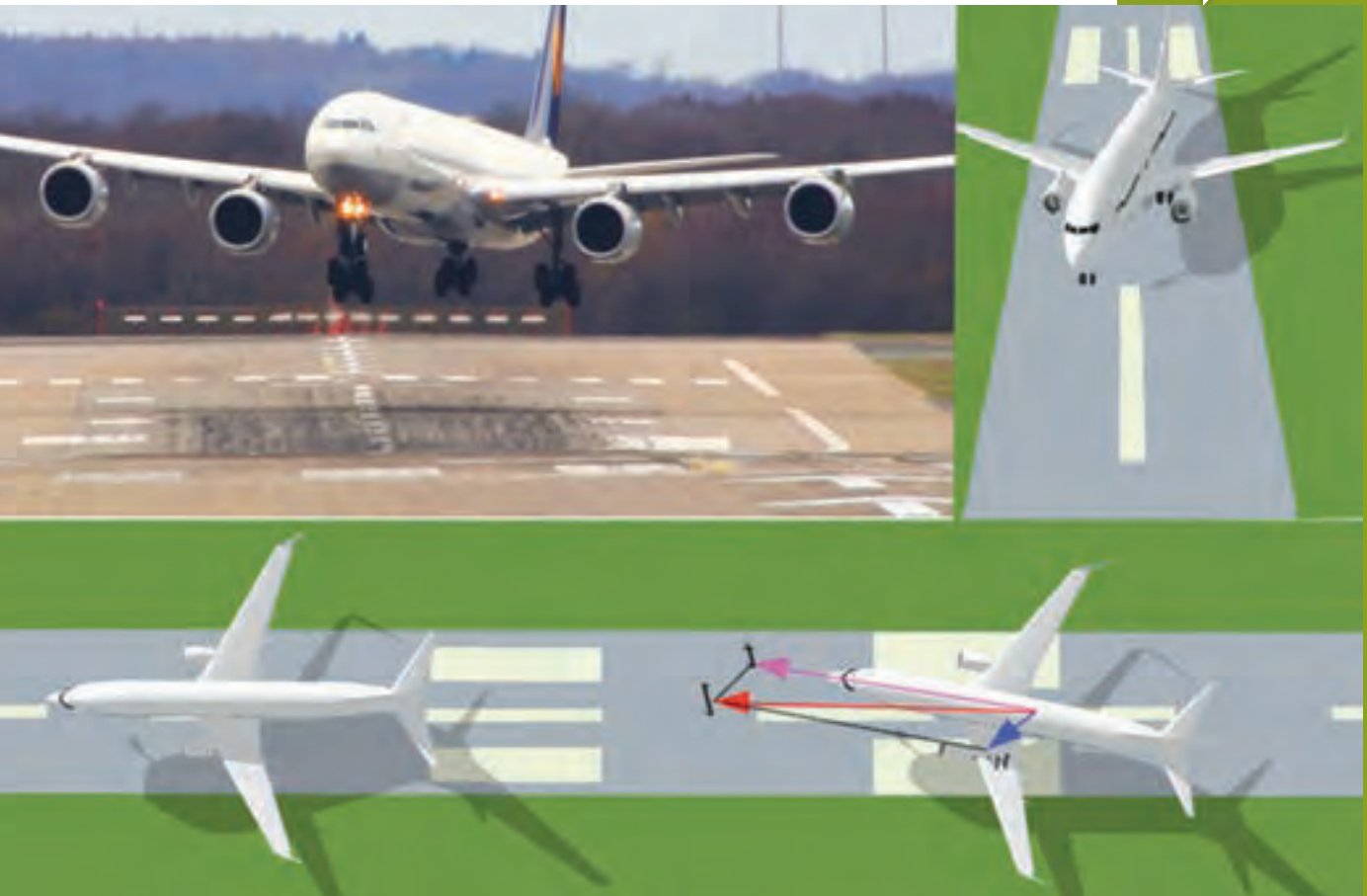


۳

فصل سوم

بردارها



▀ بنابه گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی غیر هم‌راستا با خط فرود می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند بردارهای نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار گیرد. به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند.

معرفی فضای \mathbb{R}^2

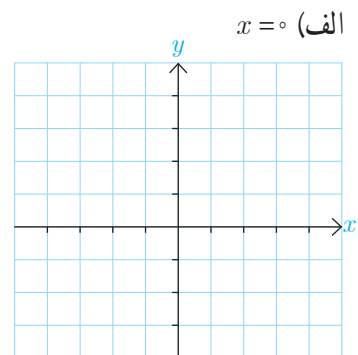
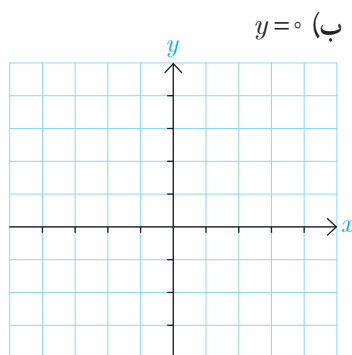
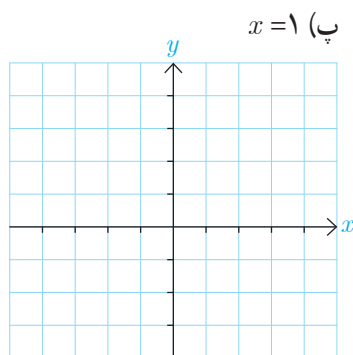
با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می‌دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (a, b) که $a, b \in \mathbb{R}$ مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتب (x, y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با \mathbb{R}^2 نمایش می‌دهند، یعنی:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

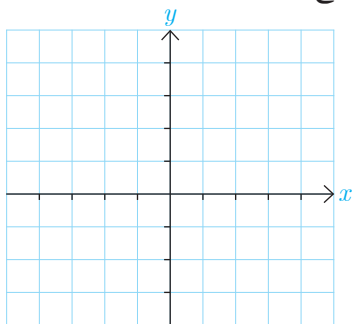
همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می‌دانید که حالت کلی آن به صورت $ax + by = c$ است که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و a و b هم‌زمان صفر نیستند).
به طور کلی هر وقت گفته می‌شود رابطه یا معادله‌ای نمودار G را مشخص می‌کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار G در آن رابطه یا معادله صدق می‌کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار G قرار دارد.
با توجه به آنچه گفته شد می‌خواهیم در \mathbb{R}^2 یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکل‌های متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل‌ها، روابط مرتبط با آنها را مشخص نماییم.

کاردرکلاس

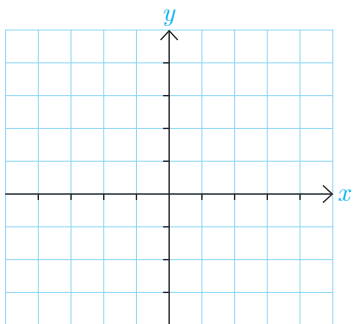
۱- برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.



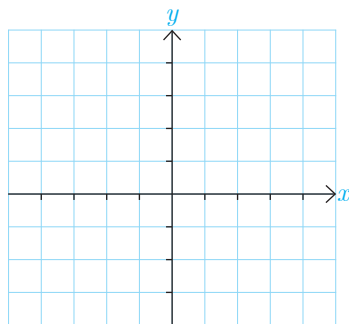
ج) $y = x^2, 1 \leq x \leq 2$



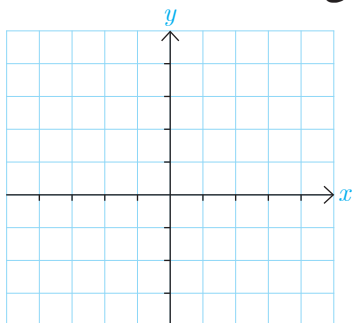
ث) $y = x^2, -1 < x \leq 2$



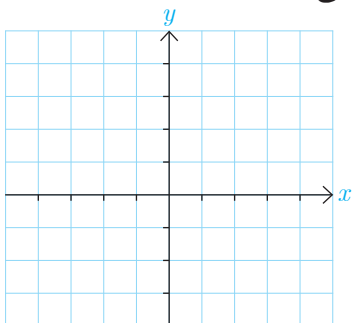
ت) $x = 1, -1 \leq y < 3$



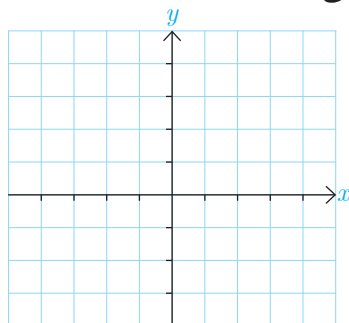
خ) $y \geq x^2$



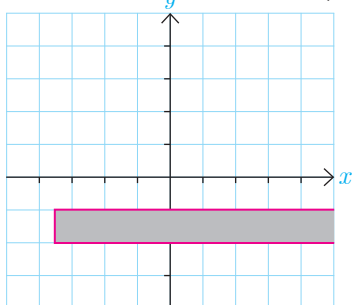
ح) $x^2 < y \leq 2$



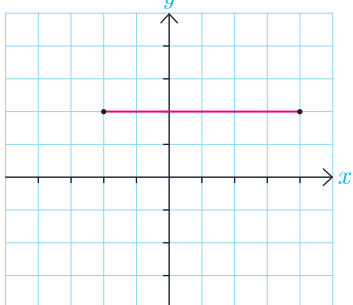
ج) $-1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq -2$



(ب)

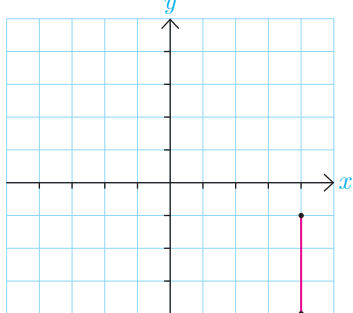


(الف)

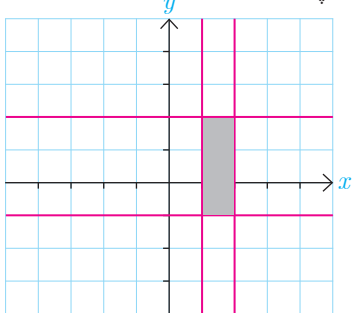


۲- در هر یک از شکل‌های روبه‌رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.^۱

(ت)



(پ)



۱- صرفاً ناحیه‌هایی مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.

حال به سراغ فضای \mathbb{R}^3 می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای \mathbb{R}^3 و مجموعه تمام سه‌تایی‌های (a,b,c) که در آن $a,b,c \in \mathbb{R}$ برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیریم.

■ معرفی فضای \mathbb{R}^3

مشابه \mathbb{R}^2 می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) که در آنها x,y,z اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای \mathbb{R}^3 می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

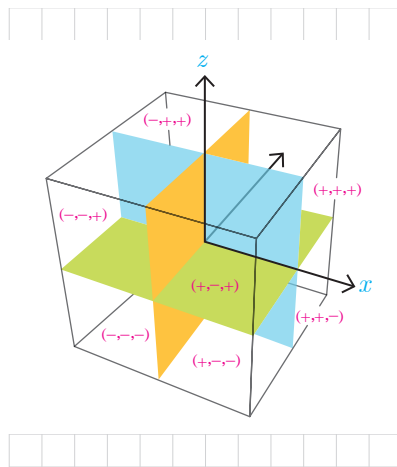
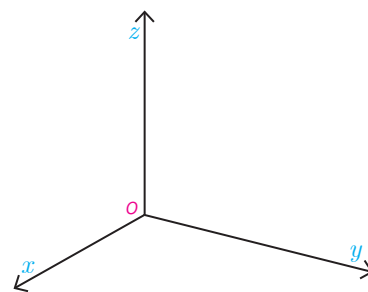
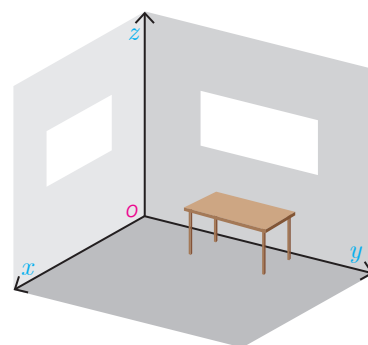
به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط \mathbb{R}^2 از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم x و y استفاده می‌شود. به طور مشابه می‌توان فضای \mathbb{R}^3 را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دو عمود برهم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محور دو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کنج^۱ می‌دهند.

محورهای Ox ، Oy و Oz به ترتیب محور x ، محور y و محور z نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت‌اند از صفحه xy (کف اتاق) شامل محور x و y ، صفحه yz (دیوار سمت راست) شامل محور y و z ، صفحه xz (دیوار سمت چپ) شامل محور x و z و z و از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه O) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه \mathbb{R}^3 به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه xy و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه xy هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه xy مطابق با شماره گذاری استاندارد یک دستگاه \mathbb{R}^2 شماره گذاری می‌شوند.

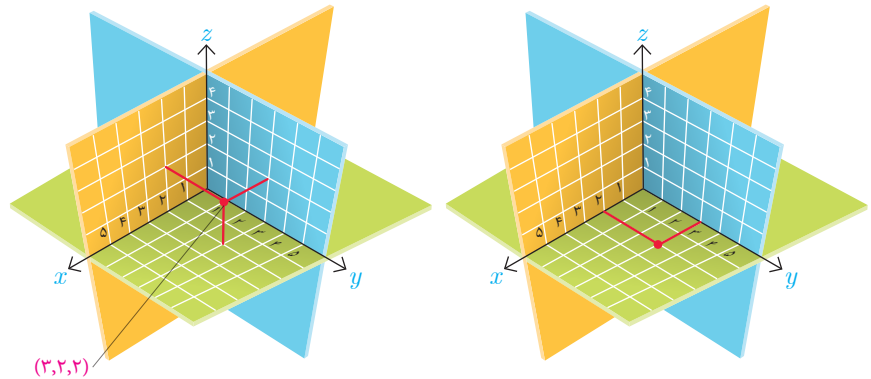
شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

مثلاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه xy از ۵ تا ۸ شماره گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول روبه‌رو مشخص شده‌اند.

۱- از برخورد سه صفحه دو به دو متقاطع، یک کنج تشکیل می‌شود.



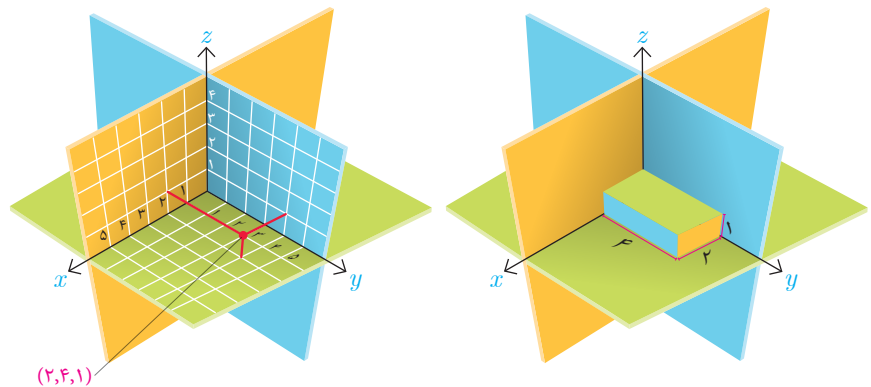
برای نمایش سه‌تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) در دستگاه مختصات \mathbb{R}^3 کافی است ابتدا همانند شکل ۱ نقطه (x_0, y_0) را در صفحه xy بیابیم و سپس ارتفاع آن را به اندازه z_0 در راستای موازی با محور z ‌ها (یعنی به‌طور عمودی) تغییر دهیم تا شکل شماره ۲ حاصل شود.



شکل شماره ۲

شکل شماره ۱

در واقع، می‌توان سه نقطه به طول‌های x_0, y_0, z_0 به ترتیب بر روی محورهای x, y, z در نظر گرفت و سپس صفحه‌گذرنده از x_0 و موازی با صفحه yz ، صفحه‌گذرنده از y_0 و موازی با صفحه xz و صفحه‌گذرنده از z_0 و موازی با صفحه xy را در نظر بگیریم. محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول x_0 ، عرض y_0 و ارتفاع z_0 است که نمایش‌دهنده سه‌تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) می‌باشد. مثلاً نقطه P در شکل زیر متناظر با سه‌تایی مرتب $(2, 4, 1)$ است.



$(2, 4, 1)$

همچنین نقطه O که مبدأ مختصات است متناظر سه تایی مرتب (\circ, \circ, \circ) می باشد.
 دو نقطه $P = (x_0, y_0, z_0)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$ را برهم منطبق گوئیم و می نویسیم $P = Q$
 هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی $x_0 = x_1, y_0 = y_1, z_0 = z_1$.

برای یافتن فاصله یک نقطه از \mathbb{R}^3 مانند $P = (x_0, y_0, z_0)$ از مبدأ مختصات کافی است از نقطه P عمودی بر صفحه xy رسم کرده و پای عمود را P' بنامیم. در این صورت با توجه به شکل مقابل از قضیه فیثاغورس طول پاره خط OP' به صورت زیر محاسبه می شود.

$$|OP'| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

اکنون در مثل قائم الزاویه OPP' از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر OP استفاده می کنیم. پس داریم:

$$|OP| = \sqrt{|OP'|^2 + z_0^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

رابطه فوق را می توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از \mathbb{R}^3 مانند $P = (x_0, y_0, z_0)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$ به صورت زیر تعمیم داد.

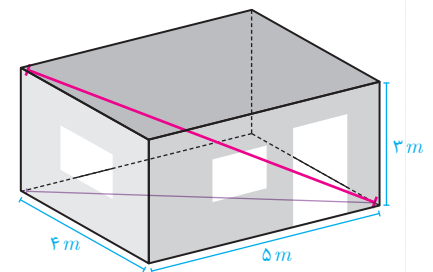
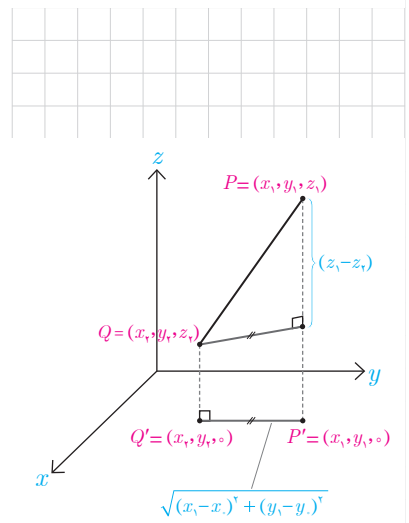
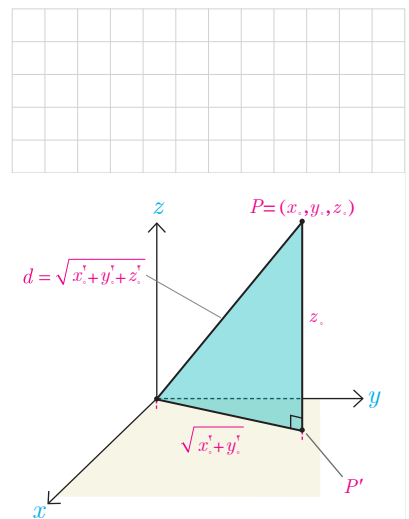
$$|PQ| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

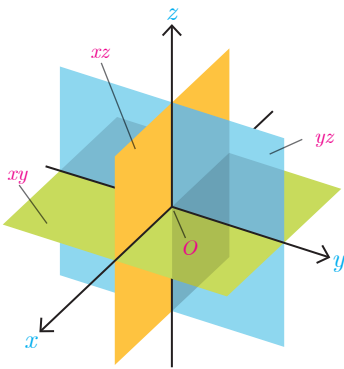
مثال: در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟

$$\text{قطر اتاق} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \text{قطر اتاق} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می پردازیم.

مثال: فرض کنید معادله $x = 0$ داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق می کنند و این یعنی تمام نقاطی که مؤلفه اول آنها یعنی x برابر صفر باشد. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله \mathbb{R}^2 است یا \mathbb{R}^3 .





قبلاً در کار در کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در \mathbb{R}^2 محور y هاست. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از \mathbb{R}^3 را مشخص نماییم که مؤلفه اول آنها برابر صفر است، یعنی تمام سه تایی‌هایی به صورت $(0, y, z)$ به طوری که $y, z \in \mathbb{R}$. همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار y و z هر چه باشد در صورتی که مؤلفه اول صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله $x=0$ صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر y و z آزاد هستیم. مثلاً نقاط $(0, -3, -1)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$ و $(0, -1, 5)$ همگی در معادله صدق می‌کنند. تمام این نقاط در معادله $x=0$ صدق می‌کنند و این همان صفحه yz است.

فعالیت

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله $x=0$ در \mathbb{R}^3 تمام نقاط صفحه yz است (به عبارتی $x=0$ معادله صفحه yz است) و دیدیم که نقاط مختلفی با y و z های دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه yz به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر $x=0$ شرط $z=0$ را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه yz سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها $z=0$ باشد.)

۱- مختصات چند نقطه را که در رابطه $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲- نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x=0$ دارد؟

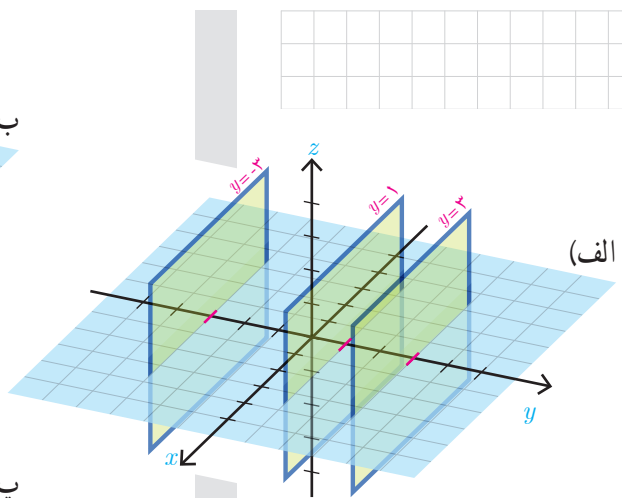
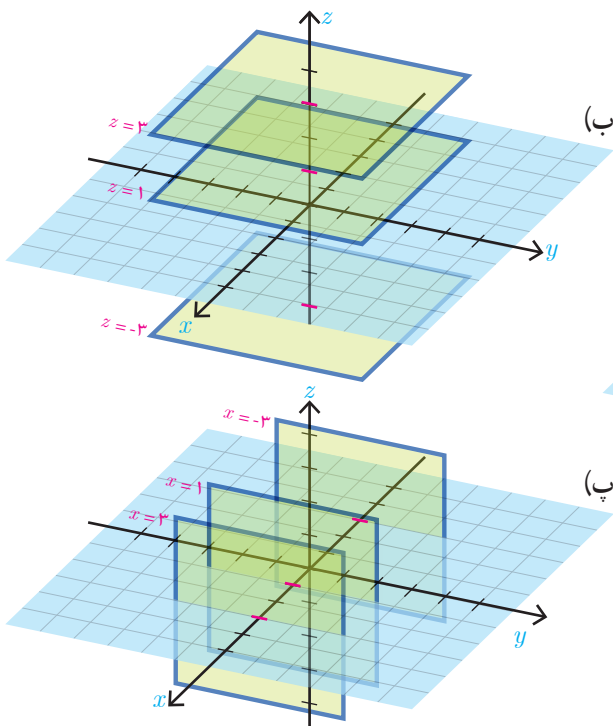
مثال: روی صفحه $z=1$ نقاط $A=(1, 2, 1)$ و $B=(2, 2, 1)$ و $C=(3, 2, 1)$ را در نظر می‌گیریم، مؤلفه دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحه مزبور ($z=1$) تمام نقاطی که مؤلفه دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن

$$\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

یک خط است به معادلات

کاردرکلاس

۱- در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.



۲- وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $z=2$ و $z=-2$ ، $y=4$ ، $y=1$ ، $x=3$ ، $x=1$ هستند.

الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

پ) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

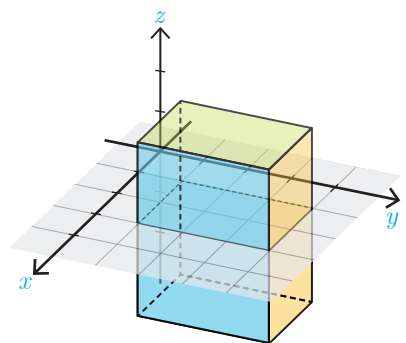
ث) روابط مشخص‌کننده یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کننده پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

چ) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

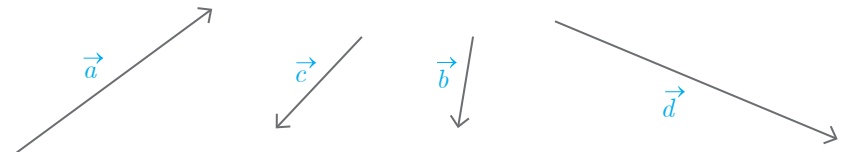
ح) روابطی را بنویسید که مشخص‌کننده حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعب داده شده باشند.



۱- طرح چنین سؤال‌هایی تنها برای سطوحی که هر مرز آن موازی با یکی از محورهای مختصات است و حجم‌هایی که هر وجه آنها موازی با یکی از صفحات دستگاه مختصات است، مجاز می‌باشد.

بردارها در \mathbb{R}^2

در سال‌های گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت‌دار مانند AB در شکل مقابل، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B می‌باشد. این بردار را با \vec{AB} و اندازه آن را با $|\vec{AB}|$ نشان می‌دهند. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند \vec{a} و اندازه طول آن را با $|\vec{a}|$ نمایش می‌دهند. در شکل زیر چند بردار مختلف رسم شده‌اند. در این کتاب از هر دو شیوه نگارش، بسته به زمینه مورد بحث استفاده می‌گردد.



دو بردار را مساوی یا همسنگ گوئیم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل بردارها با هم مساوی هستند. همواره می‌توان هر بردار را با برداری مساوی آن، که از مبدأ مختصات شروع می‌شود یکی دانست، چراکه جهت و اندازه آنها برابر است.

واضح است که می‌توان بی‌شمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه در نظر گرفت. به این بردارهای برابر، در اصطلاح، بردارهای هم‌ارز گفته می‌شود.

برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را به عنوان نماینده بردارهای همسنگ در نظر می‌گیرند. مثلاً در شکل مقابل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ \vec{a} می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیرند.

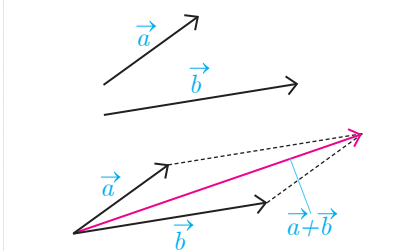
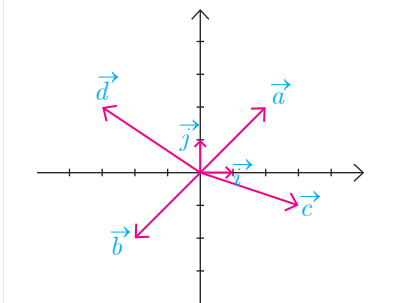
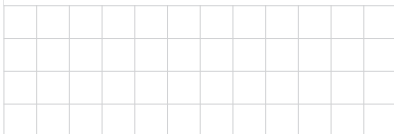
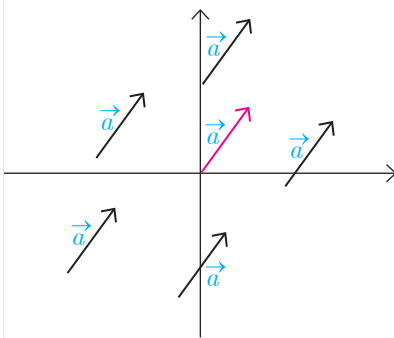
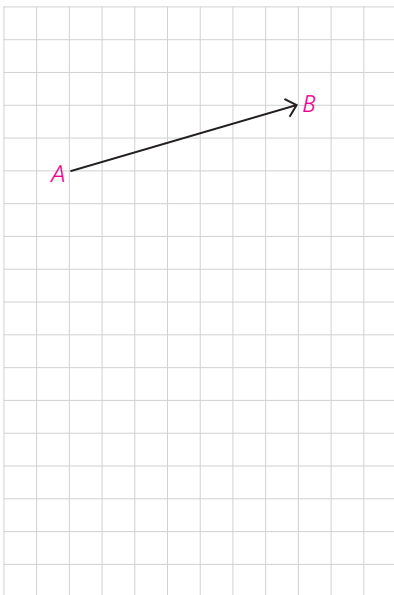
با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر گرفته‌ایم، مؤلفه‌های یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس. از این رو هر بردار مانند \vec{a} را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی $\vec{a} = (a_1, a_2)$ که مختصات انتهای بردار \vec{a} می‌باشد.

مثال: بردارهای $\vec{a} = (2, 2)$ ، $\vec{b} = (-2, -2)$ و $\vec{c} = (2, -1)$ و $\vec{d} = (-3, 2)$ و $\vec{i} = (1, 0)$ و $\vec{j} = (0, 1)$ در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم شده‌اند.

از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار \vec{a} ، \vec{b} از روش متوازی‌الاضلاع به صورت زیر به دست می‌آید و به آن برابری دو بردار \vec{a} ، \vec{b} می‌گویند.

و نیز اگر داشته باشیم $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$ می‌توان نوشت:

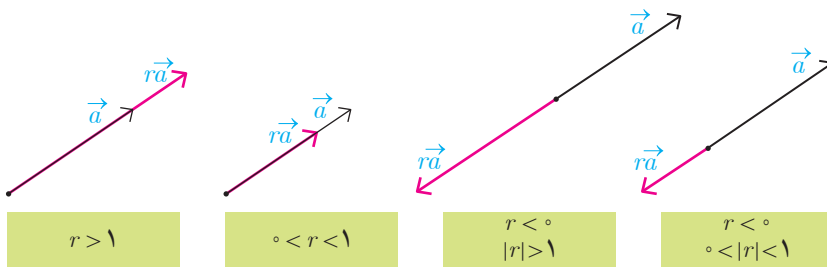
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$



همچنین اگر $r \in \mathbb{R}$ و \vec{a} یک بردار باشد، آنگاه بردار $r\vec{a}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

می‌توان نشان داد دو بردار \vec{a} و $r\vec{a}$ همواره با هم موازی‌اند و برعکس اگر دو بردار مانند \vec{a} و \vec{b} موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است. در شکل‌های زیر وضعیت دو بردار \vec{a} و $r\vec{a}$ در حالت‌های مختلف نشان داده شده‌اند.



به‌طور خاص وقتی $r = -1$ بردار $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$ حاصل می‌شود که آن را قرینه بردار \vec{a} می‌نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می‌توان برای تفاضل دو بردار نوشت:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

به نظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

معمولاً مبدأ مختصات را به‌عنوان بردار صفر در نظر می‌گیرند و با $\vec{O} = (0, 0)$ نمایش می‌دهند.

با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2)$ را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار \vec{a} به صورت زیر به دست می‌آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

بردارها، کاربردهای فراوانی در محاسبات مهندسی و نیز مدل‌سازی‌ها دارند. به‌طور نمونه بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود (مسیر باند فرود) می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار



گیرد (به شکل زیر رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند. بردارها برای مدل‌سازی وضعیت فرود هواپیما در چنین شرایطی بسیار مناسب می‌باشند. اکنون به مثال بعد در این رابطه دقت کنید.



هواپیما در حال نزدیک شدن به باند فرود



اولین برخورد هواپیما با باند فرود

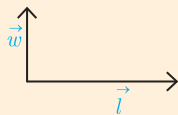


هواپیما بر روی باند فرود و در حال کاهش سرعت

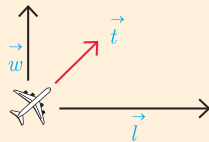


توقف کامل

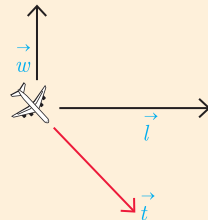
مثال: فرض کنید مسیر فرود (خط فرود) در جهت بردار \vec{t} و حداکثر نیروی قابل کنترل در لحظه فرود با اندازه این بردار برابر باشد. همچنین باد نیرویی در جهت بردار \vec{w} به هواپیما وارد می‌کند. در هریک از دو وضعیت زیر خلبان، هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده می‌تواند قرار دهد، به طوری که یک فرود ایمن داشته باشد یعنی برآیند نیروی محرکه \vec{t} و نیز \vec{w} در جهت \vec{t} باشد.



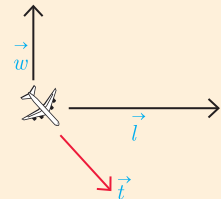
الف



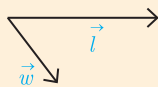
الف-۱



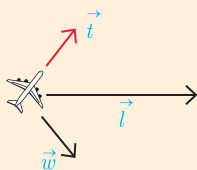
الف-۲



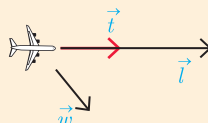
الف-۳



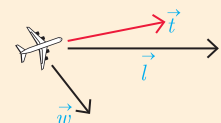
ب



ب-۱



ب-۲



ب-۳

پاسخ: در مورد وضعیت الف برایندهای \vec{w} (نیروی باد) و \vec{t} (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

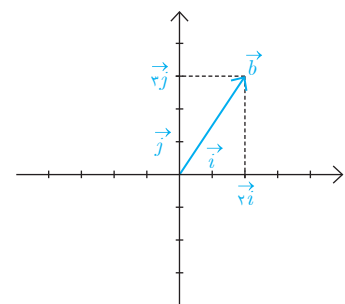
الف-۱	الف-۲	الف-۳
<p>بردار برایندها در جهت \vec{t} نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از بالای باند)</p>	<p>بردار برایندها در جهت \vec{t} نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)</p>	<p>بردار برایندها در جهت \vec{t} است و اندازه آن کمتر از \vec{t} است. بنابراین \vec{t} فرود ایمن است.</p>

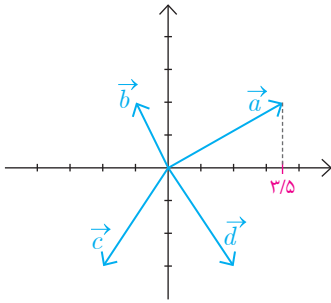
در مورد وضعیت ب برایندهای \vec{w} (نیروی باد) و \vec{t} (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

ب-۱	ب-۲	ب-۳
<p>بردار برایندها در جهت \vec{t} است و اندازه آن کمتر از \vec{t} است. بنابراین فرود ایمن است.</p>	<p>بردار برایندها در جهت \vec{t} نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)</p>	<p>بردار برایندها در جهت \vec{t} نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)</p>

معمولاً بردار به طول واحد در جهت محور x ها را با \vec{i} و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور y ها را با \vec{j} نمایش می دهند. در شکل مقابل بردار $\vec{i} = (1, 0)$ و $\vec{j} = (0, 1)$ و نیز بردار $\vec{b} = (2, 3)$ به صورت حاصل جمع مضاربی از \vec{i} ، \vec{j} نمایش داده شده اند. به طور کلی می توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{a} = (a_1, a_2)$ را به صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$





۱- در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده است.

الف) مختصات بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه بردارهای \vec{c} و \vec{b} را رسم کرده و مختصات آنها را به دست آورید.

ج) مؤلفه‌های بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{d} - \vec{c}$ را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به دست آورید.

د) هر یک از بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{d} - \vec{c}$ را بر حسب بردارهای واحد \vec{i}, \vec{j} به دست آورید.

■ بردارها در \mathbb{R}^3

مشابه بردارهای \mathbb{R}^2 می‌توان به هر نقطه از \mathbb{R}^3 ، برداری که از مبدأ شروع می‌شود نظیر کرد. مثلاً فرض کنید $A = (a_1, a_2, a_3)$ نقطه‌ای غیر از مبدأ \mathbb{R}^3 باشد. در این صورت پاره‌خط جهت داری که از مبدأ مختصات یعنی $O = (0, 0, 0)$ شروع شده و در نقطه A پایان می‌یابد یک بردار در \mathbb{R}^3 را مشخص می‌کند و آن را با $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ نشان می‌دهیم. در بردار \vec{a} مقادیر a_1, a_2, a_3 را مؤلفه‌های بردار \vec{a} می‌گویند. همچنین قرارداد می‌کنیم که مبدأ مختصات یعنی $O = (0, 0, 0)$ نمایشگر بردار $\vec{O} = (0, 0, 0)$ است که بردار صفر نامیده می‌شود. به عنوان مثال در شکل مقابل، چند بردار در \mathbb{R}^3 نمایش داده شده است.

■ طول بردار در \mathbb{R}^3

با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از \mathbb{R}^3 ، طول هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ در \mathbb{R}^3 از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

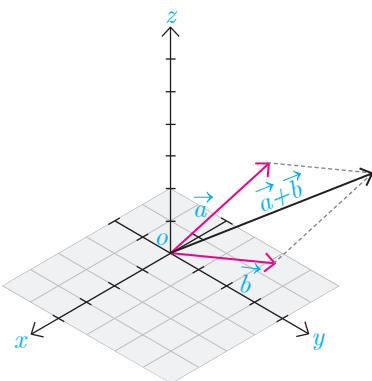
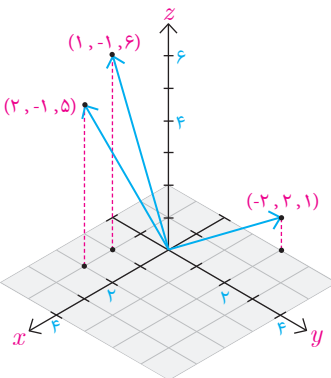
■ حاصل جمع دو بردار در \mathbb{R}^3

حاصل جمع دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود که به آن بردار برابند نیز می‌گویند.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

این شکل بردارهای \vec{a}, \vec{b} و $\vec{a} + \vec{b}$ را در دستگاه \mathbb{R}^3 نشان می‌دهد.

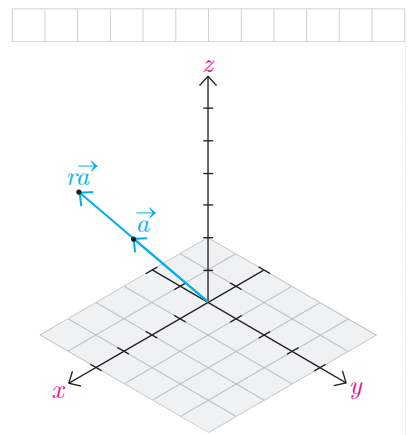
همان‌طور که از شکل روبه‌رو پیداست برای هر دو بردار غیر صفر \vec{a}, \vec{b} می‌توان روش متوازی‌الاضلاع را در صفحه‌ای که از آن دو بردار می‌گذرد به کار برد و بردار برابند $\vec{a} + \vec{b}$ را یافت.



برای هر عدد حقیقی r ، حاصل ضرب r در بردار \vec{a} را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3)$$

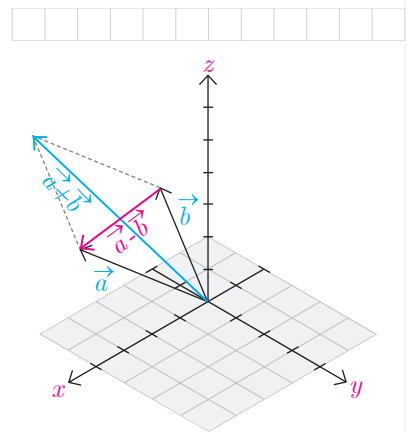
این شکل دو بردار $r\vec{a}$ ، \vec{a} که در آن $r > 1$ را نشان می دهد.
آیا راستای $r\vec{a}$ ، \vec{a} با هم متفاوت اند؟



به طور خاص بردار $-\vec{a}$ را که با $-\vec{a}$ نشان می دهند قرینه \vec{a} می گویند یعنی $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$. این بردار هم اندازه با \vec{a} (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می باشد. اکنون تفاضل بردار \vec{b} از \vec{a} یعنی $\vec{a} - \vec{b}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

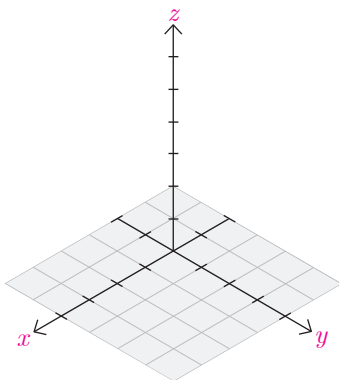
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

در شکل بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و قرینه آن و نیز $\vec{a} - \vec{b}$ نمایش داده شده اند.



کاردکلاس

نقاط $A = (2, 3, 1)$ ، $B = (-1, 2, 2)$ و $C = (3, 4, 0)$ و $D = (1, 0, -1)$ را در یک دستگاه \mathbb{R}^3 در نظر بگیرید، اگر بردارهایی در \mathbb{R}^3 با نقاط انتهایی به ترتیب A, B, C, D باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید.



$$\vec{a} + 2\vec{b} =$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} =$$

$$-2(\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$-2\vec{b} - 2\vec{c} =$$

■ خواص جمع بردارها

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم. به طور کلی اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{O} = (0, 0, 0)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

$$1- \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی جمع})$$

$$2- \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری در جمع})$$

$$3- \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{O} \quad (\text{عضو قرینه})$$

$$4- \vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{عضو خنثی})$$

$$5- r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$6- (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

$$7- (rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$$

$$8- \text{اگر } \vec{b} = r\vec{a} \text{ آنگاه } |\vec{b}| = |r||\vec{a}| \quad (|r| \text{ قدر مطلق } r \text{ است})$$

■ بردارهای یکه

با بردارهای یکه \vec{i}, \vec{j} در صفحه \mathbb{R}^2 به ترتیب در جهت محور x ها و y ها آشنا شدید. به طور مشابه در \mathbb{R}^3 بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات \mathbb{R}^3 در نظر می‌گیرند.

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

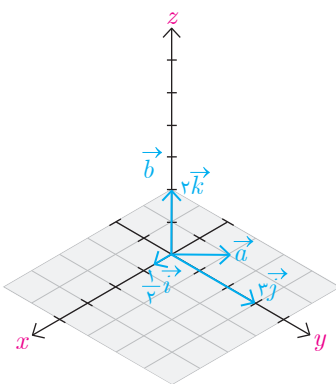
به این ترتیب \vec{i} بردار یکه در جهت محور طول‌ها، \vec{j} بردار یکه در جهت محور عرض‌ها و \vec{k} بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها می‌باشند.

همچنین با استفاده از روابط بین بردارها به سادگی می‌توان نشان داد که هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت ترکیبی از بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ قابل بیان است. در واقع داریم:

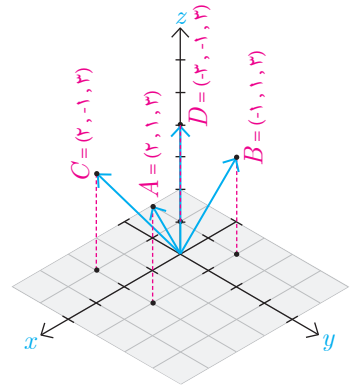
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

مثال: بردار $\vec{a} = (\frac{1}{4}, 3, 2)$ را برحسب بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ نشان دهید.

$$\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$



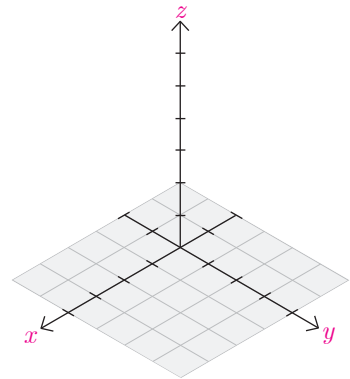
- ۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.
 الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.
 ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.



- ۲- نقاط با مختصات $S = (-2, -2, -2)$ و $R = (3, 0, -1)$ ، $Q = (0, -1, -2)$ ، $P = (1, 0, 1)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.

- ۳- در سؤال قبل طول پاره خط‌های PQ ، RQ و PS را بیابید.

- ۴- فرض کنید $P = (x_0, y_0, z_0)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$. مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را بیابید.



- ۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $r\vec{a} - \vec{b} = ?$ ، $r = 3$ ، $\vec{b} = (\sqrt{2}, 1, 1)$ ، $\vec{a} = (-\frac{1}{3}, 0, 2)$

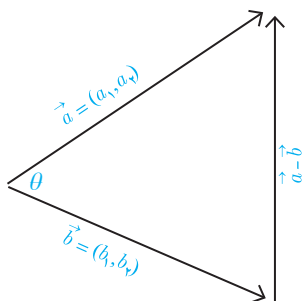
ب) $r\vec{a} + \vec{b} = ?$ ، $r = -1$ ، $\vec{b} = (3, 1, -1)$ ، $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

ج) $\vec{a} + \vec{b} = ?$ ، $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{k}$

د) $r\vec{a} + \vec{b} = ?$ ، $r = \frac{1}{5}$ ، $\vec{b} = -\vec{k} + \vec{i}$ ، $\vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j}$

- ۶- طول بردار \vec{a} را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها



فرض کنید دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$ همانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار (θ) را پیدا کنیم. برای این منظور بردار تفاضل $\vec{a} - \vec{b}$ را نیز در این شکل رسم کرده‌ایم تا مثلی به طول اضلاع زیر به دست آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها که سال گذشته آموخته‌اید می‌توان نوشت.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورت کسر فوق را می‌توان با توجه به اندازه‌های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده‌اند به صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

پس عبارت (۱) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است.)

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار $0 \leq \theta \leq \pi$ به دست می آید.
 کمیتی که در صورت این کسر سمت راست را معمولاً با $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نشان می دهند
 و به آن حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب نقطه ای دو بردار \vec{a} ، \vec{b} می گویند. بنابراین
 می توان نوشت.

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

به طور مشابه حاصل ضرب داخلی دو بردار در \mathbb{R}^3 نیز قابل تعریف است.

تعریف: اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در \mathbb{R}^3 باشند؛
 در این صورت ضرب داخلی \vec{a} در \vec{b} را که با نماد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نمایش می دهیم
 به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می توان نشان داد که اگر $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر
 \vec{a} ، \vec{b} در \mathbb{R}^3 باشند آنگاه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دو بردار \vec{a} ، \vec{b} صفر باشند آنگاه
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ هر چند که در این حالت زاویه θ بین دو بردار تعریف نمی شود.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را پیدا می کنیم.

حل: ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \times 1) + (-1 \times -1) + (2 \times 0) = 3$$

از طرفی اگر $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 3 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

■ خواص ضرب داخلی

۱- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ خاصیت جابه‌جایی

اثبات: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

۲- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

اثبات: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

۳- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ خاصیت شرکت‌پذیری

اثبات: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

۴- برای دو بردار غیرصفر \vec{a} و \vec{b} : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ a و b برهم عمود هستند

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} |\vec{a}| \neq 0 \\ |\vec{b}| \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

۵- $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0, \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

۶- $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ (نامساوی کشی شوارتز) منظور از $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ قدر مطلق مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ است.

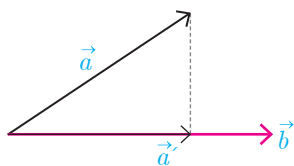
$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

که در آخرین نامساوی از $|\cos \theta| \leq 1$ استفاده شده است.

■ تصویر قائم بردار \vec{a} بر بردار \vec{b}

دو بردار غیرصفر \vec{a}, \vec{b} را که زاویه بین آنها θ است با فرض $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تصویر قائم بردار \vec{a} را بر امتداد بردار \vec{b} که آن را با \vec{a}' نمایش داده‌ایم به دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک r حقیقی $\vec{a}' = r \vec{b}$. با توجه به اینکه بردار تفاضل \vec{a} از \vec{a}' بر بردار \vec{b} عمود است. خواهیم داشت:

$$(\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{a} - r \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - r \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$



بنابراین بردار تصویر قائم \vec{a} بر امتداد بردار \vec{b} به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{a}' = r \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

مثال: تصویر قائم بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (1, -1, 0)$ بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + (2)(0) = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{3}{2} b = \frac{3}{2} (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

کار در کلاس

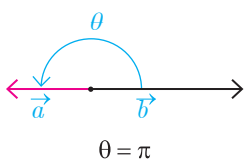
۱- تصویر بردار $i = (1, 0, 0)$ بر امتداد بردار $j = (0, 1, 0)$ را بیابید.

۲- نشان دهید که اگر دو بردار \vec{a} و \vec{b} بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

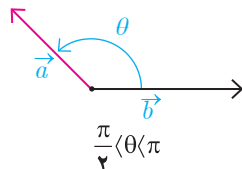
۳- نشان دهید که اگر دو بردار \vec{a} و \vec{b} در یک راستا باشند آنگاه تصویر \vec{a} بر \vec{b} برابر خود \vec{a} می شود.

۴- هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید.

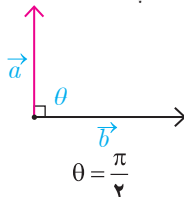
ج) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|a||b|$



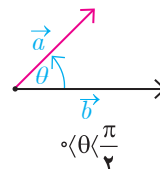
ت) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|$



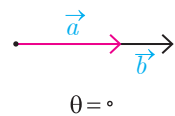
پ) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$



ب) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



الف) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$



ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می‌توان ضرب دو بردار را به گونه‌ای تعریف کرد که حاصل ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعریف: فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. ضرب داخلی \vec{a} و \vec{b} را که با نماد $\vec{a} \times \vec{b}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

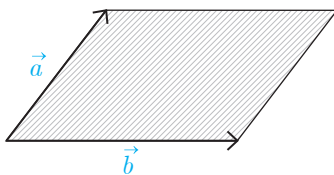
اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آنها باشد اندازه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ می‌شود:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)|^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + \\ &\quad a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (a \cdot b)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta)^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

بنابراین

از هندسه سال قبل می‌دانیم که سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع‌ی که اندازه اضلاع آن برابر $|\vec{a}|$ ، $|\vec{b}|$ است.



مثال: بردارهای \vec{i} و \vec{j} در \mathbb{R}^3 در نظر بگیرید. حاصل $\vec{i} \times \vec{j}$ و $\vec{j} \times \vec{i}$ را به دست آورید.

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$

$$= ((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)) = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$$

$$= ((1)(0) - (0)(0), (0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(1)) = (0, 0, -1) = -\vec{k}$$

همان‌طور که مشاهده شد حاصل ضرب خارجی دو بردار \vec{i} و \vec{j} برابر با بردار \vec{k} شد که بر هر دوی \vec{i} و \vec{j} عمود می‌باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می‌باشد.

خاصیت ۱: فرض کنید $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ بنابراین با توجه به آنچه تاکنون به دست آمده است می‌توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می‌توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است. اثبات این خاصیت در ادامه می‌آید.

اثبات:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

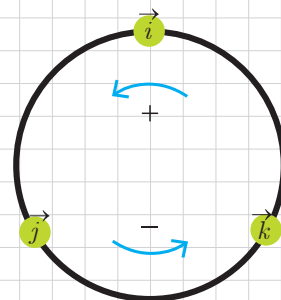
$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

می‌توان نشان داد که برای سه برداری که \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} روابط زیر برقرار است:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می‌دهند.



$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{خاصیت ۲:}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۳:}$$

$$r \vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r \vec{b} \quad \text{خاصیت ۴: اگر } r \text{ عددی حقیقی باشد، آنگاه:}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ داریم:} \quad \text{خاصیت ۵: برای سه بردار}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۶: دو بردار غیر صفر } \vec{a}, \vec{b} \text{ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر}$$

اثبات:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

حجم متوازی السطوح

اگر \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می توان به کمک آنها متوازی السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.

همان طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار \vec{a} بر روی بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|^2} (\vec{b} \times \vec{c})$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای \vec{b} و \vec{c} تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec{b} \times \vec{c}|$. با استفاده از دترمینان نیز می توان مساحت متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{حجم متوازی السطوح} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = |\vec{b} \times \vec{c}| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|^2} (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$. حجم متوازی السطوح پدید آمده توسط سه بردار $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ، $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ استفاده از دترمینان زیر نیز به دست می آید.

$$K = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم} = V = |K|$$

$$\text{یا } K = a \cdot (b \times c)$$

اگر $K = 0$ در این صورت چه نتیجه ای می گیرید؟

مثال: حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (0, 1, 1)$ و $\vec{c} = (1, 0, 1)$ تولید می شود.

حل: با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به دست می آید.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1, 1, -1)$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به دست می آید.

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = |1 + 1 + 0| = 2$$

پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

مثال: آیا بردارهای $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ، $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ، $\vec{c} = (1, 9, -1)$ در یک صفحه‌اند؟

حل: برای این منظور کافی است $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (-16, 14, 10) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -32 + 42 - 10 = 0 \Rightarrow \text{سه بردار در یک صفحه هستند.}$$



تمرین

۱- برای هر یک از بردارهای \vec{a} و \vec{b} که در زیر آمده است تصویر قائم \vec{a} را بر امتداد \vec{b} به دست آورید.

الف) $\vec{a} = (2, -1, 2)$ ، $\vec{b} = i$ (ب) $\vec{a} = (2, 3, 1)$ ، $\vec{b} = (3, 2, 1)$

ج) $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 4)$

۲- فرض کنید \vec{a} ، \vec{c} و بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.

۳- سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

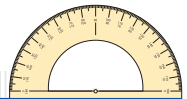
۴- اگر $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{a} = (1, -3, 4)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

۵- برداری عمود بر دو $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ ، $\vec{a} = (1, -3, 2)$ بردار پیدا کنید.

۶- سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷- بردارهای \vec{a} و \vec{b} مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

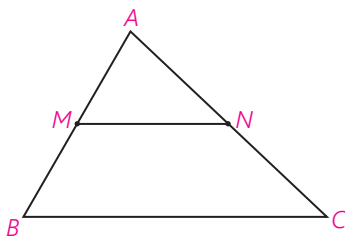
۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3, 5, 7)$ ، $b = (5, 5, 0)$ ، $A = (-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.



در این فصل با بردارها و خواص جالبی از آنها آشنا شدید. جالب است بدانید بردارها در حل بسیاری از مسائل هندسی که در سال‌های گذشته با آنها آشنا شده‌اید می‌توانند کاربرد داشته باشند و اثبات برخی قضایا را راحت‌تر می‌کنند. در ادامه چند مثال از این‌گونه مسائل آورده شده است که مطالعه آنها به علاقه‌مندان پیشنهاد می‌گردد.

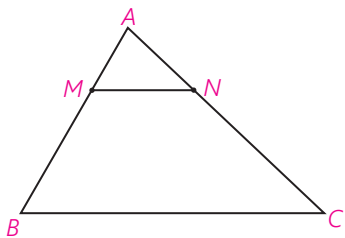
مثال ۱: ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

اثبات:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AN} &= 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ \overrightarrow{BC} &= 2\overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

پس طول BC دو برابر طول MN است و چون BC مضربی از MN است لذا BC موازی MN است.



مثال ۲: در مثلث ABC ، $MN \parallel BC$ ثابت کنید:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

(قضیه تالس)

اثبات: فرض کنیم $BA = K \cdot MA$ و $AC = K' \cdot AN$ و $BC = K'' \cdot MN$

بنابراین:

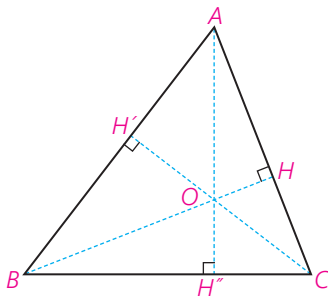
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= K \cdot \overrightarrow{MA}, \quad \overrightarrow{AC} = K' \cdot \overrightarrow{AN}, \quad \overrightarrow{BC} = K'' \cdot \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{MN}, \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \\ K \cdot \overrightarrow{MA} + K' \cdot \overrightarrow{AN} &= K'' \cdot \overrightarrow{MN} = K''(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) = \\ K'' \cdot \overrightarrow{MA} + K'' \cdot \overrightarrow{AN} &\Rightarrow (K - K'') \overrightarrow{MA} + (K' - K'') \cdot \overrightarrow{AN} = \vec{0} \end{aligned}$$

ولی \overrightarrow{MA} و \overrightarrow{AN} بردارهایی در راستا و جهت‌های مختلف‌اند، پس مجموع آنها نمی‌تواند صفر شود مگر آنکه:

$$K - K'' = K' - K'' = 0$$

و در نتیجه: $K = K' = K''$ و از آنجا حکم ثابت می‌شود.

مثال ۳: ثابت کنید در هر مثلث، سه ارتفاع در یک نقطه هم‌رس‌اند.



اثبات: فرض کنیم ارتفاع‌های BH و CH' همدیگر را در نقطه O قطع کنند.

در این صورت داریم:

$$BH \perp AC \Rightarrow \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0, \vec{BO} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$CH' \perp AB \Rightarrow \vec{CH'} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{CO} \cdot \vec{AB} = 0$$

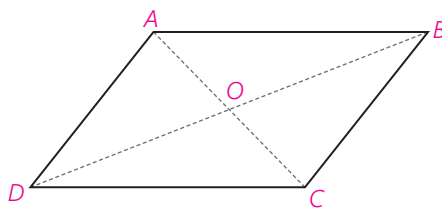
$$\Rightarrow \vec{AO} \cdot \vec{BC} = \vec{AO} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AO} \cdot \vec{AC} - \vec{AO} \cdot \vec{AB}$$

$$= (\vec{BO} - \vec{BA}) \cdot \vec{AC} - (\vec{CO} - \vec{CA}) \cdot \vec{AB} = \underbrace{\vec{BO} \cdot \vec{AC}}_0 - \vec{BA} \cdot \vec{AC}$$

$$- \underbrace{\vec{CO} \cdot \vec{AB}}_0 + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -\vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = 0$$

بنابراین $AO \perp BC$ و لذا امتداد AO هم بر BC عمود است و ارتفاع رأس A هم از O می‌گذرد.

مثال ۴: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن با هم موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



اثبات: در شکل مقابل، با فرض اینکه $AB \parallel CD$ و $AB = CD$

نتیجه می‌شود:

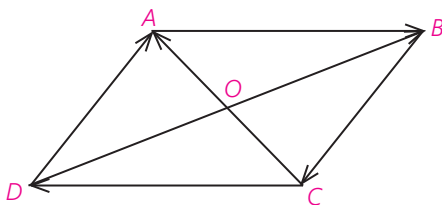
$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad \text{و در نتیجه:}$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD} \Rightarrow \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OA} - \vec{OD} \Rightarrow \vec{CB} = \vec{DA}$$

و بنابراین: $CB \parallel DA$ و $CB = DA$ و $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۵: ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

اثبات:



$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \\ \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OD} \end{array} \right\} +$$

$$(\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{AB} + \vec{CD}) = \vec{OB} + \vec{OD} \Rightarrow$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$$

اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.

- ۱- پورنگی، محمدرضا، تاجبخش، یحیی (۱۳۸۱)، کتاب درسی هندسه تحلیلی و جبر خطی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۲- غیور، حسین، مجذوب زنجانی، حسین، معیری، محمدطاهر (۱۳۷۳). کتاب درسی هندسه تحلیلی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۳- فیروزنیا، احمد، باوری، احمدرضا (۱۳۷۰) هندسه تحلیلی، تهران، نشر فردوس.
- ۴- ایرانمنش، علی، جمالی، محسن و ... (۱۳۸۸) کتاب درسی ریاضیات ۲، تهران سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۵- امیری حمیدرضا، ماتریس و دستگاه‌های معادلات خطی (۱۳۷۸) انتشارات مدرسه
- ۶- شهریاری، پرویز، محاسبه برداری (۱۳۶۹) انتشارات تهران.
- 7- T. Grenfell, Analytical Geometry for beginners Nabu Press zolo.
- 8- Mittal & Shanti Nrayan, Analytical Solid Geometry international Book Distributing Company 2005.
- 9- Larson, R. & Falvo, D.C. (2009). Elementary Linear Algebra, Sixth Edition. Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, Boston, MA.
- 10- Larson, R. (2017) Elementary Linear Algebra, Eighth Edition. Cengage Learning, Boston, MA



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب هندسه ۳ با کد ۱۱۲۲۱۳

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	احد تقی عجمی	آذربایجان شرقی	۲۷	جابر عامری	خوزستان
۲	پیمان خاوندی	آذربایجان شرقی	۲۸	میترا سلماسی	خراسان شمالی
۳	فرشته قرامحمدی	شهر تهران	۲۹	سیدعلی حسینی	خراسان جنوبی
۴	محمد رضانیپور	فارس	۳۰	محمد مهدی قلندری	هرمزگان
۵	شادی حبیب پور	هرمزگان	۳۱	میثم محمدیان	زنجان
۶	فرزانه فروزانفر	کردستان	۳۲	سیما حقیقی آذر	گلستان
۷	علی نصیری	قزوین	۳۳	کیان سهرابی	کرمانشاه
۸	زهره اصلانی	شهرستانهای تهران	۳۴	نوراله جمالی	بوشهر
۹	حکیمه محمدی	البرز	۳۵	لیلی حاتم زاده	اصفهان
۱۰	فاطمه نصیری	ایلام	۳۶	لیلا محرابی نسب	خراسان شمالی
۱۱	سید محسن حسینی	کردستان	۳۷	مانده ملاحسنی	البرز
۱۲	کامران کاظمی	خوزستان	۳۸	ژاله اخوان	شهرستانهای تهران
۱۳	التاز رابری	آذربایجان غربی	۳۹	علی رضا بیات	همدان
۱۴	رضا کاظمی	قزوین	۴۰	فاطمه دولت خواه	گیلان
۱۵	قاسم شعبانی چاوسر	مازندران	۴۱	مذهب روستائی	بوشهر
۱۶	کیانوش کمائی	مرکزی	۴۲	وحید سجادیپور	کهگیلویه و بویراحمد
۱۷	فرزانه کد خدایی	لرستان	۴۳	سالم برزگر	اردبیل
۱۸	محمدرضا نخعی	خراسان رضوی	۴۴	سعید تاجیان	فارس
۱۹	مجتبی مرسلی	شهر تهران	۴۵	فرشته واتق	کرمان
۲۰	مهدی روناسی	سیستان و بلوچستان	۴۶	حسن فتاحی	کرمانشاه
۲۱	مریم امیرمحمدی	گیلان	۴۷	رضا علیوند	اردبیل
۲۲	قباد خالدی کوره	آذربایجان غربی	۴۸	زهره خانمی	زنجان
۲۳	سلیمان موحدی راد	مازندران	۴۹	جمال نوین	یزد
۲۴	مریم امامی	همدان	۵۰	محمد نیازی	چهارمحال و بختیاری
۲۵	علی مراد سبزه کار	خراسان جنوبی	۵۱	زهره صیدی	ایلام
۲۶	سکینه حبیبی	لرستان	۵۲	علیرضا عمرانی	مرکزی