac{f(x)-f(۸)}{x-۸} = \lim_{x\to ۸}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۱۶}{x-۸} = \lim_{x\to ۸}\frac{-(x-۸)(x-۲)}{x-۸}$$

$$= \lim_{x\to ۸} -(x-۲) = -۶$$

ب) نقاط $(D\ ,B)$ یا $(E\ ,F)$ یا $(A\ ,\ G)$ یا $(I\ ,H)$

پ) در نقاط $(I\ ,A\ ,E\ ,D)$ مشتق مثبت و در نقاط $(B\ ,F\ ,G\ ,H)$ مشتق منفی است.

ت) با توجه به شکل و مقایسه زاویه‌ها، مشتق در نقطه ۳ بزرگ‌تر از مشتق در نقطه۴ است.

ث)

$$f'(۳) = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{-x^۲+۱۰x-۲۱}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{-(x-۳)(x-۷)}{x-۳}$$
$$= \lim_{x\to ۳} -(x-۷) = ۴$$

$$f'(۴) = \lim_{x\to ۴} \frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{-x^۲+۱۰x-۲۴}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{-(x-۴)(x-۶)}{x-۴}$$
$$= \lim_{x\to ۴} -(x-۶) = ۲$$

واضح است که $f'(۳) > f'(۴)$.

توصیه آموزشی

توجه به این نکته در این فعالیت ضروری است که برای زاویه‌های منفرجه که شیب منفی به دست می‌آید، ممکن است در مقایسه شیب‌ها ایجاد بدفهمی شود. همکاران محترم با انجام یک مثال این قسمت را برجسته کنید. به عنوان نمونه شیب در نقطه ۷ بزرگتر از شیب در نقطه ۹ می‌باشد.

نقطه	شیب
۱	۸
۲	۶
۳	۴
۴	۲
۵	۰
۶	۲-
۷	۴-
۸	۶-
۹	۸-

رسم جدول فوق برای دانش‌آموزان آموزنده است.

جمع‌بندی کلی : مثلاً بررسی رفتار کلی از $x = ۰$ تا $x = ۵$ شیب‌ها با مقادیر مثبت کاهش می‌یابد تا به صفر برسد و از $x = ۵$ تا $x = ۱۰$ شیب‌ها با مقادیر منفی کاهش می‌یابند.

پاسخ تمرین‌های ص ۸۱

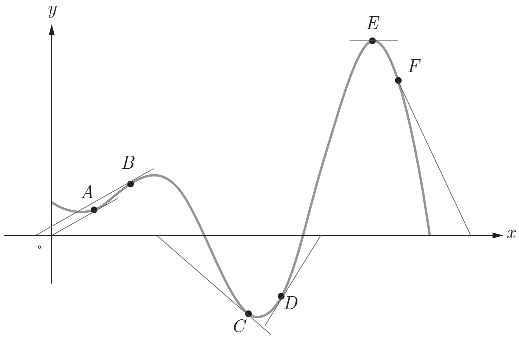
۱ اگر $f(x)=۳x^۲-۲x+۱$، $f'(۲)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

حل : با جای‌گذاری $x=۲$ عرض نقطه تماس برابر ۹ به دست می‌آید و داریم :

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x+۱-۹}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x-۸}{x-۲}$$
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(۳x+۴)(x-۲)}{x-۲}=۱۰$$

$$y-۹=۱۰(x-۲)\rightarrow y=۱۰x-۱۱$$

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



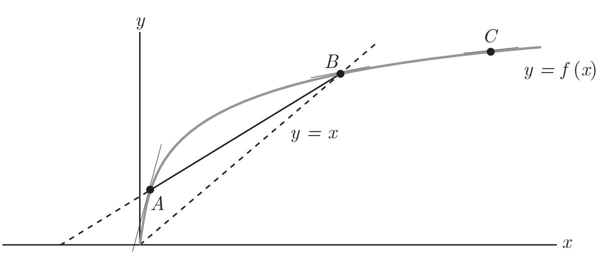
نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲

۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C



ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=۲$

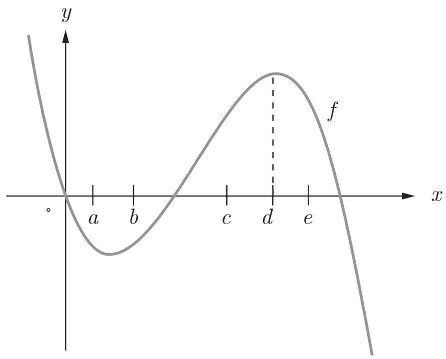
ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_۱$, $m_۲$, ... و $m_۶$ در نظر بگیرید.

حل : $m_۵ < m_۳ < m_۲ < m_۴ < m_۶ < m_۱$

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a,b,c,d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲



۵ نقاطی مانند A،B،C،D،E،F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

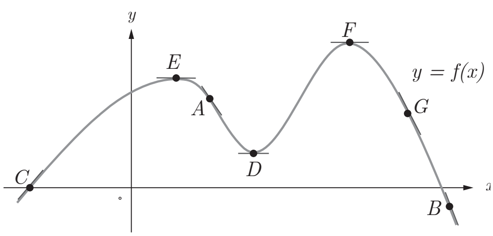
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x)=x^۳-۲$ ، $f'(-۱)$ را به‌دست آورید.

حل :

$$'(-\ ) = \lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲+۳}{x+۱} = \lim_{x\to -۱}\frac{x^۳+۱}{x+۱}$$

$$= \lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{x+۱} = ۳$$

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

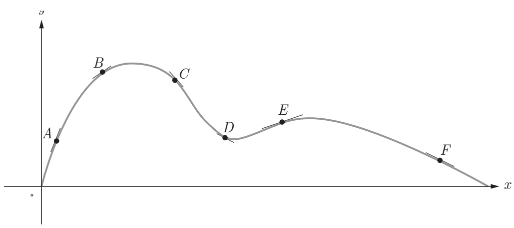
ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E<m_B<m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط F ،D و C منفی است.

ث) $m_F<m_D<m_C$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$



حل :

الف) نادرست است زیرا در نقاط F،D و C منفی می‌باشد.

ب) نادرست است زیرا زاویه‌ای که خط مماس در نقطه A با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد از زاویه‌ای که خط مماس در نقطه B با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد بیشتر است یعنی $m_A > m_B$.

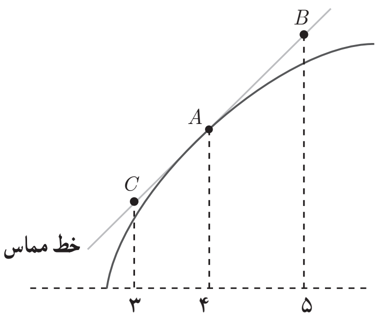
پ) درست است.

ت) درست است.

ث) نادرست است زیرا $m_C < m_D < m_F$.

ج) درست است.

۸ برای تابع f در شکل زیر داریم : $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



حل :

روش اول :

مختصات نقطه $A(۴,۲۵)$ و $B(۴+۱,۲۵+f'(۴))=B(۵,۲۶/۵)$ و $C(۴-۱,۲۵-f'(۴))=C(۳,۲۳/۵)$.

روش دوم : مختصات نقطه $A(۴,۲۵)$ و

$$y-y_۰=m(x-x_۰)$$

$$y-۲۵=۱/۵(x-۴)$$

$$y=۱/۵\,x+۱۹$$

$$y_B=۲۶/۵\ ,\ y_C=۲۳/۵$$

درس ۲

مشتق‌پذیری و پیوستگی

اهداف کلی

بررسی مشتق‌پذیری و معرفی مفهوم مشتق به عنوان تابع

اهداف جزئی

۱ شناسایی نقاط مشتق‌ناپذیر
۲ محاسبه مشتق چپ و راست
۳ بررسی رابطه بین مشتق‌پذیری و پیوستگی
۴ معرفی مماس قائم
۵ آشنایی و درک تابع مشتق
۶ محاسبه تابع مشتق برخی توابع
۷ مشتق تابع مثلثاتی و مرکب
۸ مشتق‌پذیری روی یک بازه
۹ معرفی مشتق مرتبه دوم

پیش نیازها

۱ آشنایی با مشتق در یک نقطه
۲ آشنایی با خط مماس
۳ آشنایی با حدهای نامتناهی

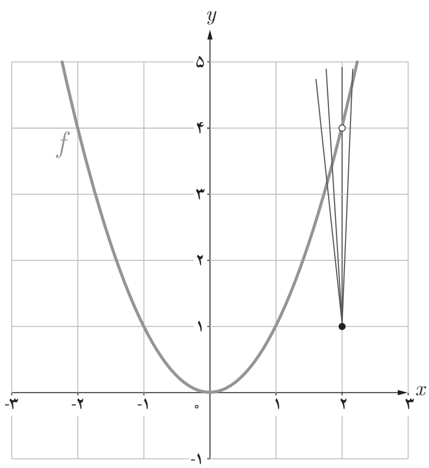
روش تدریس

در این درس در شروع با توجه به مفهوم شیب خط مماس بر منحنی به بررسی عدم وجود خط مماس در نقاطی که تابع ناپیوسته است، پرداخته می‌شود و ارتباط بین پیوستگی و مشتق‌پذیری بررسی می‌شود. با استفاده از نیم مماس‌های راست و چپ مفهوم مشتق راست و چپ ارائه می‌شود سپس مشتق به عنوان یک تابع ارائه می‌شود و در نهایت دستورهایی برای محاسبه مشتق برخی توابع داده می‌شود.
هدف از این فعالیت آن است که مشخص کنیم تا چه حد ناپیوستگی روی مشتق‌پذیری مؤثر است. در این فعالیت تابع ناپیوستگی رفع شدنی دارد (حد وجود دارد).

فعالیت ص ۸۴

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲\end{cases}$ (شکل زیر) را درنظر می‌گیریم :

الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(۲)$ وجود ندارد؟



حل : با توجه به تعریف مشتق، به دلیل این که مخرج کسر صفر است و صورت کسر یک عدد پس حد وجود ندارد.

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۱}{x-۲} = \infty$$

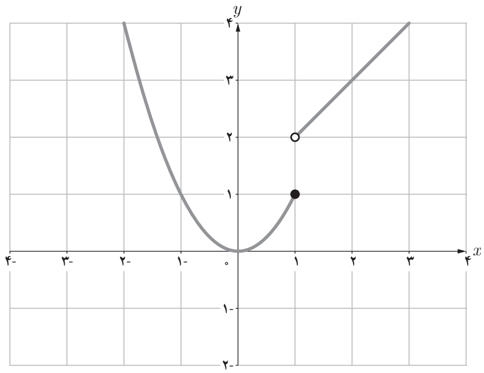
به کمک نمودار هم به دلیل این که شیب خطوط قاطع رسم شده به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند، مشتق وجود ندارد (زاویه خطوط قاطع نسبت به جهت مثبت محور طول‌ها به ۹۰ درجه نزدیک می‌شوند).

هدف از این کاردرکلاس، معرفی نوع دیگر ناپیوستگی (که رفع نشدنی است) و تأثیر آن بر مشتق‌پذیری می‌باشد. تابع در این نقطه پیوستگی چپ دارد.

کار در کلاس ص ۸۵

تابع g (شکل زیر) را به‌صورت $g(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟



حل : مشتق چپ و راست در $x=۱$ محاسبه می‌کنیم :

$$g'_{+}(۱) = \lim_{x\to ۱^{+}}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x+۱-۱}{x-۱} = +\infty$$

$$g'_{-}(۱) = \lim_{x\to ۱^{-}}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{-}}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{-}}(x+۱) = ۲$$

با توجه به اینکه مشتق چپ و راست برابر نیست پس تابع مشتق پذیر نمی‌باشد.

کار در کلاس ص ۸۷

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-۱$ نیز موجود نیست.
در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-۱$ را بنویسید.

حل :

$$f'_{+}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{-(x^{۲}-۱)}{x+۱}=۲$$

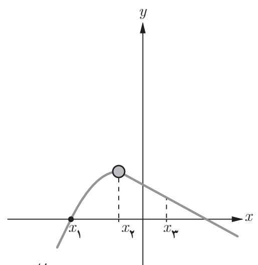
$$f'_{-}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{(x^{۲}-۱)}{x+۱}=-۲$$

نیم مماس راست: $y-۰=۲(x+۱)\to y=۲x+۲$

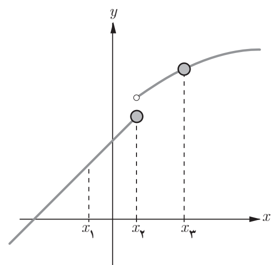
نیم مماس چپ: $y-۰=-۲(x+۱)\to y=-۲x-۲$

کار در کلاس ص ۸۹

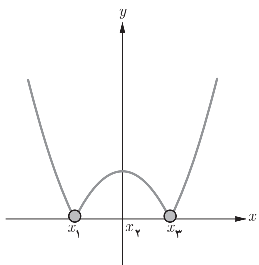
در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.



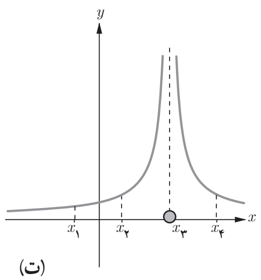
(الف)



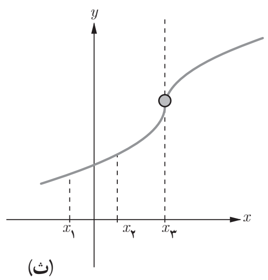
(ب)



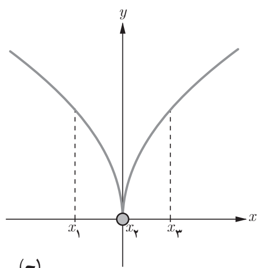
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

حل :

شکل الف، تابع در $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.

شکل ب، تابع در $x_۲$ و $x_۳$ مشتق‌پذیر نیست زیرا در این نقاط تابع ناپیوسته است.

شکل پ، تابع در $x_۳$ و $x_۱$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.

شکل ت، تابع در $x_۳$ مشتق‌پذیر نیست زیرا تابع ناپیوسته است.

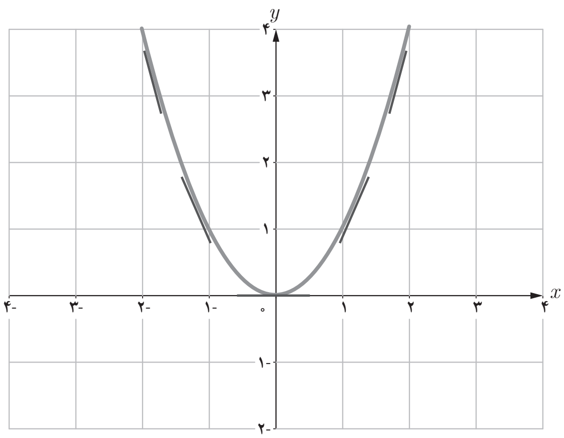
شکل ث، تابع در $x_۳$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.

شکل ج، تابع در $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.

هدف از این فعالیت عبور از مشتق در یک نقطه به مشتق به عنوان تابع به کمک چند مثال و تعمیم می‌باشد.
همان‌طور که در بخش‌های نظری نیز بیان گردید مناسب است دانش‌آموزان را با چند مثال ساده وارد بحث مشتق به عنوان تابع نماییم.

فعالیت ص ۹۰

تابع $f(x) = x^۲$ را درنظر می‌گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$۲\sqrt{۳}$	۴

$$f'(-۲) = \lim_{x\to -۲} \frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{x^۲-۴}{x+۲} = \lim_{x\to -۲}(x-۲) = -۴$$

$$f'(\sqrt{۳}) = \lim_{x\to \sqrt{۳}} \frac{f(x)-f(\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}} = \lim_{x\to \sqrt{۳}} \frac{x^۲-۳}{x-\sqrt{۳}} = \lim_{x\to \sqrt{۳}} \frac{(x+\sqrt{۳})(x-\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$$

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{x^۲}{x} = ۰$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x)=x^۲$ وجود دارد؟

حل :

$$f'(-۳) = \lim_{x\to (-۳)} \frac{f(x)-f(-۳)}{x+۳} = \lim_{x\to (-۳)} \frac{x^۲-۹}{x+۳} = -۶$$

$$f'(-۱) = \lim_{x\to (-۱)} \frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x\to (-۱)} \frac{x^۲-۱}{x+۱} = -۲$$

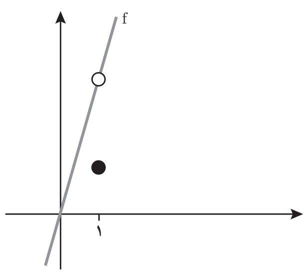
$$f'(\frac{۱}{۲}) = \lim_{x\to (\frac{۱}{۲})} \frac{f(x)-f(\frac{۱}{۲})}{x-\frac{۱}{۲}} = \lim_{x\to (\frac{۱}{۲})} \frac{x^۲-\frac{۱}{۴}}{x-\frac{۱}{۲}} = ۱$$

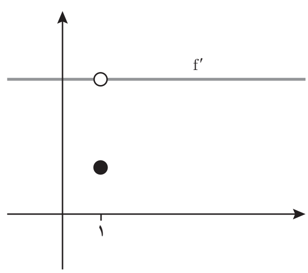
در تمام نقاط مشتق وجود دارد.

کار در کلاس ص ۹۲

اگر $\begin{cases} ۵x & x\neq ۱ \\ ۲ & ۱ \end{cases}$ $f(x)$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

حل : دامنه تابع تمام اعداد حقیقی است ولی دامنه تابع مشتق آن تمام اعداد حقیقی به غیر از ۱ می‌باشد.





$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵(x+h)-۵x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵h}{h}=۵ \qquad x\neq ۱$$

تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست زیرا پیوسته نمی‌باشد.

توصیه آموزشی

بررسی رابطه بین نمودار تابع و مشتق آن بسیار حائز اهمیت است. با تأمل در این قسمت به دانش‌آموزان کمک شود تا بهتر آن را درک کنند. از آوردن مثال‌های پیچیده برای دانش‌آموزان خودداری شود. توجه شود که تاکنون قاعده‌ای برای محاسبه مشتق مطرح نگردیده است و دانش‌آموز بایستی از طریق تعریف محاسبات را انجام دهد.

کار در کلاس ص ۹۵

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\frac{۱}{x-۴}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(۳x^۲+۵)$ پ) $h(x)=\frac{x}{۲x^۲+x-۱}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

حل:

۱ الف) $x\neq$ $\quad f'(x)=-\frac{}{(\quad)}$

ب) $g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^۲+۵)+(۶x)\sqrt{x}$

پ) $h'(x)=\frac{۱(۲x^۲+x-۱)-(۴x+۱)(x)}{(۲x^۲+x-۱)^۲}$

۲

$$(fg)'(۲) = f'(۲)g(۲) + g'(۲)f(۲) = ۵(۸) + (-۶)۳ = ۲۲$$

$$(\frac{f}{g})'(۲) = \frac{f'(۲)g(۲) - g'(۲)f(۲)}{g^{۲}(۲)} = \frac{۵(۸) - (-۶)۳}{۸^{۲}} = \frac{۵۸}{۶۴} = \frac{۲۹}{۳۲}$$

کار در کلاس ص ۹۶

مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \tan x$

ب) $g(x) = \frac{۵\cos x}{۱-\sin x}$

حل : الف) $f'(x) = \cos x(\tan x) + (۱+\tan^{۲} x)(\sin x)$

ب) $g'(x) = \frac{-۵\sin x(۱-\sin x) - (-\cos x)(۵\cos x)}{(۱-\sin x)^{۲}}$

کار در کلاس ص ۹۷

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$

ب) $g(x) = \cos^{۳} x$

پ) $h(x) = \sin(۳x^{۲}+۵)$

حل :

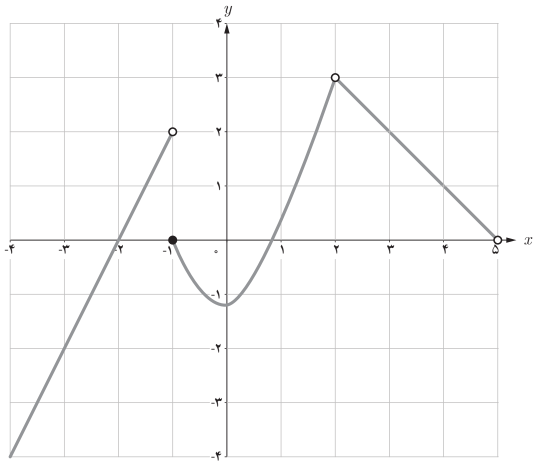
الف) $f'(x) = ۳(۲x)(x^{۲}+۱)^{۲}(۵x-۱) + ۵(x^{۲}+۱)^{۳}$

ب) $g'(x) = ۳(-\sin x)\cos^{۲} x$

پ) $h'(x) = ۶x\cos(۳x^{۲}+۵)$

کار در کلاس ص ۹۸

اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های [۱ , ۱-] ، (۵ , ۲) و [۰ , ۲-] بررسی کنید.



حل :

تابع f در بازهٔ [۱,۱-] مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف $۲x$ است. تابع در بازه (۲،۵) مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف ۱- می‌باشد. ولی تابع در بازه [۰, ۲-] مشتق‌پذیر نیست زیرا در $x=-۱$ دارای مشتق چپ ۲ و مشتق راست ۲- است (با استفاده از تعریف).

$$x<-۱: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(x+h)+۴-۲x-۴}{h}=۲$$

$$-۱<x<۲: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۲}-۱-x^{۲}+۱}{h}=۲x$$

$$۲<x<۵: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(x+h)+۵+x-۵}{h}=-۱$$

تابع در $x=-۱$ پیوسته نیست و مشتق ندارد ولی در $x=۲$ پیوسته است ولی مشتق چپ و راست برابری ندارد (دو نیم مماس داریم).

توصیه آموزشی

مفهوم مشتق‌پذیری روی یک بازه را هم از روی نمودار و هم با استفاده از تعریف مشتق برای دانش‌آموزان مشخص نمایید. توجه شود که در توابع چند ضابطه‌ای امکان بروز بدفهمی هنگام مشتق‌گیری وجود دارد. مثلاً $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۱\\ ۲x+۱ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته نیست و مشتق ندارد در حالی که اگر از هر یک از ضابطه‌ها به تنهایی مشتق گرفته شود به نتیجه اشتباه منجر می‌شود و مشتق تابع ظاهراً ۲ می‌شود. در حقیقت در این مثال شرایط مشتق‌گیری از هر دو ضابطه وجود ندارد.

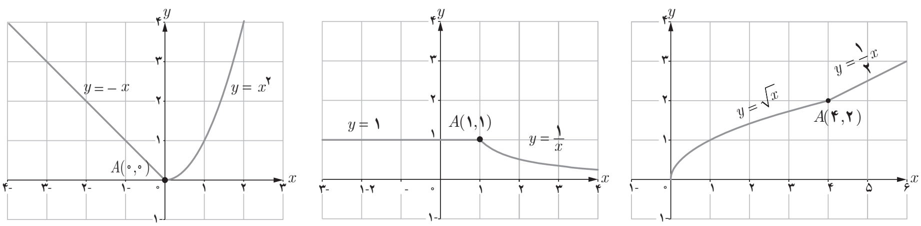
تمرین ص ۹۹

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

حل :

یکی از پاسخ‌ها می‌تواند $g(x)=\begin{cases}x+۱ & x\leq ۲\\ -۲x+۷ & x>۲\end{cases}$ و $f(x)=|x-۲|$ باشند.

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف) (ب) (پ)

حل :

الف) با استفاده از تعریف مشتق، $f'_{+}(۰)=۰\ ,\ f'_{-}(۰)=-۱$

ب) $f'_{+}(۱)=-۱\ ,\ f'_{-}(۱)=۰$

پ) با استفاده از تعریف، $f'_{+}(۴)=\frac{۱}{۲}\ ,\ f'_{-}(۴)=\frac{۱}{۴}$.

۳ تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است.

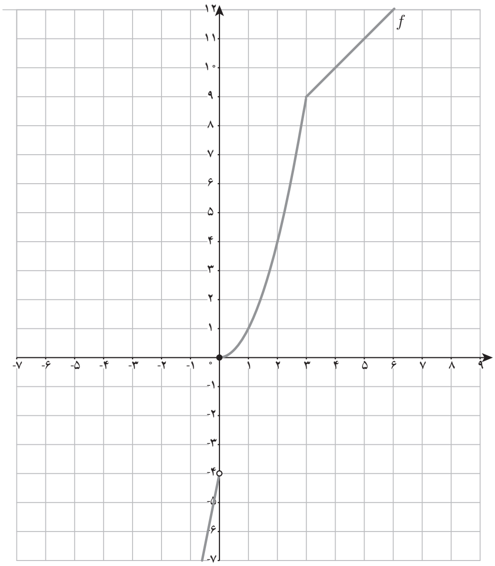
الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

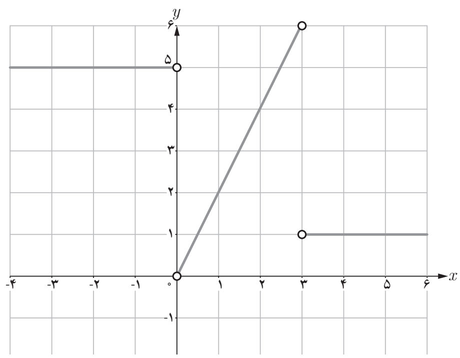
حل : الف)



ب) با استفاده از تعریف مشتق، $f'_-(0)=5$, $f'_+(0)=0$ و $f'_-(3)=6$, $f'_+(3)=1$

پ) $f'(x)=\begin{cases} 5 & x<0 \\ 2x & 0<x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$

ت)



۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x = ۲$ برابر ۳ شود.

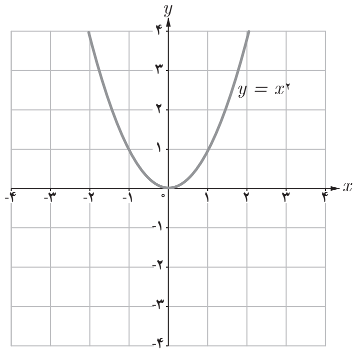
پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

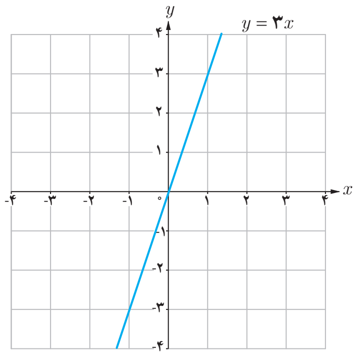
ث) در تمام نقاط منفی باشد.

حل : نمونه‌ای از پاسخ‌ها می‌تواند به‌صورت زیر باشد :

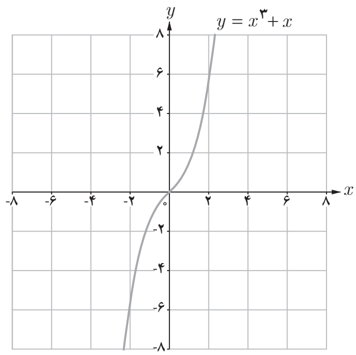
الف) $f'(۰) = ۰$

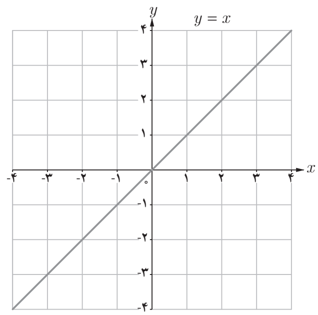


ب) $f'(۲) = ۳$

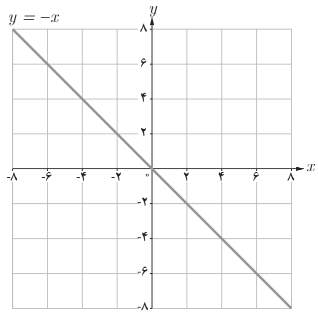


پ) $f'(x) = ۳x^{۲} + ۱$



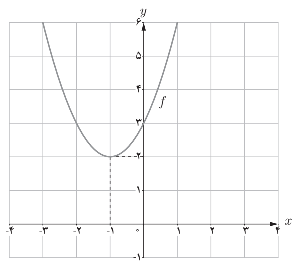


ت) $f'(x) = ۱$



ث) $f'(x) = -۱$

تذکر : توجه شود که این تمرین بازپاسخ است و مقایسه بین پاسخ‌ها چه درست یا نادرست آموزنده است.



۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۳)$ و $f'(\circ)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۲)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ بررسی کنید.

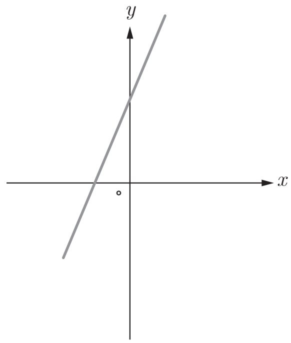
پ) تابع مشتق را رسم کنید.

حل :

الف) با استفاده از شیب خطوط مماس $f'(-۱) < f'(\circ) < f'(۲) < f'(۳)$

ب) $f'(x) = ۲x + ۲ : f'(-۱) = \circ \;,\; f'(\circ) = ۲ \;,\; f'(۲) = ۶ \;,\; f'(۳) = ۸$

پ)



۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳ & x\geq ۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

حل :

تابع در $x=۱$ پیوسته نیست پس مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ($f'_{+}(۱)=۲$ و $f'_{-}(۱)=+\infty$)

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

حل :

این مسئله بازپاسخ است یکی از جواب‌ها می‌تواند $f(x)=x \;,\; g(x)=x+۱ \;,\; h(x)=x+۲$ باشد.

۸ اگر $f(x)=|x^{۲}-۴|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲− بررسی کنید.

حل : تابع در نقاط ۲ و ۲− مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

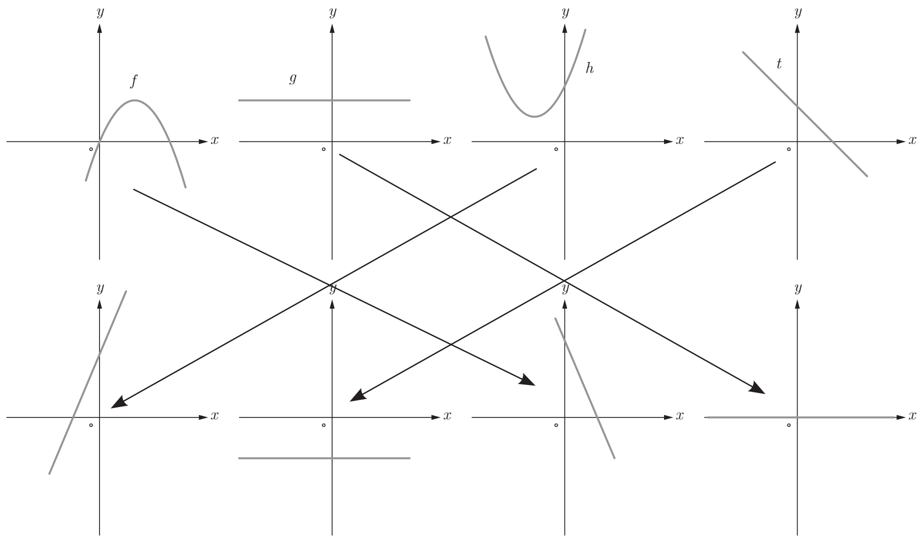
$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=۴$$

$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=-۴$$

$$f'_{+}(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^{+}}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^{+}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x+۲}=-۴$$

$$f'_{-}(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^{-}}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^{-}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x+۲}=۴$$

۹ نمودار توابع f ، g ، h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



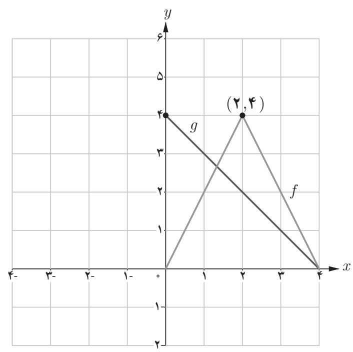
۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x) . g(x)$

مطلوب است : $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$



حل :

الف)

$h'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$

$h'(۱) = ۲(۳) + (-۱)\, ۲ = ۴$

$h'(۲) =$ وجود ندارد

$h'(۳) = (-۲)۱ + (-۱)۲ = -۴$

ب)

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

$$k'(۱) = \frac{۲(۳) - (-۱)(۲)}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

$k'(۲) =$ وجود ندارد

$$k'(۳) = \frac{(-۲)۱ - (-۱)۲}{۱} = ۰$$

۱۱ اگر $f'(۱) = ۳$ و $g'(۱) = ۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

حل :

$$(f+g)'(۱) = f'(۱) + g'(۱) = ۳ + ۵ = ۸$$

$$(۳f+۲g)'(۱) = ۳f'(۱) + ۲g'(۱) = ۳(۳) + ۲(۵) = ۱۹$$

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \leq ۰ \\ x & x > ۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_{+}(۰)$ و $f'_{-}(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

حل :

تابع f در $x = ۰$ پیوسته است و $f'_{+}(۰) = ۱$, $f'_{-}(۰) = ۰$.

$$f'_{-}(۰) = \lim_{x \to ۰^{-}} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^{-}} \frac{x^{۲} - ۰}{x - ۰} = ۰$$

$$f'_{+}(۰) = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{x - ۰}{x - ۰} = ۱$$

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (۳x^{۲} - ۴)(۲x - ۵)^{۳}$

ب) $f(x) = \dfrac{x^{۲} - ۳x + ۱}{-۳x + ۲}$

پ) $f(x) = (\sqrt{۳x + ۲})(x^{۳} + ۱)$

ت) $f(x) = \dfrac{۹x - ۲}{\sqrt{x}}$

حل :

الف) $f'(x)=۶x(۲x-۵)^{۳}+۳(۲)(۲x-۵)^{۲}(۳x^{۲}-۴)$

ب) $f'(x)=\dfrac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}$

پ) $f'(x)=\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۱)+۳x^{۲}(\sqrt{۳x+۲})$

ت) $f'(x)=\dfrac{۹(\sqrt{x})-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{x}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin^{۳}x+\cos^{۲}x$

ب) $f(x)=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$

پ) $f(x)=\mathrm{tg}^{۲}x-۲\cos x$

ت) $f(x)=\sin x\,\cos ۲x$

حل :

الف) $f'(x)=۳\cos x\sin\quad x+۲(-\sin x)\cos x$

ب) $f'(x)=\dfrac{-\cos x(۱+\sin x)-\cos x(۱-\sin x)}{(۱+\sin x)^{۲}}$

پ) $f'(x)=۲(۱+\tan^{۲}x)\tan x+۲\sin x$

ت) $f'(x)=\cos x\cos ۲x+(-۲\sin ۲x)\sin x$