

معادله‌ها و نامعادله‌ها

سد دز، خوزستان



سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینه ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی‌هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

درس اول

سهمی

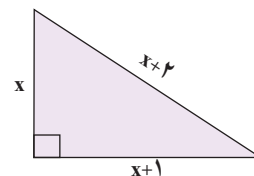
درس دوم

تعیین علامت

درس سوم

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبا بعد از حل یک مسئله هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئله او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟). از خواهر بزرگ‌تر خود، دُرُسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویه دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را x و طول اضلاع دیگر را اعداد متوالی بعد از x ، یعنی $x+1$ و $x+2$ در نظر گرفت و به کمک رابطه فیثاغورس، رابطه زیر را بین سه ضلع مثلث به دست آورد:



$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

اکنون او می‌خواست معادله به دست آمده را حل کند؛ یعنی مقادیری برای x پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این کار معادله بالا را ساده کرد و آن را به شکل $x^2 - 2x - 3 = 0$ نوشت. هر معادله به این صورت را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله درجه دوم می‌نامیم.

هر معادله به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله

درجه دوم می‌نامیم.

در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.



شعاعیت

معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، در نظر بگیرید.

۱ با تجزیه سمت چپ معادله بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x + 1)(x - \dots) = 0$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$AB=0 \Rightarrow A=0 \text{ یا } B=0$$

۲ از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$(x+1)(x-\dots)=0 \Rightarrow x+1=0 \text{ یا } x-\dots=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=\dots$$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$$x = -1$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (-1)^2 - 2(-1) - 3 &= 0 \\ 1 + 2 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$x = \dots$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ ? & \\ \dots &= 0 \\ ? & \\ \dots &= 0 \\ \dots &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً درباره آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

کار در کلاس

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

(ب) $3t^2 - t = 0$

(الف) $x^2 - 3x = 10$

.....
.....
.....

.....
.....
.....

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

فعالیت

معادله درجه دوم $x^2 = 25$ را در نظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به دست آورید.

۲ ریشه‌های دوم عدد ۲۵ را به دست آورید و آنها را با جواب‌های حاصل از تجزیه به دست آورید. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.

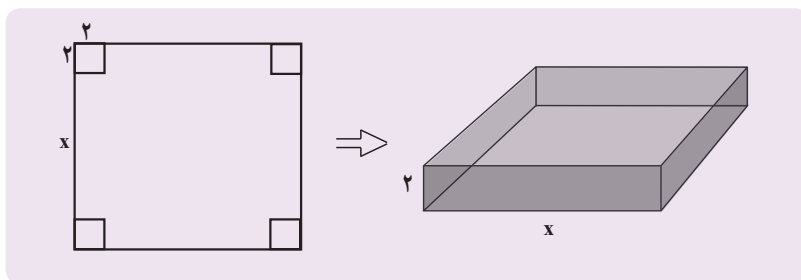
۳ اگر $x^2 = a$ یک معادله درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به صورت $x = \pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ عبارت‌اند از:

$$x = -\sqrt{a} \text{ و } x = \sqrt{a}$$

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحه مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل: از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از:

$$2x^2 = (2)(x)(x) = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول}$$

از آنجا که حجم جعبه، $200 = 2x^2$ سانتی متر مکعب باید باشد، داریم: $x^2 = \dots$ بنابراین $x = \dots$ و با محاسبه ریشه‌های دوم این معادله، جواب‌های $x = \dots$ به دست می‌آید. و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها $x = \dots$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $x + \dots = \dots + \dots = \dots$ سانتی متر است.

کار در کلاس

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به دست آورید.

الف) $5x^2 = 20$ ب) $t^2 + 7 = 0$ پ) $(r - 2)^2 = 16$

.....
.....

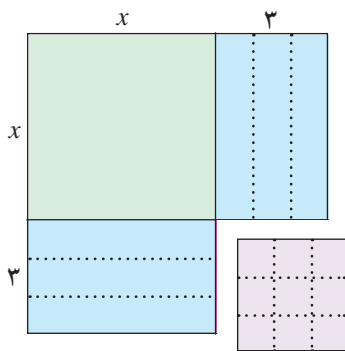
حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

فعالیت

۱ دو جمله‌ای $x^2 + 6x$ را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله‌ای اضافه شود تا چند جمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

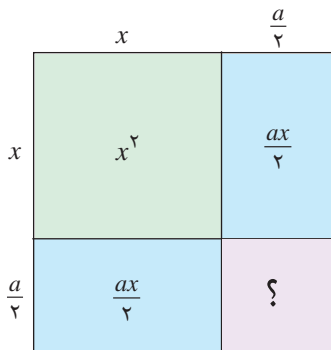
$$x^2 + 6x + \dots = (x + \dots)^2$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید، چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟



۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای $x^2 + ax$ چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x^2 + ax + \dots = (x + \dots)^2$$



مثال

معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ را به روش مربع کامل حل می‌کنیم.

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

معادله درجه دوم

$$x^2 - 6x = -4$$

به دو طرف معادله، -4 را اضافه کرده‌ایم

$$x^2 - 6x + \dots = -4 + \dots$$

به دو طرف معادله \dots را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$(x - 3)^2 = 5$$

سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم

$$x - 3 = \pm \sqrt{5}$$

از دو طرف معادله، ریشه دوم می‌گیریم

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

به دو طرف معادله عدد 3 را اضافه کرده‌ایم

بنابراین جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از $3 + \sqrt{5}$ و $3 - \sqrt{5}$.

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

ت) $2r^2 + r - 2 = 0$

پ) $n^2 - 4n + 5 = 0$

ب) $t^2 + 3t = 3$

الف) $x^2 + 2x = 24$

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

فعالیت

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجه دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش آموز: آیا با روش مربع کامل می‌توان هر معادله درجه دوم را حل کرد؟
معلم: بله. برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ به دو طرف معادله، ... را اضافه کرده‌ایم

$x^2 + \frac{b}{a}x + \dots = -\frac{c}{a} + \dots$ به دو طرف معادله، ... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ دو طرف را ساده کرده‌ایم

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta = b^2 - 4ac$ ؛ پس: $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

آیا می‌توانید با ریشه دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به دست آورید؟

دانش آموز: اگر $\Delta < 0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشه دوم گرفت.

معلم: آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادله درجه دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta > 0$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به دست آورید؟

دانش آموز: بله. کافی است از دو طرف معادله $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ ریشه دوم بگیریم:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

دانش آموز: اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟
 معلم: بله و این ریشه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

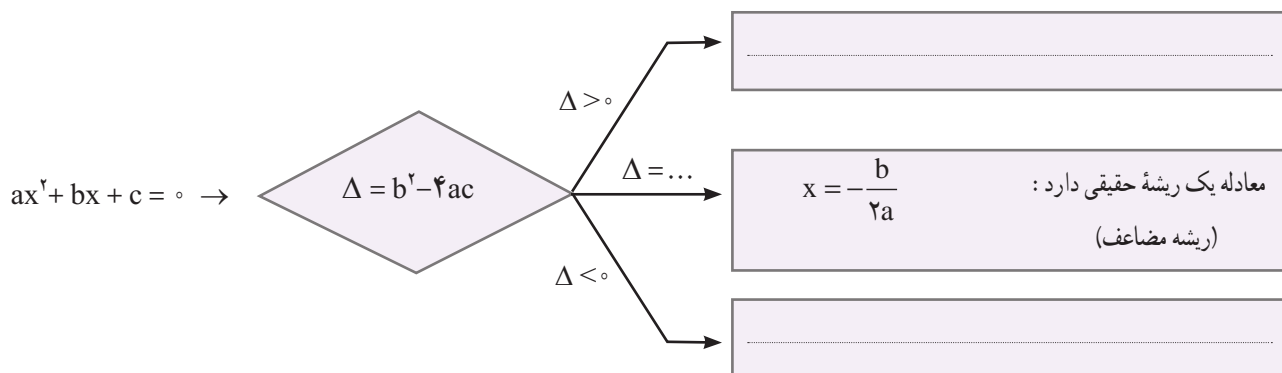
دانش آموز: پس در حالت $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.

معلم: این ریشه از معادله $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ به دست آمده است و چون

هر دو معادله $x + \frac{b}{2a} = 0$ و $x + \frac{b}{2a} = 0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشه مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه دوم می‌گوییم.

کار در کلاس

۱ با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.



شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

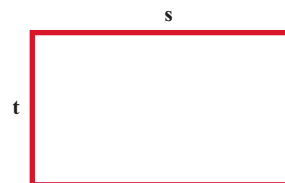
۲ معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

ب) $-2x^2 + x + 3 = 0$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

مثال



از یک رشته سیم به طول ۵ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵ متر است، پس $2(s+t) = 5$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t = 2.5$ می‌رسیم؛ بنابراین $t = 2.5 - s$.

از سوی دیگر $st = 144$. با جای‌گذاری t برحسب s در این معادله به شکل $s(2.5 - s) = 144$ می‌رسیم که بعد از ساده شدن، معادله درجه دوم $s^2 - 2.5s + 144 = 0$ به دست می‌آید.

در این معادله $a = 1$, $b = -2.5$, $c = 144$ ؛ بنابراین

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2.5)^2 - 4(1)(144) = 6.25 - 576 = -569.75$$

پس $\Delta < 0$ و معادله دو ریشه حقیقی دارد که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2.5 \pm \sqrt{-569.75}}{2} = \frac{2.5 \pm 23.87}{2} \\ s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2.5 - \sqrt{-569.75}}{2} = \frac{2.5 - 23.87}{2} = -10.68 \end{cases}$$

و چون $t = 2.5 - s$ ، پس برای t نیز دو جواب به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_1 = 16 \Rightarrow t_1 = 2.5 - 16 = -13.5 \\ s_2 = -10.68 \Rightarrow t_2 = 2.5 - (-10.68) = 13.18 \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۱۶ سانتی‌متر به دست می‌آید.

تمرین

۱) معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^2 - 11x = -10$

۲) $5t^2 = 20$

۳) $5a^2 - 7a = 2a(a - 3)$

۴) $4k^2 - 12k + 8 = 0$

۲) هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^2 - 2 = 26$

۲) $x^2 + 12 = 3$

۳) $(3t - 2)^2 = 4$

۴) $3 - 3k = 3k(2k - 1)$

۳) معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^2 - 6x = 7$

۲) $s^2 - 3s + 3 = 0$

۳) $r^2 + 4r + 4 = 0$

۴) $2a^2 + 5a - 3 = 0$

۴ هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $4x^2 - 13x + 3 = 0$

۲) $r - r^2 = 3$

۳) $a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$

۴) $\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0$

۵ هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

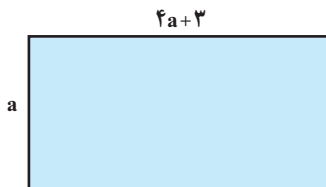
۱) $2x^2 = 250$

۲) $9 - 6z + z^2 = 0$

۳) $4a^2 + 3a = 1$

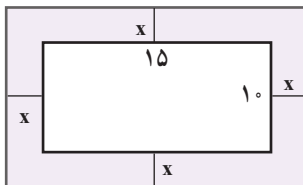
۴) $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی 29° است. این دو عدد را پیدا کنید.



۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها 60° شود، سن هر کدام چقدر است؟



۹ یک عکس به اندازه 10° در 15° سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت 300° سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به دست آورید.



۱۱ فشار خون نرمال^۱ یک شخص مذکر، که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطه $P = 0.006s^2 - 0.02s + 120$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن 125 میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

۱- منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

درس دوم: سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی‌باز یا موتورسوار در مسابقه پرش ارتفاع می‌پیماید، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند.
مسیر طی شده توسط اسکی‌باز یا موتورسوار می‌تواند توسط معادله $y = ax^2 + bx + c$ محاسبه شود که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a \neq 0$ است.

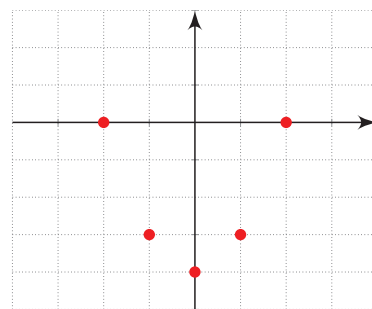


فعالیت

معادله $y = x^2 - 4$ را در نظر بگیرید.

الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

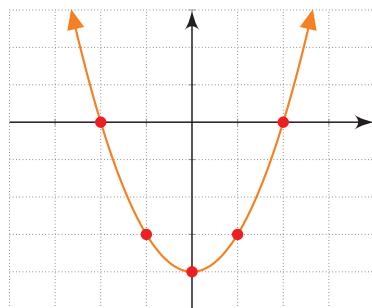
x	$y = x^2 - 4$	(x,y)
-2	$y = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	(-2, 0)
-1
0	$y = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$	(0, -4)
1
2



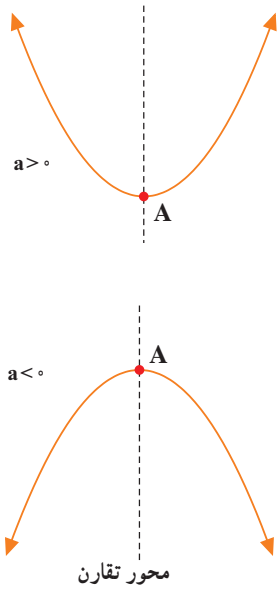
نقاط به دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).

ب) پایین‌ترین نقطه این نمودار چه نقطه‌ای است؟ آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟

پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟



ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور x ها در چه نقاطی است؟



نمودار هر معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است:

نقطه A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم. اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

فعالیت

معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است.

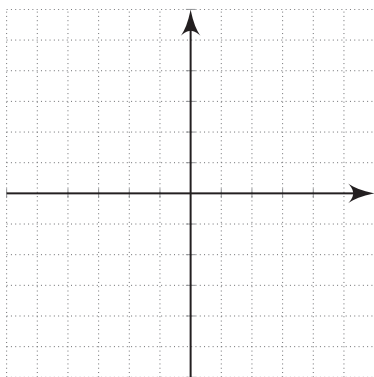
الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + \dots$$

ب) ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

x	$y = x^2 - 4x + 5$	(x,y)
0
1
2
3
4



پ) پنج نقطه حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

ت) آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطه این سهمی را از معادله آن به شکل $y = (x - 2)^2 + 1$ به دست آورید؟

هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

کار در کلاس

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y = (x+1)^2 - 2$ ب) $y = -2x^2 + 1$

فعالیت

معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{2a}$ است.

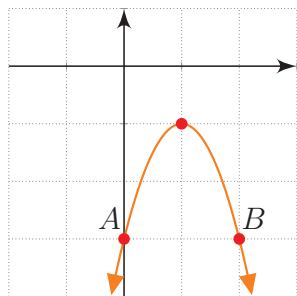
مثال

سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ را رسم می‌کنیم.

در این سهمی $a = -2$ ، $b = 4$ و $c = -3$ است. مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.



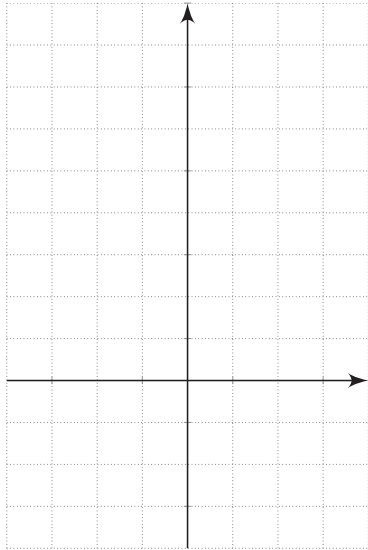
x	$y = -2x^2 + 4x - 3$	(x, y)
0	$-2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$	(0, -3)
1	$-2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$	(1, -1)
2	$-2(2)^2 + 4(2) - 3 = -3$	(2, -3)

بنابراین نمودار این سهمی به صورت مقابل خواهد بود.

دقت کنید نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط $x=1$

قرینه‌اند.

۱- عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4a}$ را می‌توانید از قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله سهمی به دست آورید.



معادله دو سهمی به صورت $y = \frac{x^2}{2} + 1$ و $y = 2x^2 + 1$ است.

الف مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطه $A(0, 1)$ است.

x	$y = 2x^2 + 1$	(x,y)

x	$y = \frac{x^2}{2} + 1$	(x,y)

ب معادله سهمی دیگری را که نقطه A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

تمرین

۱ نمودار هر یک از سهمی های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -(x+1)^2 - 3$

ب) $y = 3x^2 - 2$

پ) $y = x - x^2$

ت) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$

۲ اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

۳ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۴ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه های خود را با زاویه های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده اند. پرتابگر A ، زاویه α را انتخاب می کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می آید. پرتابگر B نیز زاویه β را انتخاب می کند و مسیر

طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور x ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

طوف سی سخت - کهگیلویه و بویر احمد



درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطه $P(x) = 5x - 200$ به دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

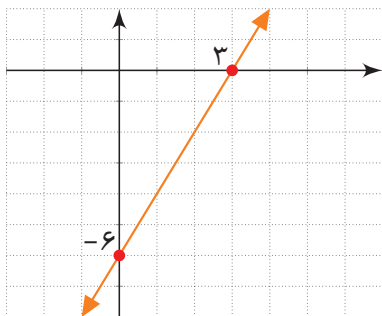
تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله $P(x) = 5x - 200$	-۱۵۰	-۱۰۰	۰	۵۰	۳۰۰

همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعداد کالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت $P(x)$ برای x های مختلف از جدول زیر به دست می‌آید.

x	$x < 40$	۴۰	$x > 40$
$P(x)$	-	۰	+

حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه اول



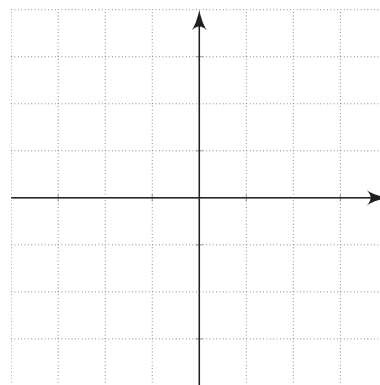
فعالیت

۱ نمودار خط $y = 2x - 6$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

x	$x < 3$	۳	$x > 3$
$y = 2x - 6$	۰

۲ نمودار خط $y = -2x + 6$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای x های مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.

x	$x < \dots$	\dots	$x > \dots$
$y = -2x + 6$	°



۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

۴ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$ ، برای x های مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	°	موافق علامت a

مثال

عبارت $y = 5x - 2$ را تعیین علامت می‌کنیم.
 ریشه عبارت $5x - 2 = 0$ از معادله $5x - 2 = 0$ به دست می‌آید که برابر $x = \frac{2}{5}$ است.
 با توجه به اینکه علامت ضریب x ؛ یعنی $a = 5$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x	$x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$x > \frac{2}{5}$
$y = 5x - 2$	-	°	+

مقدار y را برای $x = 3$ و $x = -1$ به دست آورید و صحت علامت اعداد به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

علامت عبارت $A = (2x-1)(3-x)$ را برای x های مختلف تعیین می کنیم.
جدول تعیین علامت برای هر کدام از عبارت های $2x-1$ و $3-x$ به صورت زیر است:

x	$x < 3$	3	$x > 3$	x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$3-x$	+	°	-	$2x-1$	-	°	+

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به صورت زیر می نویسیم:

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 3$	3	$x > 3$
$2x-1$	-	°	+	+	+
$3-x$	+	+	+	°	-

بنابراین در سه ناحیه بالا که با رنگ های مختلف نشان داده شده، علامت هر کدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x > 3$ ، عبارت $2x-1$ ، مثبت است؛ ولی $3-x$ منفی می باشد، پس علامت عبارت حاصل ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیه دیگر، جدول تعیین علامت $A = (2x-1)(3-x)$ به صورت زیر است^۱.

x	$\frac{1}{2}$	3			
$2x-1$	-	°	+	+	
$3-x$	+	+	°	-	
A	-	°	+	°	-

دقت کنید که روی ستون ها نیز قاعده ضرب انجام شده است.
مقدار A را برای $x = 4$ و $x = 0$ به دست آورید و صحت علامت مقادیر به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

کار در کلاس

هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$B = (2x-3)^2$ **ب**

$A = (3x+1)(x-2)$ **الف**

$D = \frac{x-1}{5-2x}$ **ت**

$C = x^2(7-x)$ **پ**

۱- از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف نظر می کنیم.

۲- تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجه مشابهی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{b}$ قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می گوئیم. ($a \in \mathbb{R}$)

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

چند جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ است. برای حل معادله $P(x) = 0$ به شیوه مربع کامل، $P(x)$ را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم.

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

که در آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ فرض کنید که معادله $P(x) = 0$ ، دو ریشه متمایز x_1 و x_2 ($x_1 < x_2$) داشته و به شکل $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x	x_1	x_2
$x - x_1$	-	+
$x - x_2$
$(x - x_1)(x - x_2)$
$P(x)$...	مخالف علامت a

۲ اگر معادله $P(x) = 0$ ریشه مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x) = a(x - x_1)^2$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x	x_1
$(x - x_1)^2$...
$P(x)$...

۳ اکنون فرض کنید $\Delta < 0$ باشد، در این صورت معادله $P(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$...

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.

مثال

عبارت $A = 2x^2 - x - 3$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادله $A = 0$ را در صورت وجود، به دست می‌آوریم.

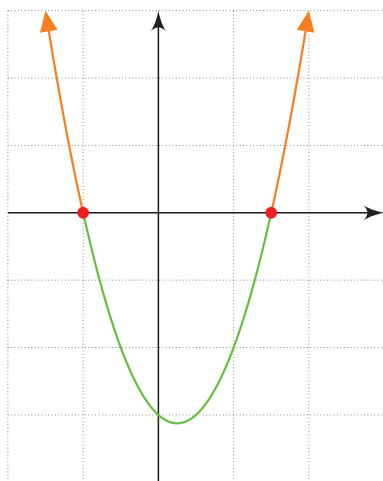
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25$$

پس معادله $A = 0$ دو ریشه متمایز به صورت زیر دارد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{4} = -1$$

با توجه به اینکه $a = 2$ است، بنابراین علامت $P(x)$ طبق فعالیت بالا به صورت زیر مشخص می‌شود:

x		-1		$\frac{3}{2}$		
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$



نمودار سهمی $y = 2x^2 - x - 3$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت y را برای x های مختلف تعیین کرد. برای $x > \frac{3}{2}$ و $x < -1$ ، نمودار بالای محور x هاست؛ پس y علامت مثبت دارد و برای $-1 < x < \frac{3}{2}$ ، نمودار پایین محور x هاست؛ پس علامت y منفی است.

مثال

عبارت $P(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هریک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

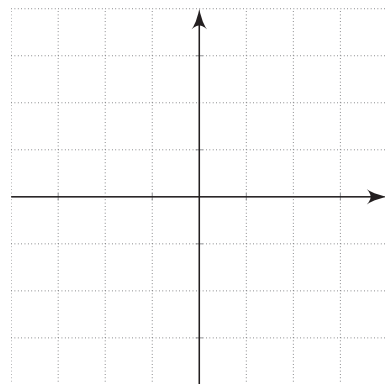
$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2 \text{ یا } x=1 \end{cases}$$

x		-2	0	1	3	
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-3)^2$		$+$	$+$	$+$	$+$	0
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)$		$-$	$+$	0	$-$	$+$

تعریف نشده
تعریف نشده

کار در کلاس

۱ چند جمله‌ای $y = -x^2 + x + 2$ را با محاسبه ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.



۲ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

ب) $B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

الف) $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به‌صورت زیرند:

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچک‌تر از B است.
$A \leq B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.
$A > B$	A بزرگ‌تر از B است.
$A \geq B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

۱- خاصیت جمع:

برای عبارت‌های جبری A، B، C و $A < B$ سپس $A + C < B + C$.

۲- خاصیت ضرب

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$ سپس $AC > BC$.

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$ سپس $AC < BC$.

نامعادله $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل می‌کنیم.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

$$2x - 1 \geq -7$$

$$2x \geq -6$$

$$x \geq -3$$

به دو طرف نامعادله، $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$ که با نماد بازه به شکل $[-3, +\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است:

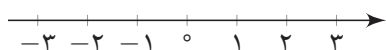


فعالیت

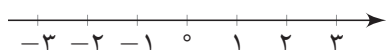
فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$-2 < 3x - 1, 3x - 1 \leq 8$$

۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.

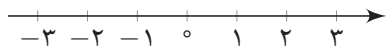


$$-2 < 3x - 1 \Rightarrow \dots\dots\dots$$



$$3x - 1 \leq 8 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

به خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



۲ می‌توانیم دو نامعادله فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادله دوگانه به صورت $-2 < 3x - 1 \leq 8$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادله دوگانه را حل کنید:

به دو نامعادله $+1$ را اضافه می‌کنیم. $-2 < 3x - 1 \leq 8$

دو نامعادله را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم. $\dots < 3x \leq 9$

$\dots < x \leq \dots$

جواب به دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید. نامعادله دوگانه فوق را به صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} 3x - 1 > -2 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجه فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به صورت $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $15 \leq C \leq 25$ ؛ سپس از رابطه داده شده، C را برحسب F بنویسید و نامعادله دوگانه به دست آمده را حل کنید.)

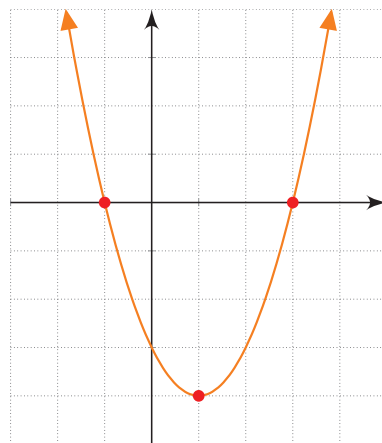
فعالیت

سهمی $y = x^2 - 2x - 3$ را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

الف به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور x هاست؟

ب جدول تعیین علامت عبارت $y = x^2 - 2x - 3$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه

مقادیری از x، علامت y منفی است؟



پ نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به دست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب

می‌توان برای حل نامعادله $x^2 - 2x - 3 < 0$ استفاده کرد.

کار در کلاس

هریک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف $x^2 \leq 4$

ب $3x^2 - x - 2 \geq 0$

مثال

برای چه مقادیری از m، عبارت $y = x^2 + mx + 1$ همواره مثبت است؟

حل: از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مقدار

مثبت داشته باشد، باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد. در این عبارت، $a = 1$ و $\Delta = m^2 - 4$ است؛

بنابراین $m^2 - 4 < 0$ است.

جدول تعیین علامت، برای $m^2 - 4$ به صورت زیر است:

m	-۲		۲	
$m^2 - 4$	+	۰	-	۰
				+

بنابراین برای اینکه $m^2 - 4$ منفی باشد، باید $-2 < m < 2$.

نامعادله $\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$ را حل می‌کنیم.

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای این کار ریشه‌های صورت و مخرج این کسر را پیدا می‌کنیم. ریشه‌های معادله $x^2-9=0$ ، اعداد ± 3 هستند و ریشه معادله $2x+1=0$ ، عدد $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x	-3	$-\frac{1}{2}$	3
x^2-9	+ ◦ -	-	- ◦ +
$2x+1$	-	- ◦ +	+
$\frac{x^2-9}{2x+1}$	- ◦ +	-	- ◦ +

تعریف نشده

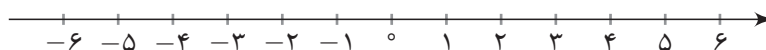
بنابراین اگر $-\frac{1}{2} < x < 3$ و یا $x \geq 3$ ، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $[-\frac{1}{2}, 3) \cup [3, +\infty)$.

نامعادله‌های قدر مطلق

می‌دانیم که $|x|$ همان فاصله x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $|3| = 3$ و $|-3| = 3$ زیرا فاصله هر دو عدد 3 و -3 از مبدأ برابر 3 است.

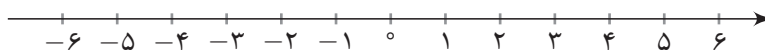
فعالیت

۱) نامعادله $|x| \leq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی 3 باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعه مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۲) نامعادله $|x| \geq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی 3 باشند. این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\begin{cases} |x| \leq 3 \Rightarrow \dots \leq x \leq \dots \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \\ |x| \geq 3 \Rightarrow x \leq \dots \text{ یا } x \geq \dots \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \end{cases}$$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت^۱

۱- اگر $|u| \leq a$ آن‌گاه $-a \leq u \leq a$.

۲- اگر $|u| \geq a$ آن‌گاه $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.

الف $|x - 3| \leq 2$

ب $|2x - 1| > 5$

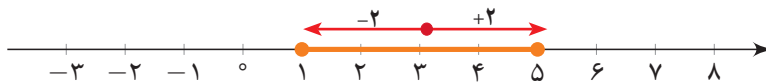
برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می‌کنیم: $-2 \leq x - 3 \leq 2$ اکنون داریم:

$$-2 \leq x - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $[1, 5]$ است و نمایش هندسی آن به صورت زیر است.



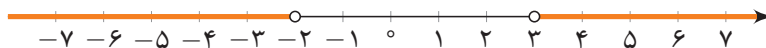
برای حل نامعادله $|x - 3| \leq 2$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[1, 5]$ ، مطابق شکل زیر به دست می‌آید.



برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$|2x - 1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x - 1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱- در هریک از این نامعادله‌ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

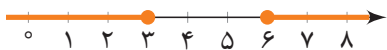
۱ در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $|\frac{x}{3} + 1| < \frac{2}{3}$

ب) $|5 - 2x| \geq 1$



۲ یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه (۱، ۹) باشد.



۳ یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.

تمرین

۱ در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$

ث) $x(x^2 + 4) < 0$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

ج) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$

پ) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$

چ) $|7 - 2x| < 1$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

ح) $|\frac{x-1}{2} - 1| \geq 3$

۲ به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

۳ به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$

به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از 110 بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟