مثلثات

فصل ۲

انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به‌هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

درس ۱
تناوب و تانژانت

اهداف درس

۱ درک مفهوم تناوب و نقش آن در ساختار توابع متناوب مثلثاتی

۲ تشخیص دورهٔ تناوب در توابع با ضابطهٔ $y = a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

۳ تشخیص مقدار ماکزیمم و مینیمم در توابع با ضابطهٔ $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

۴ تعیین ضابطه از روی نمودار توابع $y= a\sin bx+c$ و $y= a\cos bx+c$

۵ درک تأثیر پارامترهای a، b و c در توابع با ضابطهٔ $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این توابع.

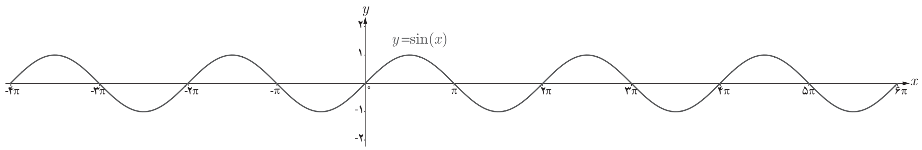
۶ آشنایی با تابع تانژانت و تغییرات آن در دایرهٔ مثلثاتی.

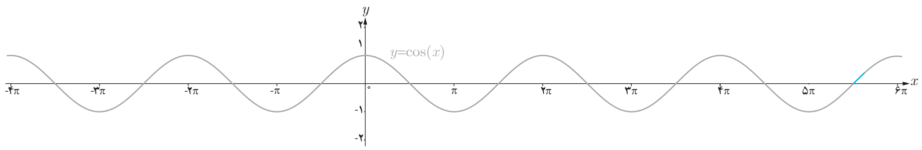
۷ آشنایی با نمودار تابع تانژانت و ارتباط آن با دایرهٔ مثلثاتی.

۸ تشخیص مقدار و علامت تانژانت زاویهٔ دلخواه با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی.

روش تدریس

در ابتدای درس با توجه به شناخت نسبی که دانش‌آموزان از توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ دارند، مفهوم دورهٔ تناوب بیان شده است و با تأکید بر یکسان بودن مقادیر این دو تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها این مفهوم توضیح داده شده است. در کتاب ریاضی ۲ (حسابان ۱) روابط $\sin(x\pm ۲k\pi)=\sin x$ و $\cos(x\pm ۲k\pi)=\cos x$ در فصل مثلثات آورده شده است و معلم می‌تواند با توضیح و یادآوری مفهوم این دو تساوی با استفاده از نمودارهای $\sin x$ و $\cos x$ که در صفحهٔ ۳۲ (۲۴) کتاب رسم شده است، به درک بهتر دانش‌آموزان به این مفهوم کمک نماید.





با توجه به اینکه نمودار این توابع در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π، ۸π و ... و کلاً ۲kπ تکرار می‌شود، می‌توان گفت در تمام آنها تابع تکرار می‌شود اما در کتاب، دورهٔ تناوب را کوچک‌ترین آنها معرفی کرده است و به‌طور کلی :

تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم : $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دورهٔ تناوب f می‌نامیم.

تذکر : مفهوم تناوب و دورهٔ تناوب برای توابع غیرمثلثاتی نیز به‌کار می‌رود ولی کتاب تنها به بررسی این مفهوم در توابع مثلثاتی که اشاره شد، پرداخته است و از تدریس تناوب در توابع دیگر احتراز شود.

همچنین از بررسی تناوب توابع مثلثاتی پیچیده که حاصل‌ضرب یا حاصل‌جمع و ... دو یا چند تابع مثلثاتی هستند نیز اجتناب شود. دلیل این امر تأکید بر مفهوم اصلی تناوب و نیز احتراز از تکنیک‌های محاسباتی برای یافتن دورهٔ تناوب توابعی است که دانش‌آموز صرفاً با توجه به عملیات جبری، دورهٔ تناوب آنها را یافته و قادر به رسم نمودار آنها نیست و نمی‌تواند تناوب تابع را از روی نمودار آن بررسی کند.

ازاین‌رو به دبیران محترم توصیه می‌شود که با استفاده از ابزارهای نوین آموزشی مانند نرم‌افزار جئوجبرا (GeoGebra[۱]) سعی در تعمیق مفهوم به‌جای آموزش رویه‌های جبری داشته باشند. بدیهی است آموزش رویه‌ها نیز در جای خود اهمیت داشته و بخش بزرگی از آموزش ریاضی را تشکیل می‌دهند. اما تأکید روی این رویه‌ها بدون درک درستی از مفهوم دورهٔ تناوب مدنظر کتاب نمی‌باشد.

۱ــ این نرم‌افزار از سایت www.GeoGebra.org قابل دانلود است. در این سایت محتواهای مفیدی برای استفاده در کلاس درس قابل دسترسی است.

فعالیت ص ۲۴

۱ هدف این فعالیت، بررسی تأثیر ضریب a در تابع $f(x)=a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع است. در جدول صفحهٔ ۲۵ نمودار توابع مختلفی با ضابطهٔ $y=a\sin x$ و مقادیر مختلف a رسم شده است، که مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب توابع از روی نمودار آنها مشخص می‌شود. برای مثال در تابع $y=-۳\sin x$، مقدار ماکزیمم ۳ و مقدار مینیمم ۳- است و دورهٔ تناوب ۲π است و یا در تابع $y=-\frac{۱}{۳}\sin x$ مقدار ماکزیمم $\frac{۱}{۳}$ و مقدار مینیمم $-\frac{۱}{۳}$ و دورهٔ تناوب نیز ۲π است.

۲ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تابع $y=a\sin x$ و $y=a\cos x$ داریم :

$$\max=|a| \quad , \quad \min=-|a| \quad , \quad T=۲\pi$$

یعنی ضریب a بر مقدار ماکزیمم و مینیمم مؤثر است ولی دورهٔ تناوب را تغییر نمی‌دهد.

۳ همچنین با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع بدیهی است که در صورت انتقال عمودی یک تابع، دورهٔ تناوب آن تغییر نمی‌کند ولی مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع تغییر می‌کنند و داریم :

$$\begin{cases} y=a\sin x+c \\ y=a\cos x+c \end{cases} \rightarrow \max=|a|+c \;,\; \min=-|a|+c \;,\; T=۲\pi$$

فعالیت ص ۲۶

۱ هدف این فعالیت بررسی تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر max و min این تابع است. در جدول این فعالیت، نمودار توابع مختلفی با ضابطهٔ $y=\sin bx$ و مقادیر مختلف b رسم شده است که مقادیر max و min و دورهٔ تناوب توابع از روی نمودار آنها مشخص می‌شود. برای مثال در تابع $y=\sin(-۳x)$، مقدار max برابر ۱ و مقدار مینیمم برابر ۱- و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{۳}$ است و یا در تابع $y=\sin(\frac{x}{۲})$ مقدار max برابر ۱ و مقدار مینیمم برابر ۱- و دورهٔ تناوب ۴π است.

۲ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تابع $y=\sin bx$ و $y=\cos bx$ داریم :

$$\max=۱ \quad , \quad \min=-۱ \quad , \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

۳ همچنین با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع بدیهی است که در صورت انتقال عمودی یک تابع، دورهٔ تناوب آن تغییری نمی‌کند ولی مقادیر max و min تابع تغییر می‌کنند و داریم :

$$\begin{cases} y=\sin bx+c \\ y=\cos bx+c \end{cases} \to \max=۱+c \ , \ \min=-۱+c \ , \ T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

نتیجه : با توجه به دو فعالیت قبل می‌توان گفت که در دو تابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع تأثیری ندارد ولی در مقدار max و min آن مؤثر است اما ضریب b در دورهٔ تناوب تابع مؤثر بوده ولی در مقدار max و min آن تأثیری ندارد و انتقال عمودی نیز که با مقدار c مشخص می‌شود در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و فقط در مقدار max و min تابع اثرگذار است.

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

بنابراین اگر ضابطهٔ تابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ باشد می‌توانیم مقادیر ماکزیمم و مینیمم و همچنین دورهٔ تناوب تابع را به‌دست آوریم و به عکس اگر این مقادیر را داشته باشیم می‌توانیم ضابطهٔ توابع مورد نظر را بنویسیم.

مثال ص ۲۷

در این مثال چهار ضابطهٔ تابع داده شده و دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هرکدام را خواسته است که با استفاده از مطالبی که گفته شد می‌توان مقادیر مورد نظر را به‌دست آورد :

الف)
$$\left.\begin{array}{l} y=۳\sin(۲x)-۲ \\ a=۳, b=۲, c=-۲ \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \max=|a|+c=|۳|-۲=۱ \\ \min=-|a|+c=-|۳|-۲=-۵ \end{array}$$

و $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi$

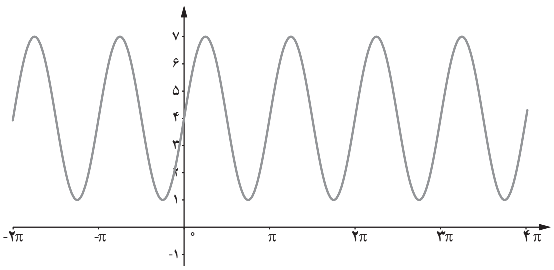
ب)
$$\left.\begin{array}{l} y=\pi\sin(-x)+۱ \\ a=\pi, b=-۱, c=۱ \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \max=|\pi|+۱=\pi+۱ \\ \min=-|\pi|+۱=۱-\pi \end{array}$$

و $T=\frac{۲\pi}{|-۱|}=۲\pi$

مثال ص ۲۸

در این مثال چهار نمودار مثلثاتی آورده شده و با تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم، ضابطهٔ تابع را خواسته است.

الف)

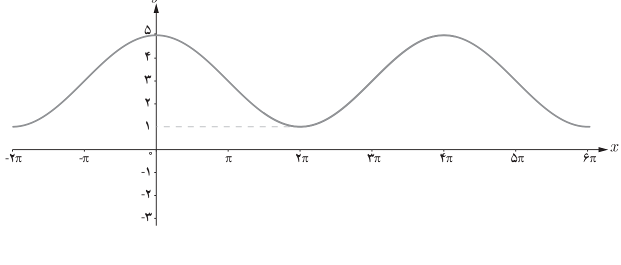


با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که ماکزیمم یا مینیمم تابع در $x=۰$ واقع نشده است، بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به‌صورت $y=a\sin bx+c$ باشد. مقدار max برابر ۷ و مقدار min برابر ۱ است. همچنین با دقت در نمودار مشخص است که طول بازه‌ای که تابع در آن یک بار تکرار می‌شود برابر π است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} |a|+c=۷ \\ -|a|+c=۱ \end{cases} \rightarrow ۲c=۸ \rightarrow c=۴ \quad , \quad |a|=۳ \text{ و } \frac{۲\pi}{|b|}=\pi \rightarrow |b|=۲$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید همواره مقدار c، میانگین max و min تابع است. پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=۳\sin ۲x+۴$ یا $y=-۳\sin(-۲x)+۴$ است، یعنی a و b یا هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند که در کتاب هر دو مقدار a و b را مثبت فرض کرده و ضابطهٔ $y=۳\sin ۲x+۴$ را نوشته است.

ب)



با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که ماکزیمم تابع در $x=0$ واقع شده است. بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به‌صورت $y=a\cos bx+c$ باشد. مقدار max برابر ۵ و مقدار min برابر ۱ است. از نمودار پیداست که دورهٔ تناوب برابر 4π است، بنابراین داریم :

$$\begin{cases} |a|+c=5 \\ -|a|+c=1 \end{cases} \to 2c=6 \to c=3 \quad , \quad c=3 \ , \quad |a|=2$$

که a و b هر دو مثبت هستند.

$$\frac{2\pi}{|b|}=4\pi \to |b|=\frac{1}{2}$$

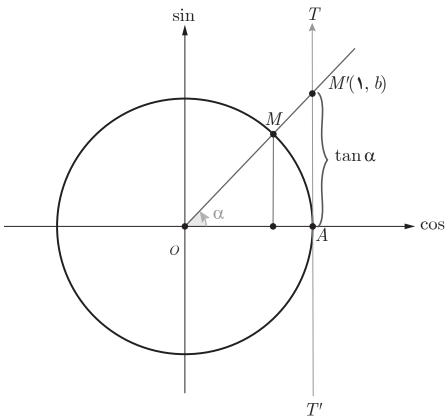
بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=2\cos(\frac{x}{2})+3$ است.

تانژانت

فعالیت ص ۲۹

هدف این فعالیت معرفی محور تانژانت و تشخیص مقدار و علامت تانژانت برای زوایای مختلف در نواحی دایرهٔ مثلثاتی است.

در قسمت الف، باید این مطلب توضیح داده شود که تانژانت هر زاویهٔ دلخواه مانند α، از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود و این خط را محور تانژانت می‌نامیم. توصیه می‌شود دبیران محترم علاوه بر شکل کتاب که تانژانت زاویه‌ای در ربع اول را مشخص کرده است، برای هر سه ناحیهٔ دیگر مثال‌های دلخواه زده و از دانش‌آموزان بخواهند تا تانژانت زاویه‌ها را مشخص نمایند. تشخیص علامت تانژانت زاویه که بستگی به ناحیهٔ زاویه دارد نیز یک هدف آموزشی مهم بوده که باید به دقت توضیح داده شود.

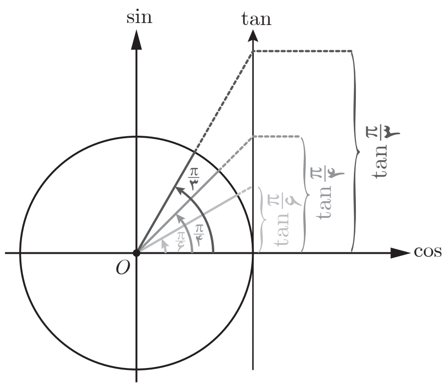


در قسمت پ توضیح تعریف نشده بودن $\tan\frac{\pi}{۲}$ باید با رسم زاویه‌هایی که در ربع اول به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند صورت بگیرد. همچنین توضیح در مورد $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ با رسم زاویه‌هایی در ربع سوم که به $\frac{۳\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند انجام می‌شود.

تغییرات تانژانت

فعالیت ص ۳۰

این فعالیت به منظور بررسی تغییرات تابع تانژانت طراحی شده است. در شکل، چند زاویه که دانش‌آموزان با آن آشنا هستند مشخص شده است و تانژانت این زوایا روی محور تانژانت با رنگ‌های مربوط تعیین شده است. دانش‌آموز با دقت در مقادیر تانژانت زوایای مورد نظر درمی‌یابد که با بزرگ شدن زاویه‌ها در ربع اول، مقادیر تانژانت نیز افزایش می‌یابند و با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در این ربع و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{۲}$، مقدار تانژانت بیشتر و بیشتر می‌شود تا اینکه در $\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است. نکتهٔ مهم در این فعالیت جلب توجه دانش‌آموزان به تغییرات تانژانت در ربع اول است.



کار در کلاس ص ۳۰

این کار در کلاس تعمیم و جمع‌بندی فعالیت قبلی است که در آن تغییرات تانژانت در ربع‌های دوم تا چهارم نیز بررسی شده است و در قسمت الف روند تغییر مدنظر بوده است که روند تغییرات تانژانت در هر ربع افزایشی است. در قسمت ب بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع خواسته است که به‌صورت زیر است :

ربع دوم: $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi \to \tan\alpha \in (-\infty, ۰)$

ربع سوم: $\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲} \to \tan\alpha \in (۰, +\infty)$

ربع چهارم: $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi \to \tan\alpha \in (-\infty, ۰)$

در قسمت پ جدولی داده شده است که مقادیر تانژانت را برای زوایایی که در ریاضی ۱ و حسابان ۱ دانش‌آموز با نسبت‌های مثلثاتی آنها آشنا شده، خواسته است که در همهٔ ربع‌ها جهت تغییرات صعودی و علامت $\nearrow$ است. هدف این بررسی با جزئیات فوق، فراهم آوردن مقدمات رسم نمودار تابع تانژانت است.

تابع تانژانت :

ماهیت تابعی تانژانت در صفحهٔ ۳۲ به‌صورت رسمی بیان شده است و اینکه به ازای هر زاویهٔ دلخواه α در دایرهٔ مثلثاتی (به‌جز $k \in \mathbb{Z}$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$) مقداری حقیقی به‌عنوان $\tan\alpha$ داریم این امر را به‌طور واضح بیان می‌کند.

دامنه و برد تابع تانژانت نیز در همین قسمت معرفی شده است. دورهٔ تناوب تانژانت π است زیرا :

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

و مقداری کوچک‌تر از π وجود ندارد که این رابطه به ازای آن برقرار باشد.

کتاب در مورد دورهٔ تناوب محدودیتی را قرار داده است که «به‌دست آوردن دورهٔ تناوب تابع شامل تانژانت مد نظر نیست.» مثلاً به‌دست آوردن توابعی مانند $\tan ۲x$، $\tan^۲ ۳x$، $\tan x+\tan ۴x$ و ... مد نظر نیست. بنابراین رسم توابع شامل تانژانت مانند $\tan ۲x+۱$، $\tan ۳x$ و ... مدنظر نبوده و استفاده از آنها در ارزشیابی‌ها و آزمون‌ها مجاز نیست.

تمرین درس اول

۱

الف) $y=۱+۲\sin ۷x$

$a=۲\ ,\ b=۷\ ,\ c=۱$

$\max = |a|+c=|۲|+۱=۳$

$\min = -|a|+c=-|۲|+۱=-۱$

$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{|۷|}=\frac{۲\pi}{۷}$

ب) $y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$

$a=-۱\ ,\ b=\frac{\pi}{۲}\ ,\ c=\sqrt{۳}$

$\max = |-۱|+\sqrt{۳}=۱+\sqrt{۳}$

$\min = -|-۱|+\sqrt{۳}=\sqrt{۳}-۱$

$T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|}=۴$

پ) $y=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲$

$a=-\pi\ ,\ b=\frac{۱}{۲}\ ,\ c=-۲$

$\max = |-\pi|-۲=\pi-۲$

$\min = -|-\pi|-۲=-\pi-۲$

$T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۲}\right|}=۴\pi$

ت) $y=-\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

$a=-\frac{۳}{۴}\ ,\ b=۳\ ,\ c=۰$

$\max = \left|-\frac{۳}{۴}\right|+۰=\frac{۳}{۴}$

$\min = -\left|-\frac{۳}{۴}\right|+۰=-\frac{۳}{۴}$

$T=\frac{۲\pi}{|۳|}=\frac{۲\pi}{۳}$

۲ در این سؤال باید با توجه به ضابطه‌ها و ویژگی‌های نمودارها، نمودار هر ضابطه را مشخص کنیم. ابتدا دورهٔ تناوب و max و min هر ضابطه را تعیین می‌نماییم.

الف) $y=\sin\pi x \rightarrow \max=۱\ ,\ \min=-۱\ ,\ T=۲$

ب) $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x \rightarrow \max=۳\ ,\ \min=۱\ ,\ T=۴\pi$

پ) $y=\sin ۲x \rightarrow \max=۱\ ,\ \min=-۱\ ,\ T=\pi$

ت) $y=۱-\cos ۲x \rightarrow \max=۲\ ,\ \min=۰\ ,\ T=\pi$

نمودار ۱ : $\max=۲$ ، $\min=۰$ و $T=\pi$ است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۱، $y=۱-\cos ۲x$ (قسمت ت) است.

نمودار ۲ : $\max=۳$ ، $\min=۱$ و $T=۴\pi$ است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۲، $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x$ (قسمت ب) است.

نمودار ۳ : $\max=۱$ ، $\min=-۱$ و $T=\pi$ است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۳، $y=\sin ۲x$ (قسمت پ) است.

نمودار ۴ : $\max=۱$ ، $\min=-۱$ و $T=\frac{۲\pi}{۳}$ است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۴، $y=\sin\pi x$ (قسمت الف) است.

۳ در این سؤال دورهٔ تناوب و مقدار max و min داده شده است و ضابطهٔ تابعی مثلثاتی خواسته است. پاسخ‌های مختلفی برای این سؤال می‌توان نوشت :

الف) $c=۰\ ,|a|=۳\ ,|b|=۲ \longrightarrow y=۳\sin ۲x$

ب) $c=۶\ ,|a|=۳\ ,|b|=\frac{۲\pi}{۳} \longrightarrow y=-۳\cos(\frac{۲\pi}{۳}x)$

پ) $c=-۴\ ,|a|=۳\ ,|b|=\frac{۱}{۲} \longrightarrow y=۳\sin(-\frac{۱}{۲}x)-۴$

ت) $c=۰\ ,|a|=۱\ ,|b|=۴ \longrightarrow y=-\cos(-۴x)$

از دانش‌آموزان بخواهید ضابطه‌های دیگری را نیز بنویسند.

۴

الف) ماکزیمم یا مینیمم نمودار در $x=۰$ واقع نشده است، بنابراین ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به‌صورت $y=a\ \sin bx+c$ باشد.

$$c=۱\ ,\ |a|=۲\ ,\ |b|=\frac{۱}{۲} \to y=۲\sin(\frac{x}{۲})+۱$$

ب) ضابطهٔ این تابع می‌تواند به‌صورت $y=a\ \cos bx+c$ باشد.

الف) $c=-۱\ ,|a|=۳\ ,|b|=۲ \longrightarrow y=-۳\cos ۲x-۱$

۵

الف) نادرست زیرا : $\frac{۷\pi}{۶}<\frac{\pi}{۴}$ ولی $\tan\frac{\pi}{۴}>\tan\frac{۷\pi}{۶}$. تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

ب) نادرست، زیرا تابع تانژانت در تمام بازه‌هایی که تعریف می‌شود اکیداً صعودی است.

پ) با توجه به ویژگی‌های تابع تانژانت درست است.

۶ در این سؤال، با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، مقایسهٔ مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را خواسته است.

الف) $\circ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\circ$		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$
sin	$\circ$	$\nearrow$	$\frac{۱}{۲}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\nearrow$	۱
tan	$\circ$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\nearrow$	۱	$\nearrow$	$\sqrt{۳}$	$\nearrow$	$+\infty$ ت ن

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		$\frac{۱۱\pi}{۶}$		۲π
sin	-۱	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\nearrow$	$-\frac{۱}{۲}$	$\nearrow$	$\circ$
tan	$-\infty$ ت ن	$\nearrow$	$\sqrt{۳}$	$\nearrow$	-۱	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\nearrow$	$\circ$

درس ۲

معادلات مثلثاتی

اهداف درس

درس دوم از فصل مثلثات به معادلات مثلثاتی می‌پردازد. هدف از این فصل آشنا کردن دانش‌آموزان با معادلات مثلثاتی و نحوه حل و تفسیر جواب‌های معادلات مثلثاتی برای برخی معادلات ساده است. گفتنی است که رعایت حدود و ثغور این معادلات در آموزش برای اتمام محتوای کل کتاب در طول سال تحصیلی از یک سو و رعایت آنها برای ارزشیابی از سوی دیگر ضروری است.

اهداف آموزشی مدنظر این درس به قرار زیر هستند :

۱ آشنایی با معادلات ساده مثلثاتی و ارتباط آنها نمودار توابع مثلثاتی متناظر

۲ حل معادلات ساده مثلثاتی و یافتن جواب‌های کلی معادلات

۳ بررسی درسی جواب با توجه به محدودیت‌های مطرح شده در مسایل کاربردی

روش تدریس

این درس به معادلات مثلثاتی ساده همراه با برخی کاربردهای مقدماتی آنها در مدلسازی می‌پردازد.
بررسی معادلات مثلثاتی بر پایه دانش قبلی دانش‌آموزان است از جمله اینکه دانش‌آموزان با نمودار توابع مثلثاتی ساده آشنا هستند. از این رو با برجسته کردن ارتباط بین جواب معادلات مثلثاتی و صفرهای توابع مثلثاتی نظیر، رفته رفته حالت کلی (یا جواب کلی) معادلات ساده مثلثاتی را به کمک خود دانش‌آموزان

به دست می‌آوریم. اینکار فرایند ابتدا برای معادله $\sin x = 0$ و $\sin x = 1$ انجام شده و سپس در فعالیت ص۳۶ برای معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ دنبال شده است.

فعالیت ص۳۶

از این فعالیت ابتدا با دانش قبلی دانش‌آموزان از روابط مثلثاتی و جدول مقادیر مثلثاتی سعی در یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ می‌شود. احتمالاً دانش‌آموزان به این شیوه تعدادی از جواب‌ها را حدس می‌زنند اما نه همه آنها را. سپس از طریق رسم نمودار تابع $y = \sin x$ و قطع دادن آن با خط $y = \frac{1}{2}$ راه منسجم‌تری برای یافتن جواب‌های معادله می‌یابند. در گام بعدی سعی در دسته‌بندی جواب‌های یافته می‌شود. در این مرحله از دایره مثلثاتی برای دسته‌بندی جواب‌ها استفاده می‌شود. به این طریق گام به گام دانش‌آموزان را در یافتن جواب‌های کلی معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ راهنمایی می‌کنیم.

در ادامه آخرین گام برای حالت کلی معادله یعنی $\sin x = a$ که $-1 \leq a \leq 1$ انجام داده شده است. توصیه می‌شود که قبل از ارائه حالت کلی معادله سینوسی، با چند مثال دیگر گام‌های فعالیت قبل تکرار شود و پس از آن به حالت کلی معادله $\sin x = a$ که $-1 \leq a \leq 1$ پرداخته شود.

پس از چند مثال و کار در کلاس به معادلات کسینوسی می‌پردازیم.

فعالیت ص۳۸

این فعالیت مشابه فعالیت قبل اما برای معادلات کسینوسی است. در اینجا گام اول که حدس و آزمایش به کمک جدول مقادیر کسینوس و روابط مثلثاتی آن است حذف نشده است. چنانچه دبیران محترم انجام این گام را برای دانش‌آموزان خود لازم می‌دانند. می‌توانند آنرا همانند فعالیت قبل اجرا کنند. در پایان با استفاده از دایره مثلثاتی و دسته‌بندی کردن جواب‌های به‌دست آمده از تقاطع نمودارها، جواب‌های کلی معادله کسینوسی $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ به‌دست می‌آیند.

پس از فعالیت ص ۳۸، حالت کلی معادلات کسینوسی به‌صورت $\cos x = a$ که $-1 \leq a \leq 1$ از طریق دایره مثلثاتی بررسی شده و جواب‌های کلی آن داده شده است.

شایان ذکر است که در این درس فقط به معادلاتی پرداخته می‌شود که در نهایت زاویه موردنیاز برای محاسبه جواب‌ها شناخته شده باشد مثلاً معادلاتی که نهایتاً به‌صورت $\sin x = ۰/۳$ ختم می‌شوند مورد نظر نیست و لذا نیازی به تعریف زوایای معکوس مثلثاتی و نیز مفهوم زاویه اصلی نمی‌باشد.

در ادامه سعی شده با جواب‌هایی از معادلات که می‌بایست در شرط خاصی صدق کنند پرداخته شود. دانش‌آموزان در مثال آخر ص ۳۹ در شرایطی واقعی و کاربردی از این نوع محدودیت‌ها که به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند آشنا می‌شوند. اغلب جواب‌هایی از معادله که در شرایط خواسته شده از مسئله صدق می کنند را «جواب‌های خاص» می گویند. در کتاب از این اصطلاح غیرضروری پرهیز شده و به جای آن سعی شده دانش‌آموز از خلال خواسته‌های مسئله‌ها و اطلاعات داده شده درک کند که همه جواب‌های به‌دست آمده از معادله جواب مسئله نیستند.

در صفحهٔ ۴۱، با رسم نمودار تابع $y = \tan x$ و خط $y = a$ به جواب‌های معادله $\tan x = a$ که همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است؛ دست می‌یابد و با بررسی معادلهٔ $\tan x = a$ در دایرهٔ مثلثاتی جواب‌های کلی این معادله یعنی $x = k\pi + \alpha \quad (k \in z)$ را به دست می‌آورد. همچنین در صفحهٔ ۴۲، رابطهٔ تانژانت مجموع دو زاویه را به دست آورده است که در مثال ص ۴۳ یک مثال کاربردی از این رابطه آورده شده است.

نمونه سؤالات برای ارزشیابی

۱ فرض کنید $\sin\alpha = a$ و α زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارات زیر را برحسب α بدست آورید.

الف) $\sin ۲\alpha$

ب) $\cos ۲\alpha$

۲ معادلات زیررا حل کنید.

الف) $\sin ۵x = \sin (۲x + ۱)$

ب) $\cos ۲x - \sin x - ۲ = -۲$

ج) $\sin ۲x - \sin x = ۰$