

## آشنایی با مقاطع مخروطی



▲ برج طغرل در شرق آرامگاه ابن بابویه شهرری و از آثار به‌جامانده از دوره سلجوقیان است. ارتفاع برج حدود ۲۰ متر است و به عقیده برخی کارشناسان این برج مانند یک ساعت آفتابی عمل می‌کند و می‌توان از روی تابش آفتاب بر روی کنگره‌های آن، زمان را تشخیص داد.

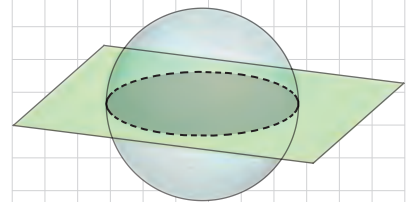
شکل این برج به‌صورت یک مخروط ناقص توخالی است و در نتیجه در ساعت‌های مختلف روز خورشید به درون آن تابیده و سطح داخلی آن را تا حدودی روشن می‌کند. مرز بین سایه و روشنایی، بخشی از محیط یک بیضی است! (چرا؟)

# آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

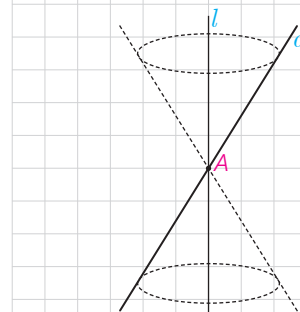
## مقاطع مخروطی



در پایه دهم با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شدید. فرض کنید یک کره را (مانند شکل) توسط یک صفحه قطع کنیم (برش دهیم). منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعه نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می تواند باشد؟

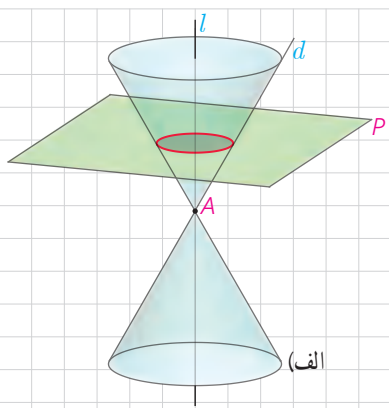


رویۀ مخروطی: فرض کنید دو خط  $d$  و  $l$  در نقطه  $A$  (مانند شکل) متقاطع (غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط  $d$  حول خط  $l$  را یک رویۀ مخروطی (سطح مخروطی) می نامیم. در این حالت خط  $l$  را محور، نقطه  $A$  را رأس و خط  $d$  را مولد این سطح مخروطی می نامیم.

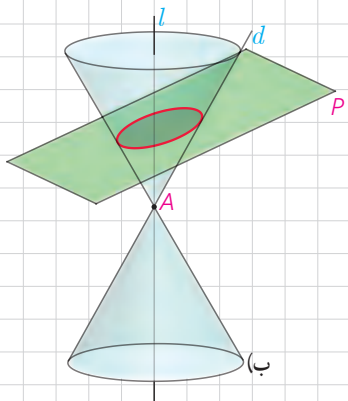


حال می خواهیم به طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا شویم. از تصاویر ارائه شده برای درک بهتر شکل حاصل کمک بگیرید.

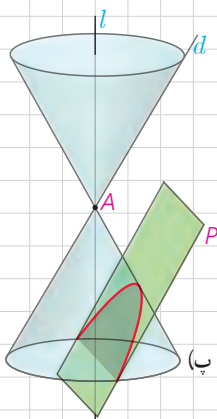
الف) در حالی که صفحه  $P$  بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.  
 - در چه حالتی فصل مشترک صفحه  $P$  و سطح مخروطی تنها نقطه  $A$  خواهد بود؟



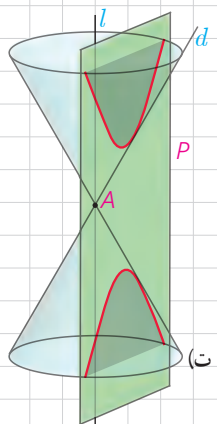
ب) در حالی که صفحه  $P$  بر محور  $l$  عمود نباشد و با مولد  $d$  نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.



پ) اگر صفحه  $P$  با مولد  $d$  موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه  $P$  از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است.)



ت) اگر صفحه  $P$  به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور  $l$  نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص هذلولی نخواهیم پرداخت.



با تعریف دایره آشنایی قبلی دارید. توجه داشته باشید که بیضی، سهمی و هذلولی نیز هر کدام تعاریف دقیق و مشخص دارند، اما اینکه چرا فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی مطابق با آنچه گفته شد دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی است، قابل اثبات است ولی ما در این کتاب به این اثبات‌ها نمی‌پردازیم. حال که با دایره، بیضی، سهمی و هذلولی (مقاطع مخروطی) به صورت شهودی آشنا شدیم، برای تعریف دقیق این اشکال، ابتدا مفهوم مکان هندسی را معرفی می‌کنیم.

## مکان هندسی

طریقه رسم و ویژگی های عمود منصف یک پاره خط را از کتاب هندسه ۱ به خاطر دارید. دو ویژگی زیر را یادآوری می کنیم:

- هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
- هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمود منصف آن است.

اگر خط  $d$  عمود منصف پاره خط  $AB$  باشد، در این صورت

$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

به طور خلاصه، یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می گوئیم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله اند.

به طور کلی مفهوم مکان هندسی به صورت زیر تعریف می شود:

**تعریف:** مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

### ۱ فعالیت

در کتاب هندسه ۱ با ویژگی ها و طریقه رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید:

- ۱- هر نقطه روی نیمساز زاویه .....
- ۲- هر نقطه که ..... روی نیمساز زاویه است.

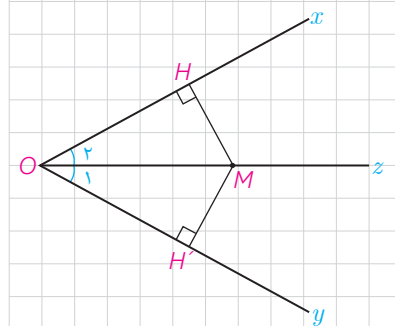
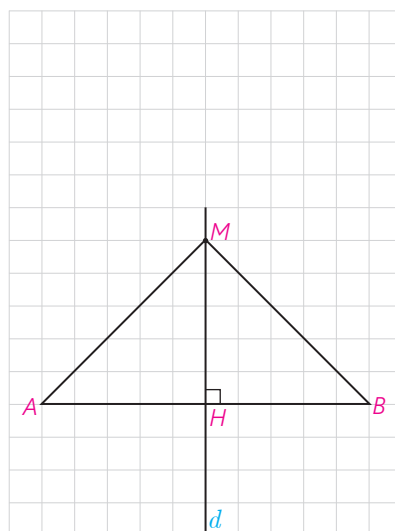
اکنون گزاره زیر را کامل کنید:

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر .....

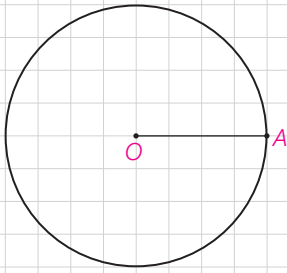
$$(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) \quad M \in Oz \Leftrightarrow \dots$$

بنابراین می توان گفت:

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....



## ۲ فعالیت



دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را در نظر بگیرید.  
 الف) هر نقطه دلخواه  $A$  روی دایره، از  $O$  چه فاصله‌ای دارد؟  
 ب) اگر  $B$ ، یک نقطه در صفحه باشد و از  $O$  به فاصله  $r$  باشد ( $OB=r$ ) با برهان خلف نشان دهید،  $B$  روی دایره است و از الف) و ب) نتیجه بگیرید:  
 $A \in C \Leftrightarrow OA=r$

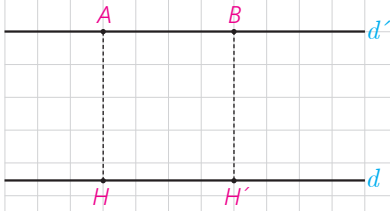
### نتیجه

نقطه  $A$  روی دایره  $C(O,r)$  است، اگر و فقط اگر .....

### نتیجه

دایره  $C(O,r)$  مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....

## ۳ فعالیت



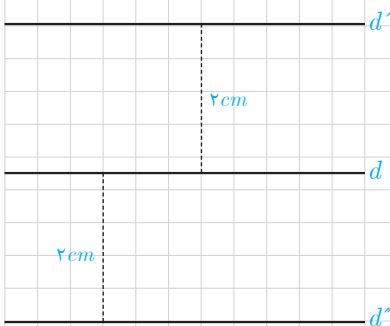
دو خط موازی  $d$ ،  $d'$  را که فاصله آنها از هم ۲ سانتی متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه  $A$  و  $B$  روی  $d'$ ، از خط  $d$  فاصله یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟ آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر باشند و روی  $d'$  نباشند؟ همه نقاطی که از  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر واقع‌اند، روی چه شکلی قرار دارند؟

آیا گزاره زیر درست است؟

یک نقطه در صفحه، از خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$  که موازی  $d$  هستند، واقع باشد.

آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر هستند، دو خط راست موازی  $d$  (در دو طرف آن) و به فاصله ۲ سانتی متر از آن می‌باشد.



### ■ مکان‌های هندسی مهم در صفحه :

– مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$  در صفحه به یک فاصله‌اند، عمود منصف  $AB$  است.

– مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

– مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت  $O$  به فاصله ثابت  $k$  قرار دارند، دایره‌ای به مرکز  $O$  و به شعاع  $k$  است.

– مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $d$  به فاصله ثابت  $k$  قرار دارند، دو خط موازی  $d$ ، به فاصله  $k$  از آن و در دو طرف آن است.

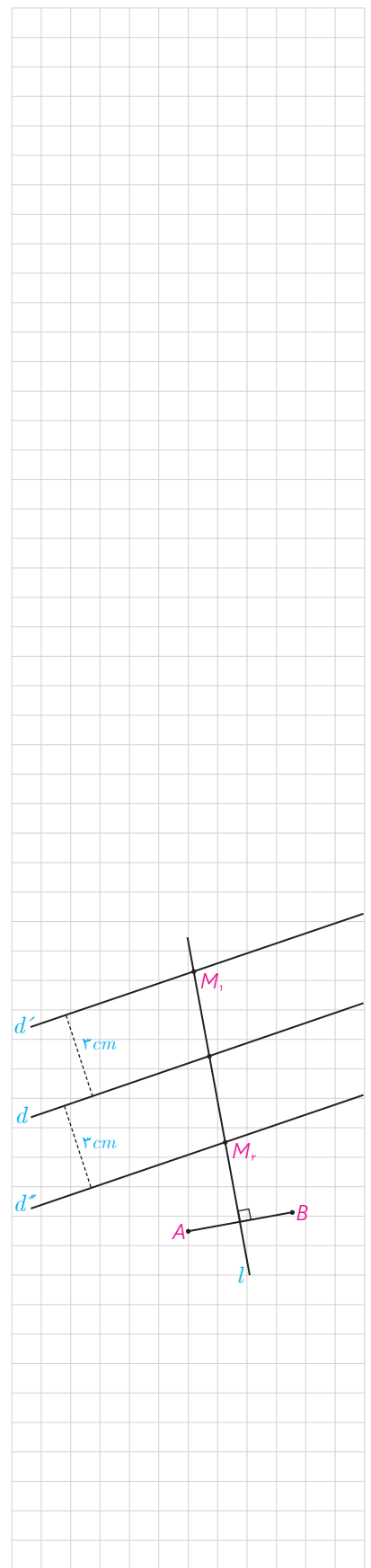
### ■ کاربرد مکان هندسی

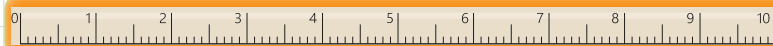
یکی از مهم‌ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم‌های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر  $S_1$  مکان هندسی نقاطی با ویژگی  $P_1$  و  $S_2$  مکان هندسی نقاطی با ویژگی  $P_2$  باشد،  $S_1 \cap S_2$  مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی  $P_1$  و  $P_2$  را دارند. بنابراین برای یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای  $S_1$  و  $S_2$  را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به دست آورد.

**مثال :** دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط  $d$  که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله بوده و از  $d$  به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

**حل :** مکان هندسی نقاطی که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله‌اند، عمود منصف  $AB$  و مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی  $d$  به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد خط  $l$  (عمود منصف  $AB$ ) و دو خط موازی  $d'$  و  $d''$  جواب مسئله است (نقاط  $M_1$  و  $M_2$ ).

بحث در وجود جواب : اگر  $l$  یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$  را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر  $l$  با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر  $l$  بر یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$  منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.





۱- مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله اند.

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط  $d$  در نقطه ثابت  $A$  مماس اند.

پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر خط  $d$  در صفحه مماس اند.

ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر دایره  $C(O, r)$  در صفحه این دایره مماس خارجی اند.

۲- نقاط  $A, B, C$  و  $D$  در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۳- نقاط  $A, B, C$  در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۴- نقطه  $A$  و خط  $d$  در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  به فاصله ۲ سانتی‌متر و از  $d$  به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۵- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

۶- هرگاه دو خط  $d$  و  $l$  موازی باشند، از دوران  $d$  حول  $l$  سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه  $P$ ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

## دایره

معروف ترین مقطع مخروطی، دایره است و چنانچه قبلاً دیدیم، دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ای ثابت (شعاع دایره) واقع اند. حال می خواهیم ویژگی های دایره را به صورت تحلیلی در دستگاه مختصات دوطبقی با هم مرور کنیم.

— معادله دایره: دایره  $C(O', r)$  را در دستگاه مختصات  $xoy$  در نظر می گیریم. اگر  $O'(\alpha, \beta)$  مرکز دایره باشد و  $A(x, y)$  یک نقطه دلخواه روی آن باشد، با توجه به تعریف دایره، همواره  $O'A = r$  و با توجه به دستور تعیین فاصله بین دو نقطه می توان نوشت:

$$|O'A| = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r \Rightarrow \boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2}$$

و این معادله دایره ای به مرکز  $(\alpha, \beta)$  و شعاع  $r$  است، که به آن معادله استاندارد دایره نیز می گوئیم.

**مثال:** معادله دایره ای به مرکز  $O'(2, -1)$  و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

**حل:** به کمک دستور بالا معادله استاندارد دایره فوق نوشته می شود:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

اگر در این معادله،  $y = 0$  قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور  $x$ ها به دست می آید:

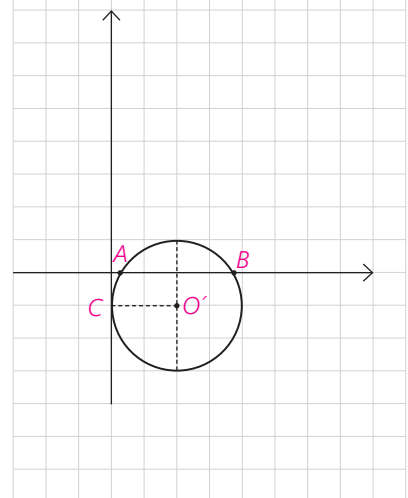
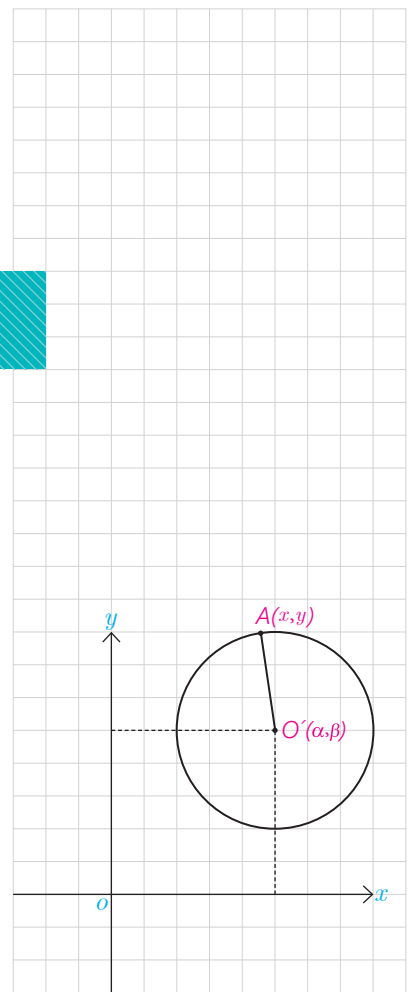
$$(x - 2)^2 + 1 = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

لذا دایره فوق محور  $x$ ها را در نقاط  $A(2 - \sqrt{3}, 0)$  و  $B(2 + \sqrt{3}, 0)$  قطع می کند و

اگر در معادله دایره،  $x = 0$  قرار دهیم نقاط برخورد با محور  $y$ ها پیدا می شوند:

$$x = 0 \Rightarrow (y + 1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1$$





بنابراین دایره فوق محور  $y$  ها را فقط در یک نقطه  $C(0, -1)$  قطع می کند و می دانیم که اگر یک خط دایره ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است. پس همان طور که در شکل هم دیده می شود، دایره در نقطه  $C$  بر محور  $y$  ها مماس است. در معادله دایره می توانیم به کمک اتحادها، عبارت های درجه دوم را ساده کنیم، مثلاً در معادله فوق داریم:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

که این معادله را معادله ضمنی دایره می نامیم.

### — تبدیل معادله ضمنی دایره به معادله استاندارد:

در حالت کلی معادله ای به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  ممکن است معادله دایره ای باشد. برای این منظور عبارت های  $x^2 + ax$  و  $y^2 + by$  را به مربع کامل تبدیل می کنیم.

**مثال:** مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$  را به دست آورید.

**حل:**

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = -1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O(-1, 2), r=2$$

### ۱ فعالیت

می خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله ضمنی  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را در حالت کلی به دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید:

$$(x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) + (y^2 + by + \dots - \dots) + c = 0 \Rightarrow$$

$$(x + \dots)^2 + (y + \dots)^2 - \dots - \dots + c = 0 \Rightarrow$$

$$(x + \dots)^2 + (y + \dots)^2 = \frac{\dots}{4}$$

$$\Rightarrow O(\dots, \dots), r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه ای درباره  $a, b, c$  به دست می آید؟

رابطهٔ ضمنی  $x^2+y^2+ax+by+c=0$  معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر  $a^2+b^2>4c$  باشد و اگر  $a^2+b^2<4c$  باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر  $a^2+b^2=4c$  باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

### نتیجه

با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادلهٔ آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادلهٔ دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

### کاردرکلاس

۱- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0,1)$  و شعاع آن ۳ واحد باشد.

۲- معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ به چه صورت است؟

۳- کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف)  $x^2+y^2-2x-6y-1=0$

ب)  $x^2+y^2+2x+3y+4=0$

ج)  $2x^2+2y^2-3x+4y-2=0$

**مثال:** معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ  $O(-2,-1)$  مرکز آن و  $M(1,1)$  یک نقطه از آن باشد.

**حل:** مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادلهٔ آن را بنویسیم. روشن است که  $OM=r$  پس طول  $OM$  را به دست می‌آوریم:

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13}$$

و معادله دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 13$$

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه  $O(1, -1)$  مرکز آن بوده و بر خط به معادله  $3x - 4y + 3 = 0$  مماس باشد.

۱- با توجه به آنچه از هندسه یاد دارید، شعاع دایره در نقطه تماس  $(H)$  بر خط  $3x - 4y + 3 = 0$  عمود است.

۲- طول شعاع دایره برابر است با فاصله مرکز دایره از خط  $3x - 4y + 3 = 0$ .

۳- به کمک دستور فاصله نقطه از خط داریم:  $r = OH = \frac{|3x_0 - 4y_0 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dots$

۴- معادله دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \dots \Rightarrow \dots$$

کاردکلاس

معادله دایره‌ای را بنویسید که  $O(0, 1)$  مرکز آن بوده و روی خط به معادله  $x + y = 2$  و تری به طول  $2\sqrt{2}$  جدا کند.

(راهنمایی: می‌دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.)

**مثال:** معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه  $O(-1, 1)$  بوده و بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$  از مماس بیرونی باشد.

**حل:** مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 \Rightarrow O'(1, -1), r' = \sqrt{2}$$

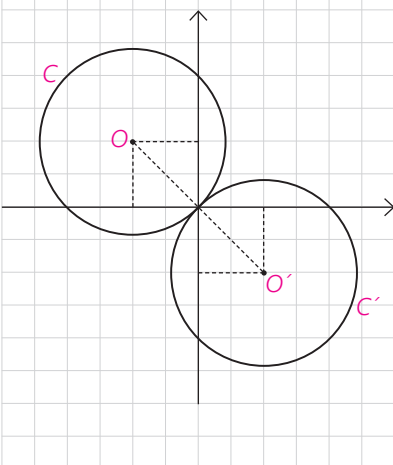
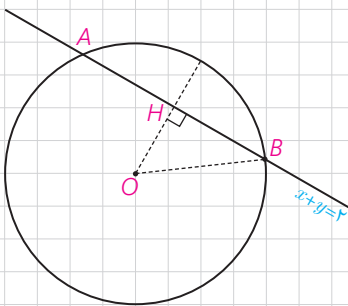
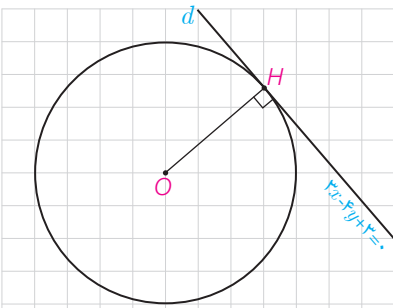
و چنانچه از هندسه یاد داریم اگر  $d = OO'$  طول خط‌المركزین دو دایره مماس خارج باشد،  $d = r + r'$  بنابراین داریم:

$$d = OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d = 2\sqrt{2} = r + \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره  $C$  را می‌نویسیم:

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$



### فعالیت ۳

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0, 1)$  بوده و با دایره  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$  مماس داخل باشد.

۱- معادله دایره فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$$(x - \dots)^2 + (y - \dots)^2 = \dots \Rightarrow O'(\dots, \dots), r' = \dots$$

۲- طول خط‌المركزین دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$d = OO' = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \dots$$

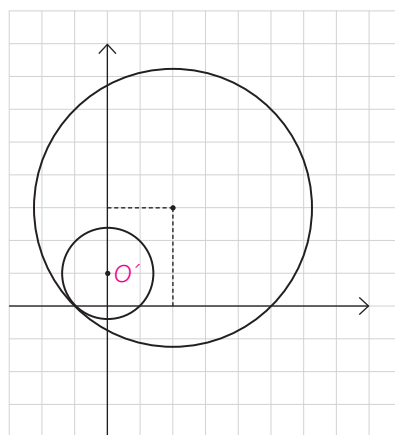
۳- با توجه به آنچه از هندسه ۲ می‌دانیم، داریم:

$$d = |r - r'| \Rightarrow |r - \dots| = 2\sqrt{2} \Rightarrow r - \dots = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \dots$$

۴- با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (\dots \pm 2\sqrt{2})^2$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟



### کاردکلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$  ,  $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$

ب)  $x^2 + y^2 - 2x = 1$  ,  $x^2 + y^2 = 1$

ج)  $x^2 + y^2 = 9$  ,  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

د)  $x^2 + y^2 = 4$  ,  $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$

(راهنمایی: مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به دست آورده و پس از تعیین طول خط‌المركزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)

می‌خواهیم وضعیت خط به معادله  $x+y=4$  و دایره  $x^2+y^2-2y-3=0$  را تعیین کنیم.

روش اول: از معادله خط،  $y=4-x$  را در معادله دایره جایگزین می‌کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه‌های برخورد از معادله حاصل به دست می‌آید):

$$x^2+(4-x)^2-2(4-x)-3=0 \Rightarrow \dots$$

با ساده کردن معادله حاصل و تعیین علامت  $\Delta$ ، نشان دهید معادله فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم: معادله دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می‌دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه گیری‌تان را ببینید.

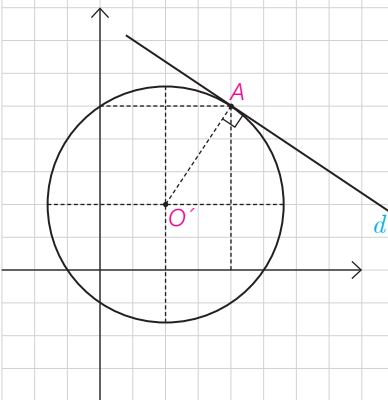
**سؤال:** اگر در معادله حاصل از برخورد خط و دایره،  $\Delta > 0$  یا  $\Delta = 0$  شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت‌ها فاصله مرکز دایره از خط چگونه است؟

**مثال:** در نقطه  $A(2,3)$  روی دایره  $x^2+y^2-2x-2y=3$  مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.

**حل:** با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره شیب  $OA$  را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب مماس را به دست آورده و معادله آن را تعیین می‌کنیم.

$$(x-1)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow O(1,1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow$$

$$m_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow y-3 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow \text{معادله مماس } d: y = -\frac{1}{2}x + 4$$





- ۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که :
- الف)  $O(1,1)$  مرکز آن و  $A(3,2)$  نقطه‌ای از آن باشد.
- ب)  $O(2,1)$  مرکز آن بوده و بر خط  $3x+4y=0$  مماس باشد.
- پ)  $O(-1,-1)$  مرکز آن بوده و روی خط  $x+y=1$  و تری به طول ۲ ایجاد کند.
- ت) خطوط  $x+y=1$  و  $x-y=3$  شامل قطرهایی از آن بوده و خط  $4x+3y=6$  بر آن مماس باشد.
- ج) از نقاط  $A(1,2)$  و  $B(3,0)$  بگذرد و  $y=2x-1$  شامل قطری از آن باشد.

- ۲- حدود  $a$  را طوری به دست آورید که  $x^2+y^2-3x+5y+a=0$  بتواند معادله یک دایره باشد.

- ۳- وضعیت هر یک از نقاط  $A(-1,-1)$  و  $B(1,-2)$  و  $C(2,3)$  و  $D(4,-1)$  را نسبت به دایره  $x^2+y^2-2x+4y-5=0$  تعیین کنید.

- ۴- وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :
- الف)  $x^2+y^2=4$  ,  $x^2+y^2-2x=4$
- ب)  $x^2+(y-1)^2=1$  ,  $(x-1)^2+y^2=1$
- ج)  $x^2+y^2=1$  ,  $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$
- د)  $x^2+y^2=1$  ,  $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

- ۵- نقاط  $A(-1,-1)$  و  $B(1,1)$  و  $C(1,-3)$  رئوس مثلث  $ABC$  هستند. معادله دایره محیطی مثلث  $ABC$  را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس  $B$  به دست آورید.

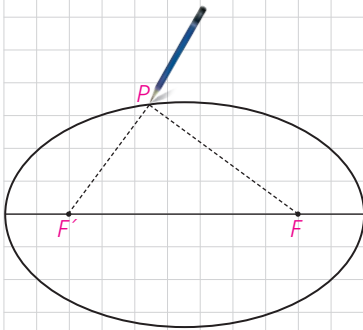
- ۶- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :
- الف)  $3x+4y=0$  ,  $x^2+y^2-4x-4y+7=0$
- ب)  $x+y=2$  ,  $x^2+y^2=2$
- ج)  $x+y=1$  ,  $x^2+y^2-2x-2y=2$

## بیضی و سهمی

## بیضی

## ۱ فعالیت

یک تکه نخ در نظر گرفته و دوسر آن را مطابق شکل در دو نقطه  $F$  و  $F'$  ثابت کنید. فرض کنید طول نخ  $l$  باشد و  $l > FF'$  یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.



۱- یک نقطه دلخواه روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  برابر چیست؟

۲- یک نقطه دلخواه مانند  $A$  در درون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از  $F$  و  $F'$  کوچکتر از  $l$  است.

(راهنمایی: پاره خط  $FA$  را از سمت  $A$  امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۳- یک نقطه دلخواه مانند  $B$  بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه  $F$  و  $F'$  وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از  $F$  و  $F'$  بزرگتر از  $l$  است. (راهنمایی: اگر نقطه  $D$  محل برخورد  $FB$  با بیضی باشد،  $F'D$  را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۴- از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همه نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

۵- با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.  
 بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو .....  
 یک مقدار ..... است.

دو نقطه ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به دست آوردیم و آنها را  $F$  و  $F'$  نامیدیم کانون‌های بیضی نام دارند.

### فعالیت ۲

بیضی مقابل را در نظر بگیرید.  $AA'$  قطر بزرگ (قطر کانونی) و  $BB'$  قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود.  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی هستند و نقطه  $O$ ، وسط پاره خط  $FF'$ ، مرکز بیضی است. فرض کنید اندازه پاره خط‌های  $OA$ ،  $OB$  و  $OF$  را به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $c$  نمایش دهیم. بنابراین فاصله دو کانون بیضی برابر  $2c$  است.

۱- در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی را که مداد در نقاط  $A$  و  $A'$  قرار می‌گیرد در نظر بگیرید.

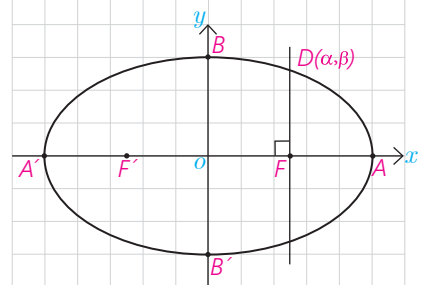
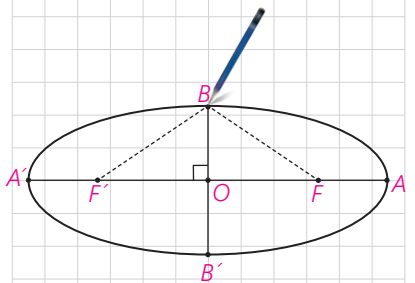
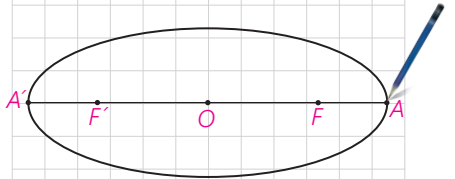
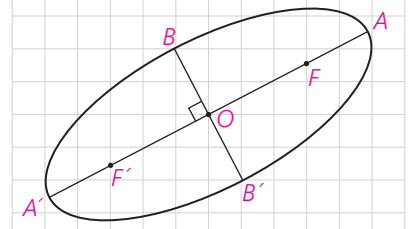
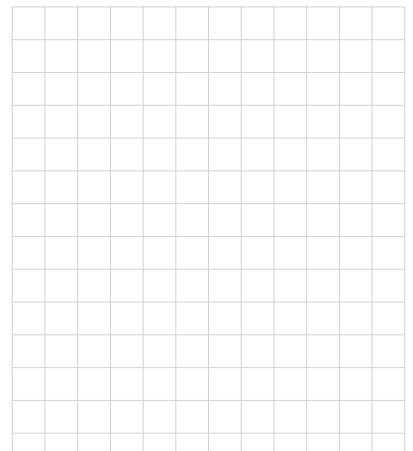
الف) نشان دهید که  $FA = F'A'$  و از آن نتیجه بگیرید  $OA' = OA = a$  و لذا اندازه قطر بزرگ بیضی برابر  $2a$  است.

ب) نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

۲- الف) در رسم بیضی وضعیتی را که مداد در نقطه  $B$  قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید  $b^2 + c^2 = a^2$

ب) با انجام همین کار برای نقطه  $B'$  نتیجه بگیرید  $OB'^2 + c^2 = a^2$

و با توجه به آن نتیجه بگیرید  $OB' = OB = b$  و لذا اندازه قطر کوچک بیضی برابر  $2b$  است.



### کاردرکلاس

۱- مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای  $x$  و  $y$  منطبق هستند و فاصله  $F$  از هر دو نقطه  $O$  و  $A$  برابر  $c$  است. اگر خطی که در نقطه  $F$  بر  $AA'$  عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه  $D$  قطع کرده باشد، مختصات  $D$  را به دست آورید.



در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای  $a$  و  $c$  بیضی موردنظر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که  $0 \leq c \leq a$  و لذا  $0 \leq \frac{c}{a} \leq 1$  و دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر  $\frac{c}{a}$  دارد. در رسم بیضی به صورت تقریبی ابتدا دو کانون  $F$  و  $F'$  را به فاصله  $2c$  از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط  $A$  و  $A'$  را بر خط  $FF'$  به گونه‌ای انتخاب کنید که فاصله  $A$  تا  $F$  و فاصله  $A'$  تا  $F'$  برابر  $a-c$  و اندازه  $AA'$  برابر  $2a$  باشد، سپس با استفاده از رابطه  $b^2 = a^2 - c^2$  نقاط  $B$  و  $B'$  را مشخص کنید و بیضی را به طور تقریبی رسم کنید:

$$1- \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{4}; \quad a = 4 \text{ و } c = 1$$

$$2- \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{4}; \quad a = 8 \text{ و } c = 2$$

$$3- \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2}; \quad a = 2 \text{ و } c = 1$$

$$4- \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2}; \quad a = 4 \text{ و } c = 2$$

$$5- \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{4}; \quad a = 4 \text{ و } c = 3$$

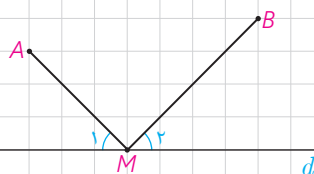
$$6- \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{4}; \quad a = 8 \text{ و } c = 6$$

با توجه به آنچه دیدید هرچه مقدار  $\frac{c}{a}$  به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده‌تر شده و شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود و هرچه مقدار  $\frac{c}{a}$  به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود. به این سبب مقدار  $\frac{c}{a}$  را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

– در حالتی که  $\frac{c}{a} = 1$  بیضی تبدیل به یک پاره‌خط و در حالتی که  $\frac{c}{a} = 0$  بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. چرا؟

### یادآوری

در پایه یازدهم دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  و با عبور از نقطه‌ای از خط  $d$ ، از نقطه‌ای مانند  $M$  روی خط  $d$  می‌گذرد، به گونه‌ای که دو زاویه ایجاد شده  $M_1$  و  $M_2$  باهم برابرند.

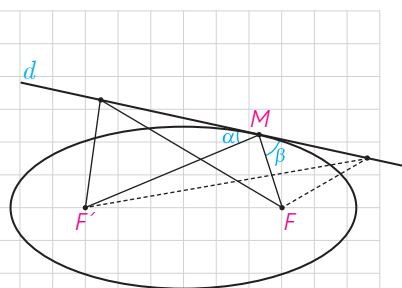


#### فعالیت ۴

فرض کنیم خط  $d$  مانند شکل مقابل در نقطه  $M$  بر بیضی مماس باشد.  
 ۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط  $d$  نسبت به دو کانون  $F$  و  $F'$  کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲- دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳- با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟



#### سهمی

با سهمی در سال‌های گذشته تا حدی آشنا شده‌ایم. اکنون قصد داریم آن را به‌عنوان یک شکل هندسی مورد بررسی قرار دهیم.

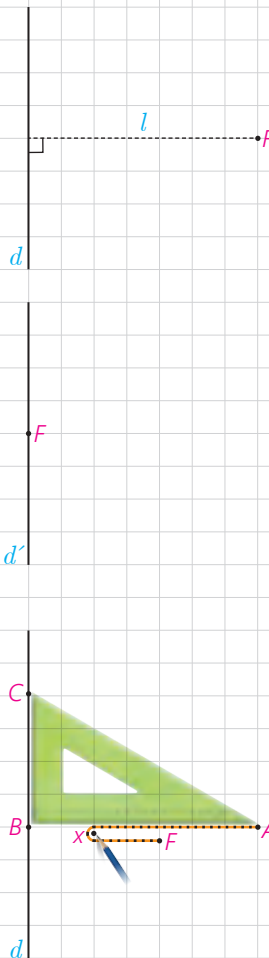
#### فعالیت ۵

یک خط ثابت مانند  $d$  و یک نقطه ثابت مانند  $f$  خارج آن در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله  $F$  از خط  $d$  برابر  $l$  باشد.

– یک نقطه بیابید که فاصله آن از خط  $d$  و نقطه  $F$  یکسان باشد.

– آیا می‌توانید نقطه دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطه  $F$  خطی موازی خط  $d$  رسم کنید و آن را  $d'$  بنامید. تمام نقاط واقع بر خط  $d'$  فاصله‌شان از خط  $d$  برابر  $l$  است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط  $d'$  بیابید که از نقطه  $F$  و خط  $d$  به یک فاصله باشند.

– اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصله یکسانی از خط  $d$  و نقطه  $F$  قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط مورد نظر ارائه می‌گردد.



فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  باشند. یک سر یک تکه نخ به طول  $AB$  را در رأس  $A$  از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطه  $F$  ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع  $BC$  بر خط  $d$  واقع باشد و نقطه  $F$  بر ضلع  $AB$  قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به گونه‌ای به نخ گیر دهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشند. در این حالت فاصله نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط  $d$  و از نقطه  $F$  نسبت به هم چگونه است؟

حال در حالتی که ضلع  $BC$  کماکان بر خط  $d$  واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع  $AB$  چسبیده باشد و هر دو تکه نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطه در حال حرکت نوک مداد را در هر حالت با  $X$  نمایش دهیم. پاره خط‌های  $BX$  و  $FX$  هر کدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطه  $X$  هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟

توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط مداد رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع  $BC$  بر خط  $d$  در هر دو طرف نقطه  $F$  می‌توان حرکت داد.)

شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطه  $F$  را کانون سهمی و خط  $d$  را خط هادی سهمی می‌نامیم و اگر از  $F$  بر خط  $d$  خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به آن رأس سهمی می‌گوییم. حال با توجه به آنچه دیدیم می‌توان گفت:

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

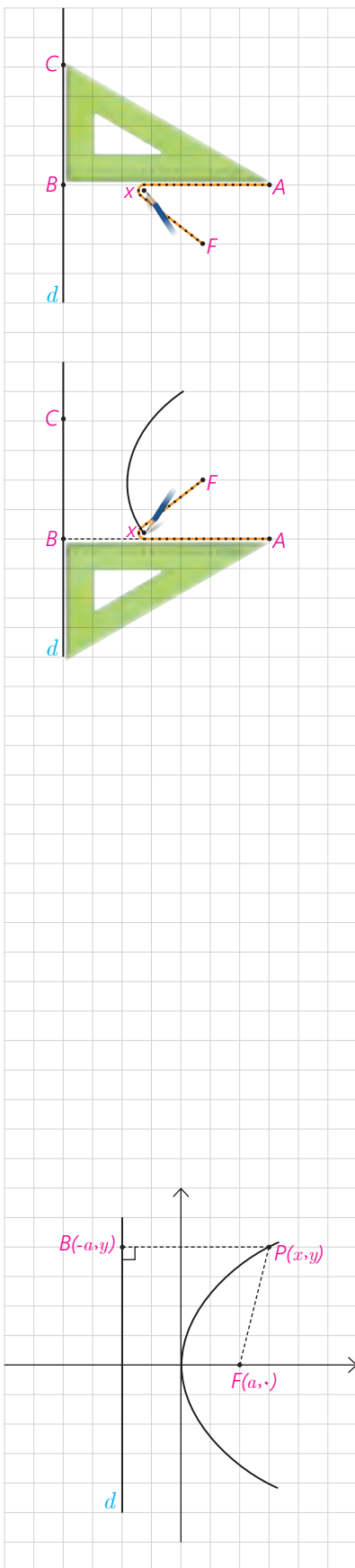
### ■ معادله سهمی

با توجه به آنچه گفته شد با سهمی به صورت هندسی آشنا شدیم. حال به دنبال این هستیم که برای یک سهمی داده شده معادله آن را به دست آوریم؛ یعنی معادله‌ای به دست آوریم که مختصات هر نقطه از سهمی در آن معادله صدق کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله صدق کند روی سهمی مورد نظر باشد. دقت کنید که این کار را فقط برای سهمی‌هایی انجام می‌دهیم که خط هادی آنها موازی با یکی از محورهای مختصات باشد.

### ۶ فعالیت

۱- فرض کنید نقطه  $F(a, 0)$ ، که در آن  $a$  مثبت است، کانون سهمی و خط هادی  $d$  موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = -a$  باشد و نقطه  $P(x, y)$  نقطه‌ای دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم:  $|PF| = |PB|$ . چرا؟ بنابراین

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2}$$



با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت:  $y^2 = 4ax$   
 دقت کنید که  $a$  برابر با فاصله کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصله رأس سهمی تا خط هادی است و فاصله کانون تا خط هادی برابر  $2a$  است. در این حالت عدد مثبت  $a$  را فاصله کانونی سهمی می نامند و چنان که دیده می شود خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود می شود که در اینجا محور  $x$  هاست محور تقارن سهمی است که به آن محور کانونی سهمی یا محور سهمی هم می گوئیم.

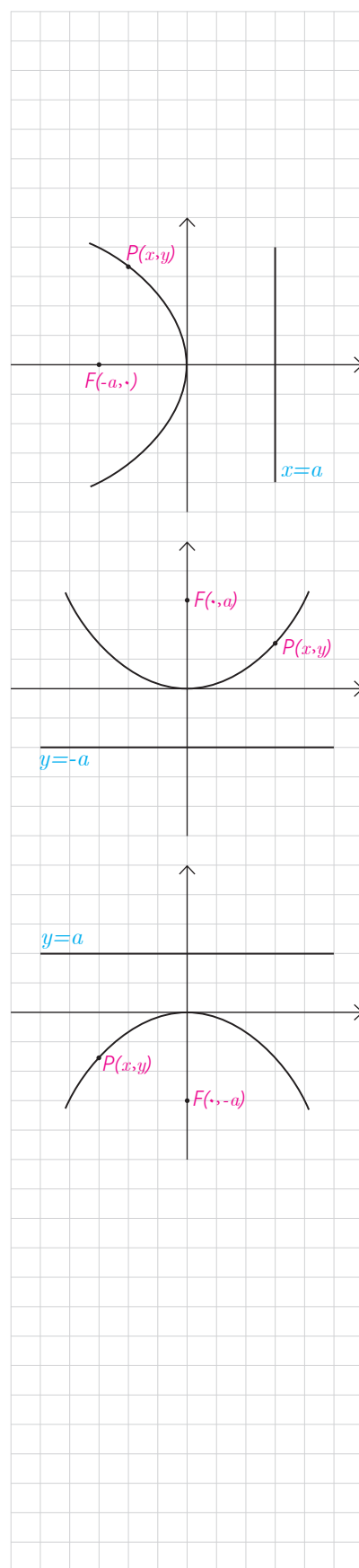
۲- در حالتی که خط هادی  $d$  موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = a$  باشد ولی کانون  $F(-a, 0)$  در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله سهمی به صورت  $y^2 = -4ax$  است. در این حالت محور  $x$  ها محور سهمی است.

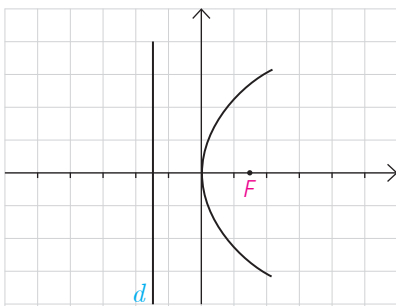
۳- در حالتی که خط هادی  $d$  موازی محور  $x$  ها به معادله  $y = -a$  و کانون  $F(0, a)$  در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله سهمی به صورت  $x^2 = 4ay$  است. در این حالت محور  $y$  ها محور سهمی است. (در واقع این معادله همان  $y = \frac{1}{4a}x^2$  است که در پایه دهم به عنوان معادله سهمی با آن آشنا شدید)

۴- در حالتی که خط هادی  $d$  موازی محور  $x$  ها به معادله  $y = a$  و کانون  $F(0, -a)$  در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله سهمی به صورت  $x^2 = -4ay$  است. در این حالت محور  $y$  ها محور سهمی است.

مطالب فوق درباره سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می توان در جدول زیر خلاصه کرد.

معادله سهمی ( $a > 0$ )	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$y^2 = 4ax$	$(a, 0)$	$x = -a$	محور $x$	رو به راست
$y^2 = -4ax$	$(-a, 0)$	$x = a$	محور $x$	رو به چپ
$x^2 = 4ay$	$(0, a)$	$y = -a$	محور $y$	رو به بالا
$x^2 = -4ay$	$(0, -a)$	$y = a$	محور $y$	رو به پایین





**مثال:** معادله  $y^2 = 6x$  مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.

**حل:** این معادله یک سهمی است که دهانه آن روبه راست است و محور آن محور  $x$  هاست. با قرار دادن  $6 = 4a$  داریم  $a = \frac{3}{2}$ . لذا کانون آن  $F(\frac{3}{2}, 0)$  و خط هادی آن موازی محور  $y$  ها و به معادله  $x = -\frac{3}{2}$  است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به صورت مقابل است.

### انتقال (محورها)

دیدیم که  $y^2 = 4ax$  معادله یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن  $F(a, 0)$ ، خط هادی آن موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = -a$ ، محور آن محور  $x$  ها (خط  $y = 0$ ) و دهانه آن رو به راست است. حال با توجه به آنچه درباره انتقال می دانیم می توان گفت معادله  $(y-k)^2 = 4a(x-h)$  معادله همان سهمی است که به اندازه  $h$  به سمت راست (در صورت منفی بودن  $h$  به سمت چپ) و به اندازه  $k$  به سمت بالا (در صورت منفی بودن  $k$  به سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مختصات  $(h, k)$ ، کانون آن  $F(a+h, k)$ ، خط هادی آن موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = -a+h$ ، محور آن خط  $y = k$  و دهانه آن کماکان روبه راست است.

دهانه سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله سهمی
رو به راست	خط $y=k$	$x = -a+h$	$(a+h, k)$	$(y-k)^2 = 4a(x-h)$
رو به چپ	خط $y=k$	$x = a+h$	$(-a+h, k)$	$(y-k)^2 = -4a(x-h)$
رو به بالا	خط $x=h$	$y = -a+k$	$(h, a+k)$	$(x-h)^2 = 4a(y-k)$
رو به پایین	خط $x=h$	$y = a+k$	$(h, -a+k)$	$(x-h)^2 = -4a(y-k)$

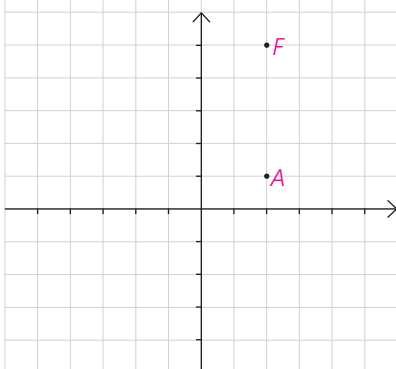
همان طور که گفته شد رأس این سهمی ها نقطه ای به مختصات  $(h, k)$  است. لذا این حالت ها، حالت های کلی معادلات است که با قراردادن  $(h, k) = (0, 0)$  به حالت های خاص، که در جدول قبل مطرح شد، خواهیم رسید. معادلات سهمی را در جدول فوق، معادلات استاندارد یا متعارف می گوئیم.

**مثال:** معادله سهمی به رأس  $A(2, 1)$  و کانون  $F(2, 5)$  را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.

**حل:** با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

$$(1) \quad a = 4 \quad (\text{چرا؟})$$

$$(2) \quad \text{معادله خط هادی آن } y = -3 \text{ است. چرا؟}$$



(۳) دهانه سهمی روبه بالاست. چرا؟

لذا معادله آن به صورت  $(x-h)^2 = 4a(y-k)$  است و خواهیم داشت:

$$(x-2)^2 = 16(y-1)$$

**مثال:** مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس  $A(4,6)$  و خط هادی  $x=9$

بنویسید.

**حل:** با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

(۱)  $a=5$  چرا؟

(۲) کانون آن به مختصات  $F(-1,6)$  است، چرا؟

(۳) دهانه سهمی رو به چپ است. چرا؟

لذا معادله آن به صورت  $(y-k)^2 = -4a(x-h)$  است و خواهیم داشت:

$$(y-6)^2 = -20(x-4)$$

### ■ تبدیل معادله یک سهمی به صورت متعارف

چهار حالت معادله سهمی را که در جدول دوم مطرح شد، ۴ حالت شناخته شده (متعارف) در نظر می‌گیریم. اما در سال‌های قبل معادلاتی با عنوان معادله سهمی مطرح شدند که برخی از آنها در ظاهر به شکل معادلات مطرح شده در جدول نبودند. به طور مثال در پایه دهم معادله‌ای به صورت  $y = x^2 + 3x + 5$  معادله یک سهمی نامیده شد. دقت کنید که ویژگی معادله سهمی این است که نسبت به یکی از دو متغیر  $x$  و  $y$  از درجه ۱ و نسبت به دیگری از درجه ۲ است. در ادامه نشان می‌دهیم معادله مطرح شده قابل تبدیل به یکی از ۴ حالت متعارف خواهد بود.

**مثال:** معادله یک سهمی به صورت  $y = x^2 + 3x + 5$  داده شده است. آن را به یکی از

حالت‌های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

**حل:** داریم  $x^2 + 3x = y - 5$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = y - 5 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = y - \frac{11}{4}$$

لذا معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن  $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right)$  و  $4a=1$

و در نتیجه  $a = \frac{1}{4}$  است. بنابراین  $F = (h, a+k) = \left(-\frac{3}{4}, 3\right)$  کانون آن و خط هادی آن

به معادله  $y = -a + k = \frac{5}{4}$  است. معادله محور سهمی به صورت  $x = h = -\frac{3}{4}$  است.

با روش مشابه آنچه در مثال دیدید معادلات سهمی‌ها را می‌توان به یکی از حالات

استاندارد نوشت.



## رسم سهمی

رسم دقیق یک منحنی توسط نرم افزارهای ریاضی انجام می‌گیرد. طبیعی است که در رسم منحنی‌ها با کاغذ و قلم، شکل حاصل شکل تقریبی منحنی مورد نظر خواهد بود. برای رسم یک سهمی ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد می‌نویسیم و با توجه به آن، مختصات رأس سهمی، مقدار  $a$  (فاصله کانونی)، مختصات  $F$  (کانون) و خط هادی آن را به دست می‌آوریم و نیز درمی‌یابیم که دهانه سهمی رو به کدام طرف است. یکی از مهم‌ترین نقاطی که باید در رسم سهمی جایگاه آن را مشخص نماییم، رأس سهمی است. اگر کانون سهمی را نیز مشخص نماییم در این صورت خطی که از رأس و کانون سهمی عبور می‌کند محور تقارن سهمی است. حال اگر خطی را که در نقطه  $F$  بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً  $B$  و  $B'$  را که به فاصله  $2a$  از  $F$  هستند مشخص نماییم، در این صورت نقاط  $B$  و  $B'$  بر سهمی واقع‌اند. چرا؟

حال با داشتن رأس و دو نقطه دیگر از سهمی و دانستن شکل کلی آن می‌توان شکل سهمی را به صورت تقریبی رسم کرد. قبل از رسم می‌توان نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات را نیز مشخص نمود.

**مثال:** نمودار معادله  $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$  را رسم کنید.

**حل:** ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم

$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1)$$

لذا معادله فوق یک سهمی با رأس  $A(h, k) = (-1, 1)$  است که دهانه آن رو به چپ

است. داریم:  $-4a = -8 \Rightarrow a = 2$  و بنابراین  $F(-a+h, k) = (-3, 1)$

و معادله خط هادی آن به صورت  $x = a+h = 1$  است.

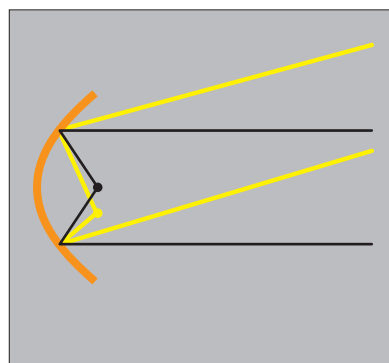
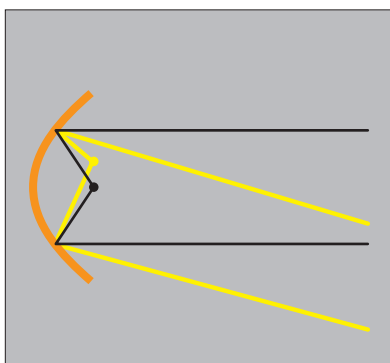
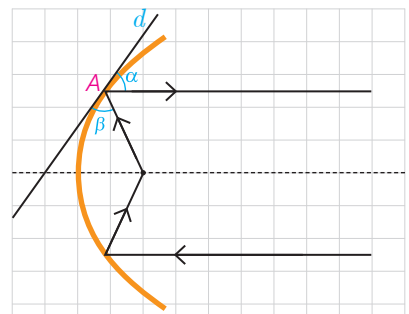
در این صورت نقاط  $B$  و  $B'$  که هم طول با  $F$  و به فاصله  $2a = 4$  از  $F$  باشند یعنی  $B(5, -3)$  و  $B'(-3, -3)$  نیز بر سهمی واقع‌اند. فاصله هریک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط  $B$  و  $A$  و  $B'$  به صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی مورد نظر را به دست آورید.



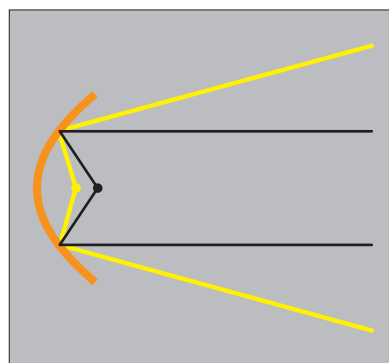
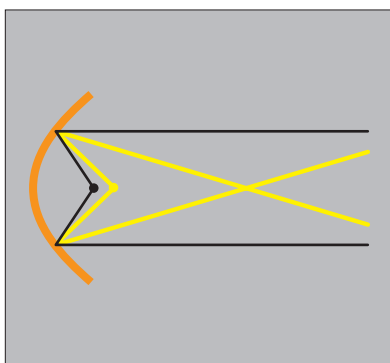
## ■ ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها و کاربردهای آن

یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. در واقع اگر خط  $d$  بر سهمی مماس و نقطه  $A$  نقطه تماس آن باشد زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  برابرند. از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهمی پشت لامپ به صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به وجود می‌آورند.

با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.



اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.

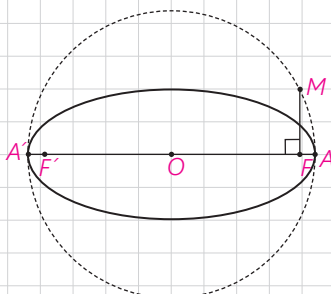




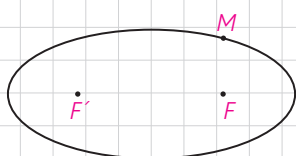


۱- دو نقطه  $A$  و  $B$  روی یک بیضی  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی‌اند.  $A$  به کانون  $F'$  نزدیک‌تر و  $B$  به کانون  $F$  نزدیک‌تر است. اگر  $AF' = BF$  باشد، نشان دهید:  
 الف) در حالتی که دو پاره‌خط  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

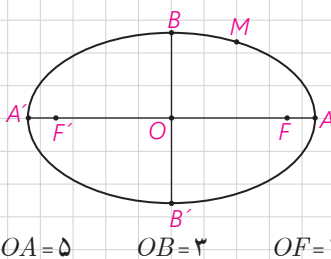
ب) در حالتی که  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند  $M$  قطع کنند، مثلث  $FMF'$  متساوی‌الساقین است و  $M$  روی قطر کوچک بیضی است.



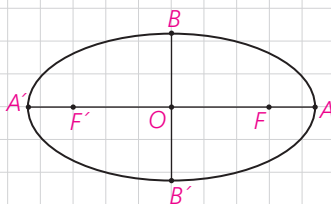
۲- قطر دایره  $C$ ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی  $e$  است و از کانون  $F$  عمودی بر  $AA'$  رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند  $M$  قطع کند. ثابت کنید  $MF$  با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



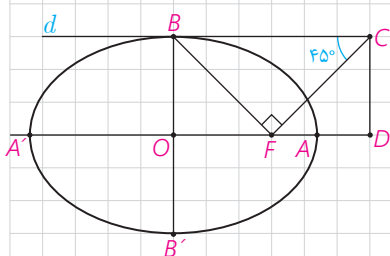
۳- در شکل مقابل نقطه  $M$  روی بیضی و کانون‌های  $F$  و  $F'$  مشخص شده‌اند. خط  $d$  را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه  $M$  بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه  $F'$  خطی موازی با  $MF$  رسم کنید تا خط  $d$  را در نقطه‌ای مانند  $N$  قطع کند. ثابت کنید  $NF' = MF'$



۴- نقطه  $M$  روی بیضی به اقطار  $6$  و  $10$  واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر  $4$  واحد است.  
 الف) نشان دهید  $OM = OF = OF'$ .  
 ب) نشان دهید مثلث  $MFF'$  قائم‌الزاویه است.  
 ج) طول‌های  $MF$  و  $MF'$  را به دست آورید.



۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه  $FBF'$  چند درجه است؟



۶- در بیضی مقابل  $AA'$  و  $BB'$  دو قطر‌اند. خط  $d$  در نقطه  $B$  بر بیضی مماس است. پاره‌خط  $BF$  را رسم می‌کنیم و در نقطه  $F$  عمودی بر  $BF$  رسم می‌کنیم تا خط  $d$  را در نقطه  $C$  قطع کند و از  $C$  عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند  $D$  قطع کند. اگر  $\widehat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار  $\frac{AD}{AF}$  را به دست آورید.

۷- سهمی  $y^2 = 2x - 4y$  مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

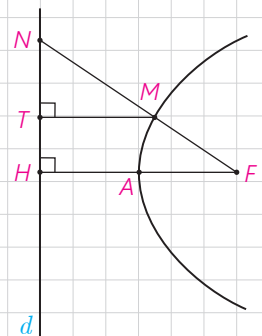
۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) را به دست آورید.

۹- معادله سهمی را بنویسید که رأس  $S(1, 2)$  و  $F(1, -2)$  کانون آن باشد.

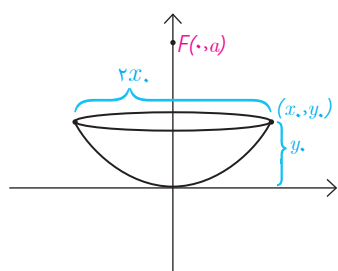
۱۰- سهمی  $y^2 = 4x - 4$  مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱- سهمی  $P$  با کانون  $F$  و خط هادی  $d$  مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از  $F$  بگذرد و بر خط  $d$  مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از  $F$  گذشته و بر  $d$  مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

۱۲- در شکل سهمی با رأس  $A$  و کانون  $F$  و خط هادی  $d$  رسم شده است. از  $F$  به نقطه دلخواه  $M$  روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا  $d$  را در  $N$  قطع کند و از نقطه  $M$  عمود  $MT$  را بر  $d$  عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:  $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$

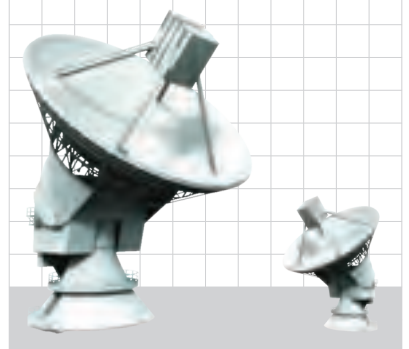


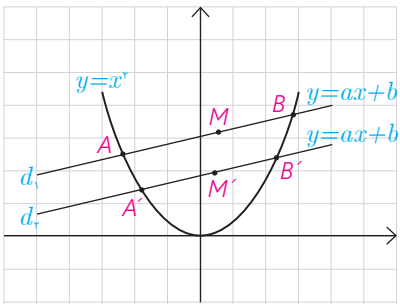
۱۳- یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است.



دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

۱۴- فرض کنید از مثلث  $ABC$ ، اندازه ضلع  $BC$  و ارتفاع  $AH$  و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.





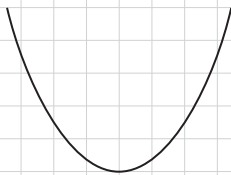
۱۵- سهمی  $y = x^2$  و دو خط موازی  $d_1: y = ax + b$  و  $d_2: y = ax + b'$  را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط  $d_1$  و سهمی  $y = x^2$  باشد.

ب) فرض کنید  $A$  و  $B$  نقاط برخورد خط  $d_1$  و سهمی باشند و نقطه  $M$  وسط پاره خط  $AB$  باشد، مختصات نقطه  $M$  را به دست آورید.

پ) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط  $d_2$  به جای  $d_1$  انجام دهید و مختصات نقطه  $M'$  (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط  $d_2$  و سهمی) به دست آورید.

ت) خط  $MM'$  نسبت به محور  $y$  ها چه وضعی دارد؟



ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

