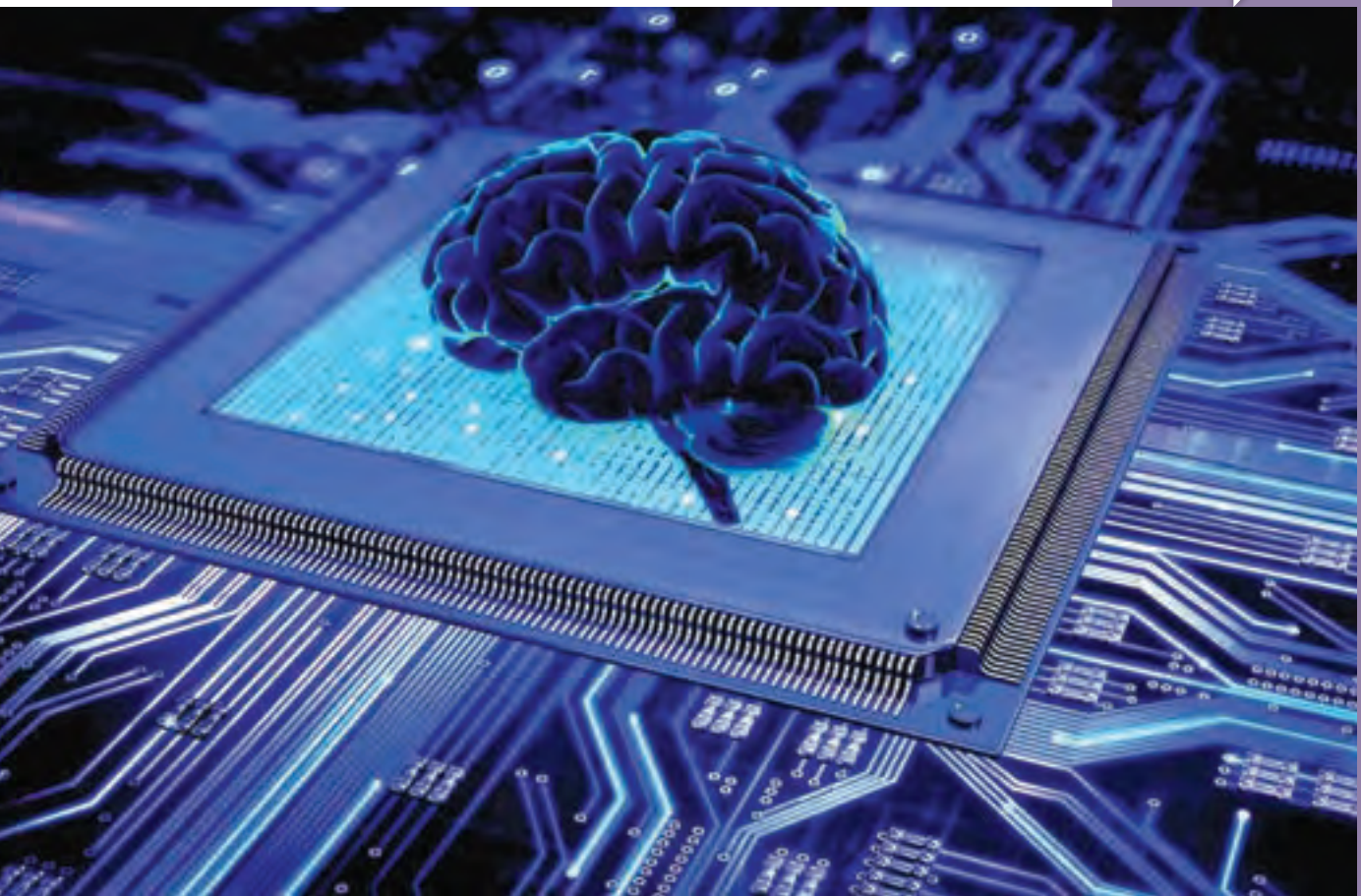


## ماتریس و کاربردها



■ یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص در فیزیک کوانتم (هایزنبرگ، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند.) و در رایانه و علوم چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هایش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا در بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطه تنگاتنگ دارد.

## ماتریس‌ها و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است:

امتیاز	مساوی	باخت	برد	
۳۰	۳	۳	۹	تیم A
۲۵	۴	۴	۷	تیم B
۲۴	۶	۳	۶	تیم C
۲۲	۴	۵	۶	تیم D

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{امتیاز} \\ \text{مساوی} \\ \text{باخت} \\ \text{برد} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 30 \\ 7 & 4 & 4 & 25 \\ 6 & 3 & 6 & 24 \\ 6 & 5 & 4 & 22 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف  $M$  نمایش دهیم، خواهیم داشت:

**تعریف:** هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند  $A$ ،  $B$  و  $C$  و ... نام گذاری می‌کنیم.

**مثال:** ماتریس  $A$  ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای  $3 \times 4 = 12$  درایه است و مثلاً عدد حقیقی  $\sqrt{2}$  درایه روی سطر اول و ستون چهارم است و درایه  $(-7)$  روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

در حالت کلی اگر ماتریسی چون  $A$  دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون باشد می‌نویسیم  $A_{m \times n}$  و می‌خوانیم ( $A$  ماتریسی از مرتبه  $m \times n$  ( $m$  در  $n$ ) است.) برای هر درایه ماتریس و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & -7 & 1 \\ -3 & 20 & \pi & 14 \end{bmatrix}$$

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامبلتون (۱۸۶۵-۱۸۰۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمه اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراشتراس (۱۸۹۷-۱۸۱۵) و دیگران در نیمه دوم قرن نوزدهم و نیمه اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند، یعنی درایه روی سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام.

ماتریس  $A_{2 \times 3}$  و ماتریس  $B_{m \times n}$  با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایه  $b_{ij}$  را درایه عمومی ماتریس  $B$  می‌نامیم که  $1 \leq i \leq m$  و  $1 \leq j \leq n$  تغییر می‌کنند. همه درایه‌های ماتریس  $B$  را می‌توان توسط درایه عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم  $B = [b_{ij}]$ .

**مثال:** اگر ماتریس  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  ماتریسی  $2 \times 2$  باشد و برای  $i=j$  داشته باشیم  $a_{ij}=7$  و برای  $i > j$  داشته باشیم  $a_{ij}=5$  و برای  $i < j$  داشته باشیم  $a_{ij}=-2$  در این صورت ماتریس  $A$  را با درایه‌هایشان نمایش دهید.

**حل:**  $a_{11}=a_{22}=7$  و  $a_{21}=5$  و  $a_{12}=-2$  پس  $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

### کاردرکلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه  $A, B, C, D$  در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس  $3 \times 4$  و یک بار با ماتریسی  $4 \times 3$  نمایش دهید.

۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن	فروشگاه A
۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن	فروشگاه B
۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن	فروشگاه C
۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن	فروشگاه D

۱- اگر  $m=n=1$  در این صورت ماتریس  $[K]_{1 \times 1}$  را مساوی با عدد حقیقی  $K$  تعریف می‌کنیم.

## ■ معرفی چند ماتریس خاص

۱- اگر در ماتریس  $A$ ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی  $n$  باشد،  $A$  را یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  ( $n \times n$ ) می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{و} \quad C = [5]_{1 \times 1} = 5$$

در ماتریس‌های  $A$  و  $B$  قطرهای مشخص شده را قطر اصلی این دو ماتریس می‌نامیم و اگر  $i=j$  در این صورت درایه  $a_{ij}$  روی قطر اصلی قرار دارد.

۲- اگر ماتریس  $A$  فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند:

$$A = [1 \ 2]_{1 \times 2}, \quad B = [2 \ -1 \ 4 \ 5]_{1 \times 4}, \quad C = [7]_{1 \times 1} = 7$$

۳- اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس ستونی می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad \text{و} \quad C = [114]_{1 \times 1} = 114$$

۴- ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند). ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵- اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = [2]$$

۶- ماتریس صفر، ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد  $\bar{O}$  نشان می‌دهیم. ماتریس  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس صفر  $2 \times 2$  است.

**تساوی بین دو ماتریس:** دو ماتریس هم‌مرتبه  $A=[a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B=[b_{ij}]_{m \times n}$  را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$

**مثال:** اگر دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  مساوی باشند  $(x+y+z)$  را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \\ z-1=5 \end{cases} \Rightarrow x=6, y=3, z=6 \Rightarrow x+y+z=15$$

### جمع ماتریس‌ها

در کاردر کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکننده لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است:

D	C	B	A	
۱۲+۲۰	۱۷+۲۰	۲۶+۲۰	۲۴+۲۰	شلوار
۳۱+۳۰	۲۸+۳۰	۱۹+۳۰	۱۵+۳۰	بلوز
۳۵+۵۰	۲۲+۵۰	۱۱+۵۰	۷+۵۰	پیراهن

اگر این جدول را با یک ماتریس  $3 \times 4$  نمایش می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت:

$$\begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix}_{3 \times 4} + \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 44 & 46 & 37 & 32 \\ 45 & 49 & 58 & 61 \\ 57 & 61 & 72 & 85 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه  $A$  و  $B$  کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل  $A$  و  $B$  ماتریسی است چون  $C$  که از همان مرتبه  $A$  و  $B$  است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=[a_{ij}]_{m \times n}, B=[b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B=[a_{ij}] \pm [b_{ij}]=[a_{ij} \pm b_{ij}]$$

مانند نمونه ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) & 3+(-3) & (-1)+1 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 & (-1)+4 \\ 7+5 & 8+6 & 9+7 & (-1)+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \\ 12 & 14 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

الف)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \dots$

ب)  $A = [1 \ -1 \ 3 \ 7], \quad B = [3 \ 2 \ -1 \ 4] \Rightarrow A + B = \dots$

پ)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \dots$

ت)  $A = [5], \quad B = [-7] \Rightarrow A + B = \dots$

ث) دو ماتریس  $3 \times 3$  و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

### ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

**تعریف:** برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون  $A$  آن عدد را در تمام

درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر ماتریس حاصل را  $A$  بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$B = \begin{bmatrix} 24 \times 2 & 26 \times 2 & 17 \times 2 & 12 \times 2 \\ 15 \times 2 & 19 \times 2 & 28 \times 2 & 31 \times 2 \\ 7 \times 2 & 11 \times 2 & 22 \times 2 & 35 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24+24 & 26+26 & 17+17 & 12+12 \\ 15+15 & 19+19 & 28+28 & 31+31 \\ 7+7 & 11+11 & 22+22 & 35+35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} = A + A = 2A$$

۱- در هر حالت طرف دوم تساوی های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } -1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$\text{ب) } \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\text{پ) } 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\text{ت) } 7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

۲- هر یک از ماتریس های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \times$$

**قرینه یک ماتریس:** اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ماتریسی دلخواه باشد قرینه ماتریس  $A$  را با  $(-A)$  نمایش داده و از ضرب  $(-1)$  در ماتریس  $A$  به دست می آید. واضح است که  $A + (-A) = \bar{0}$

### ■ خواص مهم جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر  $A, B, C$  ماتریس هایی  $m \times n$  (هم مرتبه) و  $r$  و  $s$  اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات اند:

الف)  $A+B=B+A$  خاصیت جابه جایی

ب)  $A+(B+C)=(A+B)+C$  خاصیت شرکت پذیری

پ)  $A+\bar{0} = \bar{0}+A=A$  خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس ها

ت)  $A+(-A)=(-A)+A=\bar{0}$  خاصیت عضو قرینه

ث)  $r(A \pm B)=rA \pm rB$

ج)  $(r \pm s)A=rA \pm sA$

چ)  $rA=rB, r \neq 0 \Rightarrow A=B$

ح)  $A=B \Rightarrow rA=rB$

**مثال:** فرض کنیم  $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$  و  $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

در این صورت نشان می‌دهیم که  $(-2)(A+B)=(-2)A+(-2)B$ ،

$$\begin{aligned} -2(A+B) &= (-2)\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= (-2)\begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & 3+4 \\ (-1)+3 & 3+2 & (-5)+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2)(1+(-2)) & (-2)(2+1) & (-2)(3+4) \\ (-2)((-1)+3) & (-2)(3+2) & (-2)((-5)+0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2) \times 1 + (-2) \times (-2) & -2 \times 2 + (-2) \times 1 & -2 \times 3 + (-2) \times 4 \\ (-2) \times (-1) + (-2) \times 3 & -2 \times 3 + (-2) \times 2 & (-2) \times (-5) + (-2) \times 0 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\substack{\text{توزیع پذیری ضرب} \\ \text{نسبت به جمع} \\ \mathbb{R} \text{ در}}}{=} \begin{bmatrix} -2 \times 1 & -2 \times 2 & -2 \times 3 \\ (-2) \times (-1) & -2 \times 3 & (-2) \times (-5) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (-2) \times (-2) & -2 \times 1 & -2 \times 4 \\ -2 \times 3 & -2 \times 2 & -2 \times 0 \end{bmatrix} \\ &= (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-2)A + (-2)B \end{aligned}$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم  $A=[a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B=[b_{ij}]_{m \times n}$  در این صورت برای  $r \in \mathbb{R}$  داریم:

$$\begin{aligned} r(A \pm B) &= r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r[a_{ij} \pm b_{ij}] = [r(a_{ij} \pm b_{ij})] \\ &= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] && \text{توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در } \mathbb{R} \\ &= [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] && \text{تعریف جمع (تفاضل)} \\ &= r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] && \text{تعریف ضرب عدد در ماتریس} \\ &= rA \pm rB \end{aligned}$$



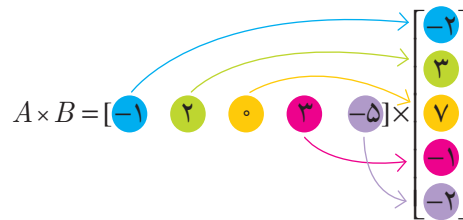
۱- برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  و دو عدد حقیقی  $r = 3$  و  $s = -2$  برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۲- درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

### ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر  $A$  ماتریسی سطری و  $B$  ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های  $A$  با تعداد سطرهای  $B$  برابر باشند در این صورت  $A \times B$  تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه ماتریس  $A$  را در درایه نظیرش در  $B$  ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی  $1 \times 1$  یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

**مثال:** اگر  $A = [-1 \ 2 \ 0 \ 3 \ -5]$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$  در این صورت داریم:



$$= [(-1) \times (-2) + 2 \times 3 + 0 \times 7 + 3 \times (-1) + (-5) \times (-2)]$$

$$= [2 + 6 + 0 + (-3) + 10] = [15] = 15$$

یک ماتریس سطری  $1 \times 3$  مانند  $A$  و یک ماتریس ستونی  $3 \times 1$  مانند  $B$  طوری تعریف کنید که  $A \times B = -7$

### ضرب ماتریس در ماتریس

اگر  $A$  ماتریسی  $m \times p$  و  $B$  ماتریسی  $p \times n$  باشد (تعداد ستون‌های  $A$  با تعداد سطرهای  $B$  برابر باشد) در این صورت  $A_{mp} \times B_{pn}$  قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم  $A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn} = [c_{ij}]$ ، ماتریس  $C$  ماتریسی  $m \times n$  بوده که درایه روی سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام در آن یعنی  $C_{ij}$  از ضرب سطر  $i$ ام  $A$  در ستون  $j$ ام  $B$  به دست می‌آید، یعنی

$c_{ij} = A$  سطر  $i$  ام  $\times$   $B$  ستون  $j$  ام

$$\Rightarrow C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

**مثال:** اگر  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$  و  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

اگر فرض کنیم،  $A_{3 \times 3} \times B_{3 \times 2} = C = [c_{ij}]_{3 \times 2}$  در این صورت ماتریس حاصل ضرب یعنی  $C$  ماتریسی  $3 \times 2$  بوده و داریم:

$$c_{12} = A \text{ سطر اول} \times B \text{ دوم ستون} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 2 + (-1) \times 5 = \dots$$

$$c_{32} = A \text{ سطر سوم} \times B \text{ دوم ستون} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (-3) + (-4) + 20 = \dots$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-4 & 3+4-5 \\ 6-2+4 & 9+4+5 \\ -2+2+16 & -3-4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 18 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

آیا ضرب  $(B \times A)$  امکان پذیر است؟ چرا؟

### کارد کلاس

۱- برای هر حالت  $A \times B$  و  $B \times A$  را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$   $\Rightarrow A \times B = \dots$

ب)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$   $\Rightarrow A \times B = \dots$ ،  $B \times A = \dots$

پ)  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ ،  $B = [2 \ 3 \ 4]_{1 \times 3}$   $\Rightarrow A \times B = \dots$ ،  $B \times A = \dots$

ت)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$   $A \times B = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر  $a \times b = 0$  آنگاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ » مقایسه کنید.

۲- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 5$  باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که  $A \times B$  و  $B \times A$  قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید:

- الف)  $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$       ب)  $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$       پ)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 3}$   
 ت)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 4}$       ث)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 5}$

### خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

#### کاردکلاس

۱- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(A \times B)$  و  $(B \times A)$  را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

#### نتیجه

در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ...

۲- ماتریس اسکالر  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  را از چپ و راست در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ضرب کرده و حاصل ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ماتریس اسکالر روبه‌رو که آن را ماتریس واحد یا همانی مرتبه  $n$  می‌نامیم، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعی مرتبه  $n$  است یعنی:

$$A_{n \times n} \times I_n = I_n \times A_{n \times n} = A_{n \times n}$$

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  در این صورت درستی تساوی  $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$  را بررسی کنید.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

در حالت کلی اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$  و  $C = [c_{ij}]_{p \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times n}$  در این صورت ضرب ماتریس  $A$  در مجموع  $(B+C)$  خاصیت توزیع پذیری یا پختی دارد یعنی:

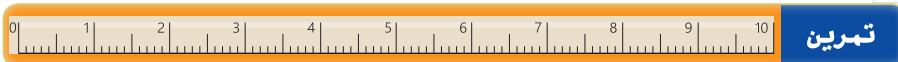
$$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$$

۴- با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

در حالت کلی اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times k}$  و  $C = [c_{ij}]_{k \times n}$  در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت پذیری دارد یعنی:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$



۱- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$  ماتریسی  $3 \times 4$  باشد به طوری که برای  $i=j$  داشته باشیم  $a_{ij} = 7$  و برای  $i > j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i+j$  و برای  $i < j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i^2$  در این صورت ماتریس  $A$  را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $A=B$  در این صورت حاصل  $(x+y+z)$  را بیابید.

۳- دو ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \neq \bar{0}$  و  $B \neq \bar{0}$  ولی  $AB = \bar{0}$ .

۴- با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی  $AB=AC$  نمی‌توان نتیجه گرفت  $B=C$ .

۵- اگر  $A$  ماتریسی مربعی باشد و توان‌های  $A$  را به صورت  $A^2=AA$  و  $A^3=AA^2$  و ... و  $A^n=AA^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$   $n > 1$ ) در این صورت با فرض  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل  $A^2$  و  $A^3$  و  $A^7$  را بیابید.

۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که حاصل ضرب  $A \times B$  ماتریسی قطری باشد.

۷- اگر  $A = [a_{ij}]_{r \times r}$  و  $B = [b_{ij}]_{r \times r}$  به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا  $A$  و  $B$  را با درایه هایشان نوشته و سپس  $A \times B$  و  $B \times A$  را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$$

۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} r_1 & \circ & \circ \\ \circ & r_2 & \circ \\ \circ & \circ & r_3 \end{bmatrix}$  ماتریسی قطری باشد و  $B$  ماتریسی  $3 \times 3$  و دلخواه باشد در این صورت ماتریس  $(A \times B)$  را تشکیل دهید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۹- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  و اسکالر باشد و  $B$  ماتریسی هم مرتبه  $A$  در این صورت الف) برای  $A \times B$  و  $B \times A$  قوانینی تعریف کنید.  
ب) آیا تساوی  $A \times B = B \times A$  برقرار است؟

۱۰- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس های  $3 \times 3$  و تعویض پذیر باشند  $(A \times B = B \times A)$  ثابت کنید.

الف)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب)  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

۱۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & \circ & \circ \\ \circ & 3 & \circ \\ \circ & \circ & 4 \end{bmatrix}$  مفروض باشد. حاصل  $A^3$  را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

## وارون ماتریس و دترمینان

### وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند  $a$  ( $a \neq 0$ ) را با  $\frac{1}{a}$  نشان می‌دهیم و همواره  $a \times \frac{1}{a} = 1$  (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است)

برای هر ماتریس مربعی مانند  $A$ ، وارون ماتریس  $A$  (در صورت وجود) ماتریسی است چون  $B$  به طوری که  $A \times B = B \times A = I$  در این صورت  $B$  را وارون  $A$  می‌نامیم و با  $A^{-1}$  نشان می‌دهیم.

از وارون ماتریس‌ها در حل دستگاه‌های معادلات استفاده خواهد شد.

**مسئله:** نشان دهید ماتریس  $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$  وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  است. کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم  $AB = BA = I$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

برای محاسبه وارون یک ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  (در صورت وجود)

باید ماتریسی چون  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  بیابیم طوری که  $A \times B = B \times A = I$  یا

که این تساوی  $x, y, z, t$  را بر حسب  $a, b, c, d$  نتیجه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

آیا دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  وارون یکدیگرند؟ چرا؟

می‌دهد و ماتریس  $B$  یا  $A^{-1}$  به صورت  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$  به دست می‌آید

که با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

عدد  $(ad-bc)$  را دترمینان ماتریس  $A$  می‌نامیم و با نماد  $|A|$  (می‌خوانیم، دترمینان  $A$ ) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت:

### نتیجه

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در این صورت وارون ماتریس  $A$  یعنی  $A^{-1}$  از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  مفروض باشد ماتریس  $(A^{-1})^{-1}$  را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تذکر: با توجه به قاعده محاسبه  $A^{-1}$  واضح است که اگر  $|A| = 0$  آنگاه  $A^{-1}$  وجود ندارد. (وارون‌پذیر نیست). به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه  $A^{-1}$  وجود داشته باشد ( $A$  وارون‌پذیر باشد) آن است که  $|A| \neq 0$ .

**مثال:** وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

چون  $|A| = 2 \neq 0$  پس  $A$  دارای وارون است (وارون‌پذیر است) و داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

**قضیه یکتایی وارون:** وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های  $2 \times 2$  محاسبه شده است) در صورت وجود منحصر به فرد است.

**اشارات:** فرض کنیم ماتریس‌های  $B$  و  $C$  هر دو وارون  $A$  باشند ثابت می‌کنیم  $B = C$

طبق فرض  $AB = BA = I$

طبق فرض  $AC = CA = I$

$B = IB = (CA)B = C(AB)$

$= CI = C$

### حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون

یکی از کاربردهای ماتریس و ماتریس وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

دستگاه  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dots + \dots \\ 7x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (1)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ 7x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

معادله ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهول مفروض است.

۱- حال اگر فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$  را ماتریس ضرایب می‌نامیم در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس  $A$  وارون دارد (وارون پذیر است) و در ثانی  $A^{-1}$  را بیابید.

$$|A| = \dots - \dots = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ وارون پذیر است}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

۲- معادله ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در  $A^{-1}$  ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی  $x$  و  $y$  را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{شرکت پذیری} \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$$



در حالت کلی اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب و  $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$  ماتریس مقادیر معلوم و  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و دو مجهول باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله ماتریسی  $AX=B$  نوشته شده و در صورتی که ماتریس  $A$  وارون پذیر باشد یا  $|A| \neq 0$  از ضرب  $A^{-1}$  از چپ در معادله فوق می توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \\ \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

**مثال:** دستگاه  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

**حل:** ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از  $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  و چون  $|A| = 2 \neq 0$  پس  $A^{-1}$  وجود دارد. با جابه جایی درایه های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی ماتریس  $A$  و تقسیم درایه های ماتریس حاصل بر  $|A| = 2$ ، ماتریس  $A^{-1}$  را به دست می آوریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{2} \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس ها}} \begin{cases} x = \dots \\ y = 2 \end{cases}$$

تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، پیدا کردن  $x$  و  $y$  ای است که در هر دو معادله دستگاه که هر کدام معادله یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

## یادآوری

در واقع یک دستگاه دو معادله دو مجهولی از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادله یک خط هستند. لذا با دیدگاه هندسی می توان گفت وقتی صحبت از جواب این دستگاه می کنیم منظور یافتن نقطه ای است که روی هر دو خط واقع شده باشد. بنابراین سه حالت زیر را برای یک دستگاه می توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

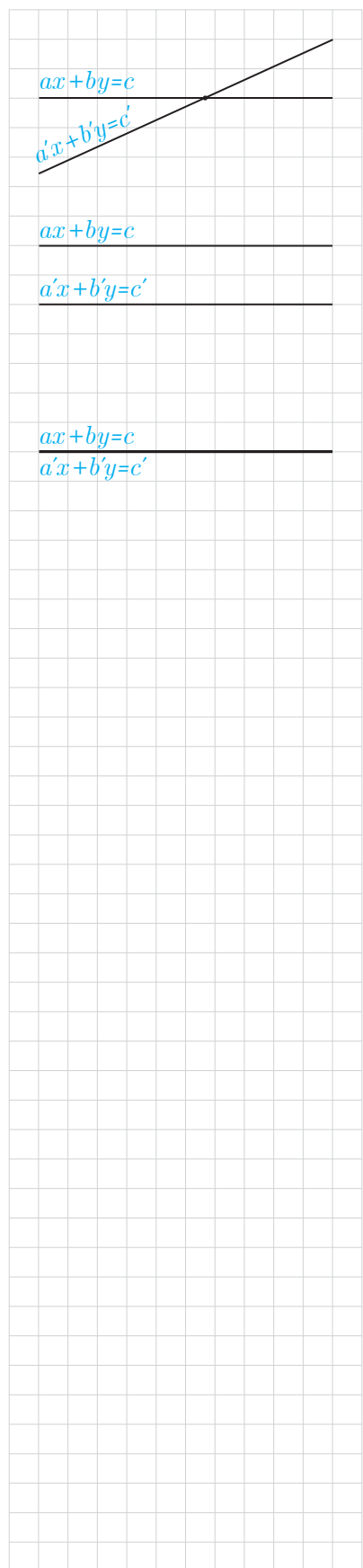
دستگاه معادلات  $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. آیا می توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟ این دو خط نسبت به هم چگونه اند؟

الف) اگر  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$  در این صورت دو خط متقاطع اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد که مانند مثال قبل به دست می‌آید.

ب) اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  در این صورت دو خط موازی اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱-  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  در این حالت دو خط موازی اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۲-  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  در این حالت دو خط موازی اند و روی یکدیگر واقع اند یا به عبارتی هر دو معامله یک خط را نشان می‌دهند؛ لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.



### نتیجه

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$  در نظر بگیریم در این صورت با توجه به الف) و ب) می‌توان گفت:

I) اگر  $|A| \neq 0$  آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است (دو خط متقاطع اند).

II) اگر  $|A| = 0$  در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی اند) و یا اینکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط برهم منطبق هستند).

### کار در کلاس

دستگاه معادلات  $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

۱- هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲- ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ چرا؟

۳- سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه  $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = -6 \end{cases}$  پاسخ داده و اگر  $A$  ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و  $|A| = 0$  برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

## ■ دترمینان و کاربردهای آن

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه: وارون‌پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود. همان‌طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود. دترمینان در هندسه برای محاسبه مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به کار می‌رود. به کمک دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی‌گردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سوئیسی (۱۷۵۲-۱۷۰۴) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

**تعریف:** اگر  $A$  ماتریسی مربعی از مرتبه  $n$  باشد ( $1 \leq n \leq 3$ ) در این صورت دترمینان ماتریس  $A$  را با نماد  $\det(A) = |A|$  نمایش می‌دهیم و داریم:

(ما در این کتاب دترمینان را برای ماتریس‌های حداکثر از مرتبه ۳ تعریف می‌کنیم.)

$$\text{I) } A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k \qquad \text{II) } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$\text{III) } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{برحسب سطر اول } |A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

برای هر ماتریس  $3 \times 3$  دلخواه می‌توان دترمینان  $A$  را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصر به فرد است.

در واقع دترمینان ماتریس‌های  $2 \times 2$  را می‌توان تابعی در نظر گرفت که دامنه آن مجموعه ماتریس‌های  $2 \times 2$  و هم‌دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی یعنی  $\mathbb{R}$  است.

$$\det: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

(منظور از  $M_{2 \times 2}$  مجموعه ماتریس‌های  $2 \times 2$  است.)

**مثال:** دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

الف)  $A = [-7] \rightarrow |A| = -7$

ب)  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \sqrt{2}$

پ)  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = [(4 \times 4) - (2 \times 8)] = 0$

$$\text{ت) } A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1 \cdot 0) - (1 \cdot 2) = -2$$

$$\text{ث) } A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

**مثال:** دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را برحسب یک سطر و یک ستون دلخواه به دست آورید:

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر اول

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (0 - 12) + (0 + 6) + 2 \times (8 + 2) = (-12) + 6 + 20 = 14 \end{aligned}$$

برحسب ستون سوم

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (8 + 2) - 3 \times (4 - 2) + 0 = 20 - 6 = 14 \end{aligned}$$

**تذکر:** همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه یا درایه‌های صفر هستند دترمینان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

$$\text{ب) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر دوم

$$|A| = 0 + 0 + 4 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times (8 - 3) = -20$$

برحسب ستون اول

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-3) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (0 - 16) - 3 \times (-4 - 0) = -32 + 12 = -20 \end{aligned}$$

(درایهٔ ۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایهٔ (۳) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.)

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

### ■ دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های $3 \times 3$

در این روش (فقط برای ماتریس های  $3 \times 3$  قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می نویسیم و  $|A|$  برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی  $A$  و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

**مثال:** دترمینان ماتریس  $A$  را برحسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به دست آورید (کدام روش راحت تر است?).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر سوم

$$|A| = (-1) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -1 \times (9 - 8) + 2(6 - 4) + 1 \times (4 - 3) = -1 + 4 + 1 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{با دستور ساروس } |A| = (4 - 9 - 8) - (-8 - 12 + 3) = -13 + 17 = 4$$

### کاردکلاس

۱- ماتریس های  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  مفروض اند. ماتریس  $A \times B$  را به دست آورده و برقراری تساوی  $|AB| = |A||B|$  را بررسی کنید.

۲- ماتریسی  $3 \times 3$  چون  $A$  بنویسید طوری که  $|A| = -6$ ، سپس ماتریس  $A^2$  را محاسبه و  $|A^2|$  را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در این صورت اعداد حقیقی  $a, b, c$  و  $d$  را چنان بیابید که تساوی  $|A|^2 - 5|A| + 6 = 0$  برقرار باشد.

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A|$  را بر حسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی  $A$ ، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  و اسکالر باشد و  $a_{11} = 4$  در این صورت  $|A|$  را بیابید.

### نتیجه

۱- دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با .....

۲- دترمینان ماتریس مربعی صفر، ..... است.

۴- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد و داشته باشیم  $A = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \circ & \circ \\ \circ & \frac{5}{4} & \circ \\ \circ & \circ & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A|$  را به دست آورید.

### تمرین

۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|AB|$  و  $|BA|$  را به دست آورید.

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & \circ & \circ \\ \circ & -3 & \circ \\ 1 & \circ & -5 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A^2|$  را به دست آورید.

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(|A|^3 - 2)$  را بیابید.

۴- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$  را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵- ماتریسی  $3 \times 3$  چون  $A$  بیاید که  $|A| = 3$ .

۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت  $(2A^{-1} - 3B^{-1})$  را بیابید.

۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  ابتدا ماتریس  $A^{-1}$  را به دست آورده و  $|A|$  را با  $|A^{-1}|$  مقایسه کنید.

۸- الف) ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید

و  $|A|$  و  $|B|$  را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت الف) را برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$  بررسی کنید.

۹- برای ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A$  دو مقدار  $|A|$  و  $|KA|$  را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد و  $|A| = 5$  در این صورت حاصل  $||A|A|$  را بیابید.

۱۱- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب دستگاه بوده و

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

۱۲- به ازای چه مقادیری از  $k$  دستگاه  $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

۱۳- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

$$\text{الف) } \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \text{ب) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$$

