

معادلات گویا و گنگ

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله



در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟ برای حل این مسئله سه حالت مختلف فرض می‌کنیم. ممکن است نمک به اندازه کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول: فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول ۴ درصدی چند کیلوگرم نمک وجود دارد:

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ کیلوگرم}$$

حالا اگر بخواهیم برای رساندن این محلول به محلول ۷ درصدی x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم، وزن نمک $x+8$ و وزن کل محلول $200+x$ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{x+8}{200+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید ۷ درصد باشد تناسب زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{x+8}{200+x} = \frac{7}{100}$$

برای حل این معادله که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $100(200+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$100(x+8) = 7(200+x)$$

از حل این معادله خواهیم داشت: $93x = 600$ و در نتیجه $x = \frac{600}{93}$

بنابراین تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم نمک باید به محلول اضافه شود تا محلول ۷ درصد نمک به دست آید.

حالت دوم: اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم تا درصد نمک محلول خودبه‌خود به ۷ برسد. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

از حل این معادله خواهیم داشت $7(200-y) = 800$ و از آنجا $y = \frac{600}{7}$ و این بدین معنی است که کارگر باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسد.

کارد کلاس

در مسئله ماهی‌های تزئینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازه کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

❖ **مثال:** معادله $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$ را حل کنید.

❖ **حل:** کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $x(x^2-4)$ است. (چرا؟)

با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم:

$$3x(x-2) + 2(x^2-4) = x(4x-4)$$

$$3x^2 - 6x + 2x^2 - 8 = 4x^2 - 4x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -2$$

البته جواب $x = -2$ مورد قبول نیست. (چرا؟)

خواندنی

در ریاضیات هنگامی نسبت طلایی پدید می‌آید که نسبت بخش بزرگ‌تر به بخش کوچک‌تر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگ‌تر باشد.

تعبیر هندسی آن چنین است. طول مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طولش باشد.

مصریان سال‌ها قبل از میلاد از این نسبت آگاه بودند و آن را در ساخت اهرام رعایت کرده‌اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان نیز این نسبت را دارا هستند.

روان‌شناسان بر این باورند که زیباترین مستطیل به چشم انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه چشم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم زیبا می‌آید.

در ساخت برج میدان آزادی تهران به ارتفاع ۶۲ و عرض ۴۲ متر نسبت طلایی تا حد زیادی رعایت شده است.

کتیبه بیستون از دوره هخامنشی در کرمانشاه به طول ۵ و عرض ۳ متر به عدد طلایی نزدیک است.

یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین‌طور نسبت ارتفاع ستون‌ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است.

در پل ورسک، ارگ بم، مقبره ابن‌سینا، میدان نقش جهان، مسجد شیخ لطف‌الله و خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جست‌وجوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می‌یابید.

منبع: مبانی هنرهای تجسمی، قسمت اول، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۲

کارد کلاس

۱ معادله $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$ را حل کنید.

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم: $\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

مسجد شیخ لطف‌الله

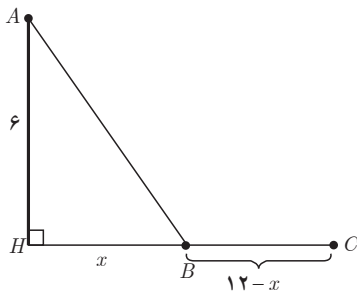
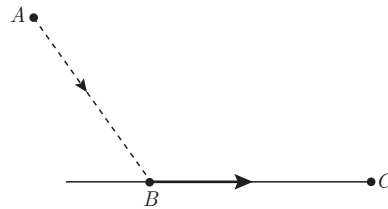


معادلات شامل عبارات های گنگ

طرح یک مسئله



معمولاً مرغ‌های دریایی، برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌آید سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از C باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



❖ حل: برای درک بهتر صورت مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصله B از تصویر مرغ بر روی آب (H) را x می‌گیریم در نتیجه فاصله میان B و C برابر $12-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{36+x^2}$ می‌شود.

$$14\sqrt{36+x^2} + 10(12-x)$$

میزان انرژی مصرف شده توسط مرغ دریایی برابر است با:

برای آنکه مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم:

$$14\sqrt{36+x^2} + 120 - 10x = 180 \Rightarrow 14\sqrt{36+x^2} = 10x + 60$$

$$7\sqrt{36+x^2} = 5x + 30$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $2x^2 - 25x + 72 = 0$ می‌رسیم که از آنجا $x = 8$ یا

$x = 4/5$. در این صورت فاصله B تا C برابر $12 - 8 = 4$ یا $12 - 4/5 = 7/5$ خواهد بود.

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟

آیا اقدام مرغ دریایی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟!

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

❖ **مثال:** معادله $\sqrt{x+2} = x-4$ را حل کنید.

❖ **حل:**

$$(\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2$$

$$x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ و } x=7$$

آزمایش جواب‌ها

$$x_2 = 7: \sqrt{7+2} \stackrel{?}{=} 7-4$$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

جواب معادله است

بنابراین $x=7$ تنها جواب معادله است.

$$x_1 = 2: \sqrt{2+2} \stackrel{?}{=} 2-4$$

$$2 \neq -2 \quad \times$$

جواب مسئله نیست

❖ **تذکر:** در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به دست آوردن دامنه تعریف داریم:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x \geq 4$$

کاردرکلاس

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

۲ معادله $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x-2} = 0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز

می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

معادلات زیر را حل کنید.

$$۱ \quad \frac{۶}{x} = ۲ + \frac{x-۳}{x+۱}$$

$$۲ \quad \frac{P}{۲-P} + \frac{۲}{P} = \frac{-۳}{۲}$$

$$۳ \quad \frac{۳y+۵}{y^۲+۵y} + \frac{y+۴}{y+۵} = \frac{y+۱}{y}$$

$$۴ \quad ۲\sqrt{x} = \sqrt{۳x+۴}$$

$$۵ \quad \frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} = ۱-x$$

$$۶ \quad \frac{۵}{\sqrt{x+۲}} = ۲ - \frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$$

$$۷ \quad \sqrt{x+۳} + \sqrt{۳x+۱} = ۴$$

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

۹ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



رودخانه اروند (استان خوزستان)

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدید. همان‌طور که می‌دانید قدر مطلق عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$$

کاردرکلاس

۱ حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-5 - (-3)| =$

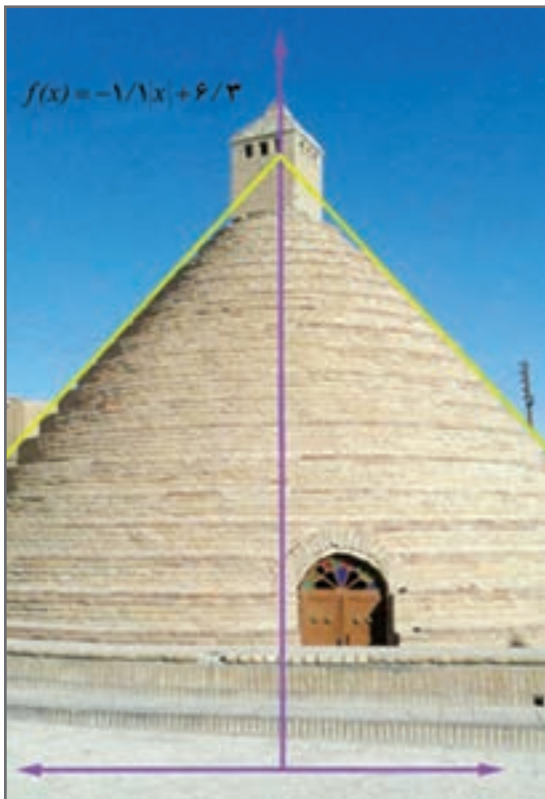
ب) $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| =$

پ) $\left|1/5 - 1/2\right| =$

۲ عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = \sqrt{(\dots + \dots)^2} = \dots$

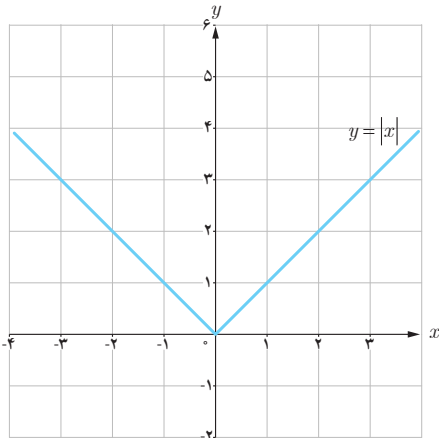
ب) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \dots)^2} =$



آب انبار - روستای بیابانک (استان سمنان)

رسم توابع قدر مطلق

فعالیت



شکل (۱)

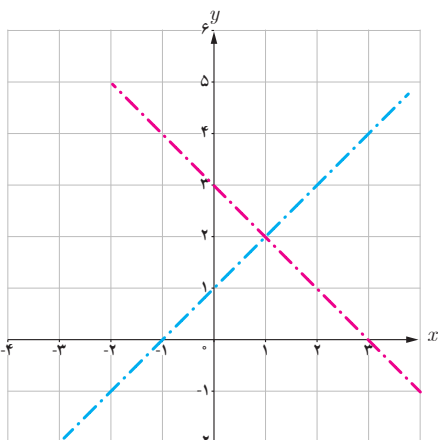
می‌خواهیم نمودار تابع $y = |x-1| + 2$ را رسم کنیم.

روش اول: با توجه به نمودار $y = |x|$ در شکل (۱) و استفاده از انتقال منحنی، نمودار آن را رسم کنید.

روش دوم: گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

$$y = |x-1| + 2 = \begin{cases} & , x \geq 1 \\ & , x < 1 \end{cases}$$

گام دوم؛ با توجه به شکل (۲) نمودار y را رسم کنید.



شکل (۲)

❁ **مثال:** نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = |x-1| + |x+2|$ را رسم کنید.
 ❁ **حل:** در اینجا نمی‌توانیم از رسم تابع $y = |x|$ و انتقال استفاده کنیم. بنابراین از روش تعیین علامت عبارت‌های داخل قدر مطلق‌ها کمک می‌گیریم. برای این کار ابتدا عبارت‌های داخل قدر مطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x	-2	1	
$x-1$	-	-	+
$x+2$	-	+	+

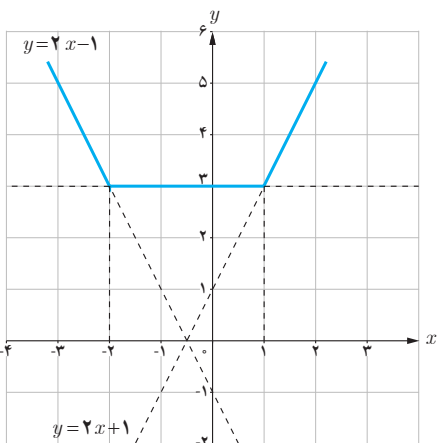
$$f(x) = (x-1) + (x+2) = 2x+1$$

$$f(x) = -(x-1) + (x+2) = 3$$

$$f(x) = -(x-1) - (x+2) = -2x-1$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1, & x < -2 \\ 3, & -2 \leq x \leq 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$$

نمودار تابع از سه قسمت که هر یک بخشی از یک خط هستند تشکیل می‌شود (شکل ۳).



شکل (۳)

ویژگی های قدر مطلق

در سال های قبل با برخی از ویژگی های قدر مطلق آشنا شده اید که عبارت اند از :

الف) $ x \geq 0$	ب) $\sqrt{x^2} = x $
پ) $ x = a \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$ ($a \geq 0$)	ت) $ x = a \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$
ث) $ -x = x $	ج) $ x ^2 = x^2$

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند.

$$|ab| = |a| |b|$$

۱ از رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که :

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

۲ با فرض $b \neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که :

فعالیت

۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

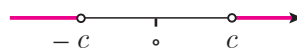
الف) $|x| < c, (c \neq 0)$ (۱)



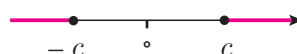
ب) $|x| > c$ (۲)



پ) $|x| \leq c$ (۳)



ت) $|x| \geq c$ (۴)



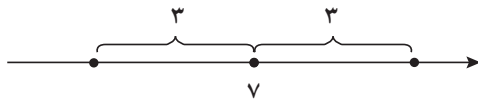
۲ برای هر عدد حقیقی a نشان دهید که : $-|a| \leq a \leq |a|$

۳ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید که : $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

۴ با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید : $|a+b| \leq |a| + |b|$

معادلات قدر مطلق

حل یک مسئله



بر روی محور اعداد حقیقی فاصله چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟
برای حل مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم.
اگر طول نقطه جواب مسئله را x بنامیم، شرط مسئله به این معناست که $|x-7|=3$. با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق خواهیم دانست $x-7=\pm 3$ ، و در نتیجه $x=10$ و $x=4$ ؛ و هر دو جواب‌های معادله هستند.

جواب‌های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند معادلات قدر مطلق می‌گویند.

❖ **مثال:** معادله $|3x-2|=|x-4|$ را حل کنید.

روش اول: با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق: جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادله $3x-2=x-4$ و $3x-2=-(x-4)$ هستند که، به ترتیب، عبارت‌اند از:

$$x=-1 \text{ و } x=\frac{3}{4}$$

روش دوم: با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $x^2-8x+16=x^2-12x+4=9x^2-12x+4$ ؛ و از آنجا $2x^2-x-3=0$.
جواب‌های این معادله -1 و $\frac{3}{4}$ هستند.

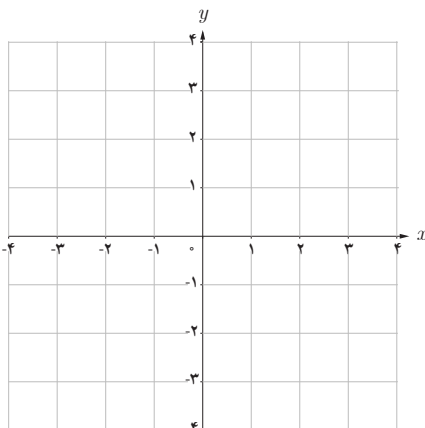
کارد کلاس

معادله قدر مطلق $|x-1|=4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید.

۱ روش اول: (با استفاده از تعریف قدر مطلق)

$$|x-1| = \begin{cases} \dots, & x \geq 1 \\ \dots, & x < 1 \end{cases}$$

{ مجموعه جواب، $x < 1 \Rightarrow \dots$ ، حالت دوم: $x = \frac{5}{4}$ ، حالت اول: $x \geq 1 \Rightarrow x-1=4-3x \Rightarrow x = \frac{5}{4}$ }



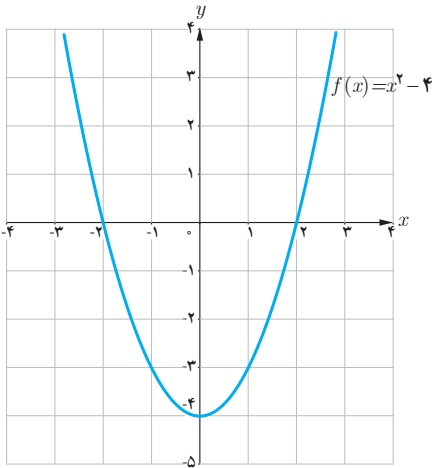
۲ روش دوم: (روش هندسی)

الف) توابع $y=|x-1|$ و $y=4-3x$ را رسم کنید.

ب) طول‌های محل تلاقی دو نمودار را مشخص کنید.

پ) جواب‌های معادله را به دست آورید.

۳ روش سوم: (به توان رساندن طرفین)



در شکل روبه‌رو نمودار تابعی با ضابطه $f(x) = x^2 - 4$ آمده است.

۱ با توجه به علامت عبارت $x^2 - 4$ و استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع $y = |x^2 - 4|$ را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

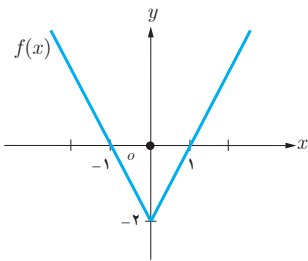
۲ نمودار $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.

۳ تابع $y = |f(x)|$ را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای بنویسید.

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & , f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , f(x) < 0 \end{cases}$$

۴ با توجه به قسمت‌های قبل یک روش رسم برای تابع $y = |f(x)|$ از روی نمودار $y = f(x)$ بیان کنید.

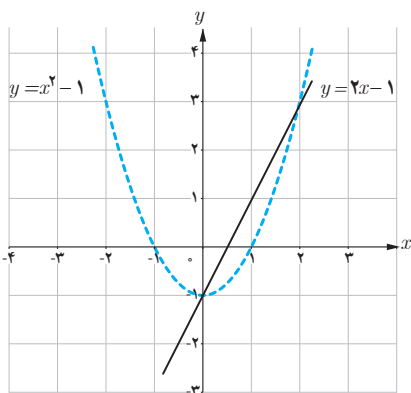
۵ در شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = |f(x)|$ را از روی نمودار تابع $y = f(x)$ رسم کنید.



با توجه به فعالیت بالا :

۱ نمودار $y = -f(x)$ قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x هاست.

۲ برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست، تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y = |2x - 1|$ و $y = x^2 - 1$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به دست آورید.

۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را حل کنید.

$$|x^2 - 1| = |2x - 1| \begin{cases} \text{حالت اول} & x^2 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2 \\ \text{حالت دوم} & x^2 - 1 = -(2x - 1) \Rightarrow \dots \end{cases}$$

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x) = x|x|$

ب) $g(x) = |x^2 - 1|$

پ) $h(x) = |x - 1| + |x + 1|$

۲ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های -1 و 3 روی محور x ها برابر 6 باشد؟

۳ هریک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و 3 برابر 7 است.

ب) دو برابر فاصله بین x و 6 برابر 4 است.

پ) فاصله بین x و -3 بزرگ‌تر از 2 است.

۴ دو معادلهٔ زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$

ب) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

۵ نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y = 3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

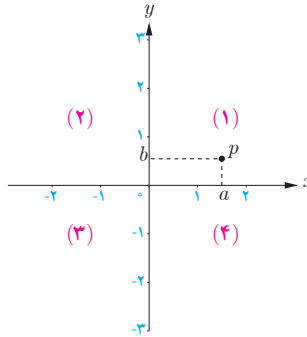
الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب) $y = |x^2 - 6x|$

۶ نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۷ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.

آشنایی با هندسه تحلیلی



در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

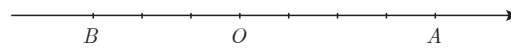
به هر نقطه P در صفحه مختصات یک زوج مرتب (a, b) نظیر می‌شود. به این زوج مختصات نقطه P گفته می‌شود. طول نقطه P را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می‌دهیم. در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحه مختصات آشنا می‌شویم.

فاصله بین دو نقطه

فعالیت

روی محور اعداد زیر به مبدأ O ، نقطه متناظر با 4 را با A و نقطه متناظر با -3 را با B مشخص کرده‌ایم؛

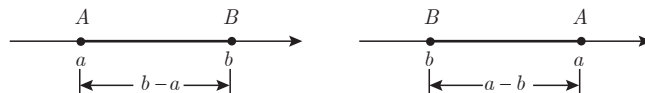
۱ طول پاره خط‌های OA و OB چقدر است؟



۲ طول پاره خط BA چقدر است؟

۳ فاصله دو نقطه A و B متناظر با 4 و (-3) از یکدیگر چقدر است؟

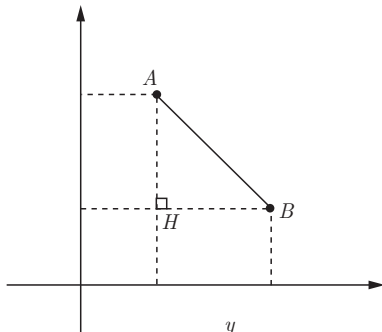
۴ بر روی هریک از دو محور زیر، در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟



خواندنی

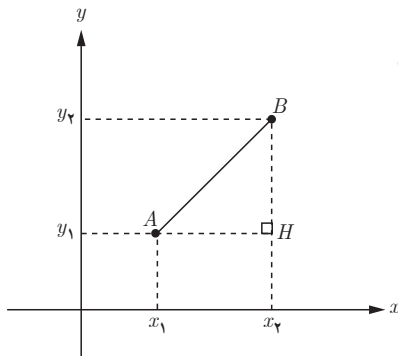
هندسه تحلیلی شاخه‌ای از ریاضیات است که از ترکیب هندسه و جبر مقدماتی به وجود آمده است. در این رشته اشکال هندسی و روابط بین آنها را با مقادیر و معادلات عددی و جبری بیان می‌کنند. بنیان‌گذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما در قرن ۱۷ میلادی بوده‌اند. این رشته در مورد اندازه، فاصله، زاویه و فرمول‌های مربوط به آن بحث می‌کند.

اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به صورت $|AB| = |x_B - x_A|$ تعریف می‌کنیم.



۱ دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(6, 3)$ را، در شکل روبه‌رو، در نظر بگیرید: الف) روی محور افقی x_A و x_B و روی محور عمودی y_A و y_B را مشخص کنید.

ب) در مثل قائم‌الزاویه AHB ($\hat{H} = 90^\circ$) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول پاره خط AB را به دست آورید.



۲ در شکل روبه‌رو، اگر دو نقطه دلخواه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول AB را محاسبه کنید. در صفحه مختصات باشند، طول AB را محاسبه کنید.

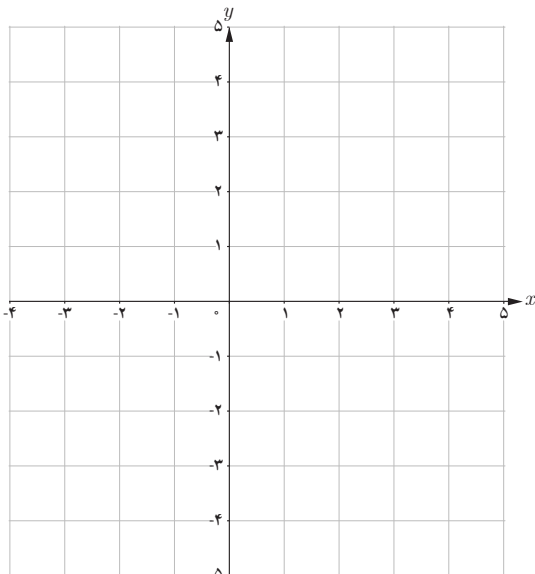
$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AB^2 = \dots$$

$$AB = \sqrt{\dots}$$

به طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



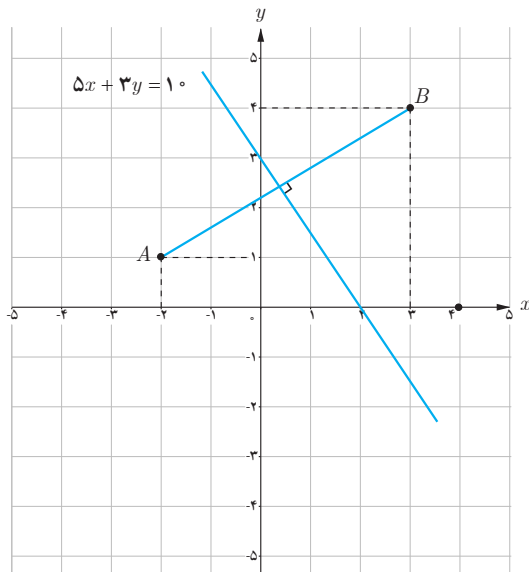
سه نقطه $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC ، در صفحه مختصات روبه‌رو، هستند. الف) مثلث را رسم کنید. ب) طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ت) شیب دو خط AB و AC را به دست آورید. چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

❖ **مثال:** در شکل زیر، معادله عمودمنصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ را به هم وصل کرده است.
 ❖ **حل:** عمودمنصف یک پاره خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA=PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد. فرض کنیم $P(x, y)$ آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره خط می توان نوشت:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$



با به توان دو رساندن طرفین و ساده کردن داریم:

$$5x + 3y = 10$$

این معادله برای تمام نقاطی که از A و B هم فاصله اند برقرار است، بنابراین، معادله عمودمنصف AB است.

در مثال بالا شیب خط AB برابر $\frac{3}{5}$ و شیب خط عمودمنصف آن برابر $-\frac{5}{3}$ است. چه رابطه ای بین این دو شیب مشاهده می شود؟

به طور کلی:

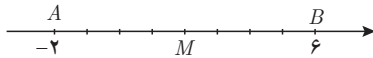
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm' = -1$ و برعکس.

نشان دهید نقطه $P(-12, 11)$ روی عمودمنصف پاره خط واصل دو نقطه $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد.

مختصات نقطه وسط یک پاره خط

فعالیت

۱ در شکل زیر نقطه M وسط پاره خط AB است. طول نقطه M چقدر است؟

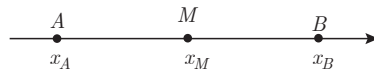


۲ چه ارتباطی بین طول نقطه M و طول نقاط A و B مشاهده می کنید؟

۳ اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور x ها و M وسط AB باشد، طول نقطه M را برحسب طول های نقاط A و B به دست آورید.

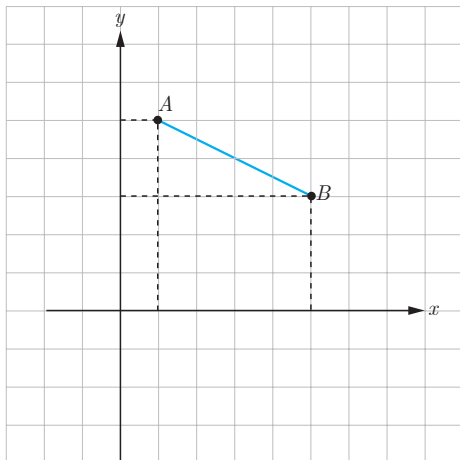
$$AM = MB$$

$$x_M - x_A = \dots$$



۴ اگر A و B روی محور y ها و عرض نقاط A و B را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره خط AB باشد، چه دستوری برای محاسبه عرض نقطه M می توان بیان کرد؟

کارد کلاس



اگر $A(1, 5)$ و $B(5, 3)$ دو سر پاره خط AB و $M(a, b)$ وسط این پاره خط باشد:

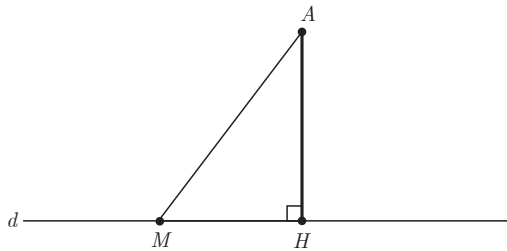
الف) تصویر نقاط A و B را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به دست آورید.

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

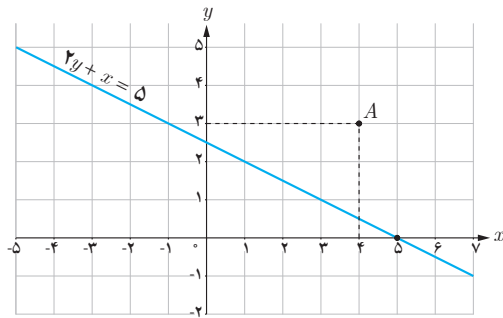
فاصله یک نقطه از یک خط



اگر خط d و نقطه A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است (چرا؟) این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم. بنابراین برای به دست آوردن فاصله هر نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمودی رسم و طول پاره خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.

فعالیت

در شکل روبه‌رو خط d به معادله $2y + x = 5$ و نقطه $A(4, 3)$ داده شده است.



- ۱ عمود AH را بر خط d رسم کنید.
- ۲ رابطه بین شیب‌های دو خط d و AH را به دست آورید.
- ۳ شیب AH را به دست آورده و معادله خط AH را بنویسید.
- ۴ دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را به دست آورید.
- ۵ طول پاره خط AH را محاسبه کنید.

به طور کلی اگر بخواهیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ را به دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

که در آن، وجود علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.

❁ **مثال:** فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $y = \frac{4}{3}x + 4$ را به دست آورید.

❁ **حل:** ابتدا معادله خط را به صورت $4x - 3y + 12 = 0$ می نویسیم. طبق فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطه A تا خط d را AH فرض می کنیم و داریم:

$$AH = \frac{|4(-2) - 3(4) + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8|}{5} = \frac{8}{5}$$

❁ **مثال:** فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

❁ **حل:** ابتدا معادله خط را به صورت $8x + 6y - k = 0$ می نویسیم. مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم:

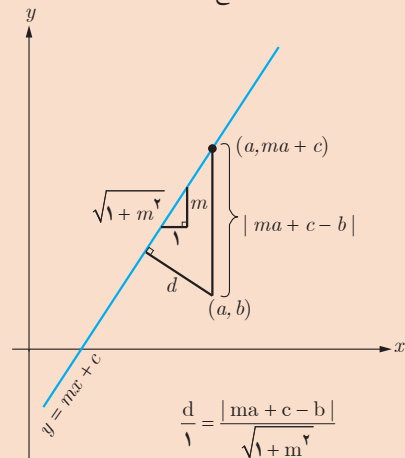
$$AH = \frac{|8(1) + 6(-4) - k|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \Rightarrow 4 = \frac{|-16 - k|}{10} \Rightarrow |-16 - k| = 40$$

$$-16 - k = 40 \Rightarrow k = -56$$

$$-16 - k = -40 \Rightarrow k = 24$$

خواندنی

اثبات بدون توضیح فاصله نقطه از خط



کارد کلاس

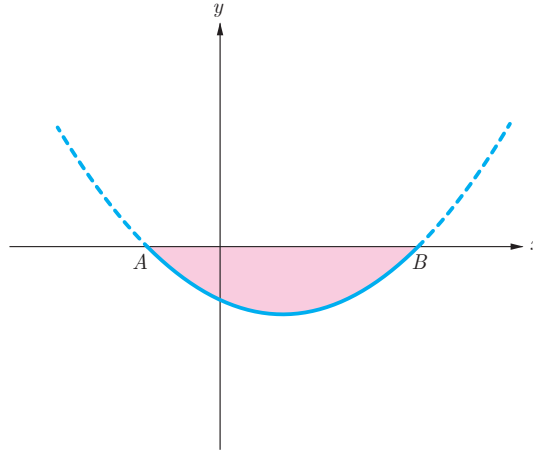
۱ اگر نقطه $A(2, 3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

۲ دو خط $2x - 3y = 2$ و $3x + 2y = 1$ معادله های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2, 5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

- ۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-۱, ۷)$ و $B(-۶, -۲)$ و $C(۳, ۳)$ را در نظر بگیرید.
 الف) مثلث را رسم کنید.
 ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.
 پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به دست آورید.
 ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

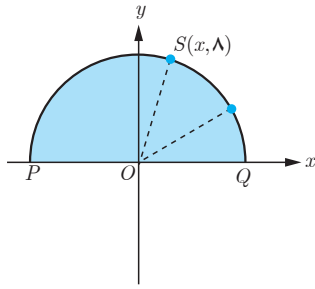
- ۲ $A(۰, ۶)$ و $B(۸, -۸)$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

- ۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - ۸x - ۲$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.
 الف) مختصات نقاط انتهایی عدسی A و B را به دست آورید.
 ب) اگر x بر حسب سانتی‌متر باشد طول AB را به دست آورید.
 پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



- ۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

- ۵ خط $۴x + ۳y = ۵$ بر دایره C به مرکز $O(-۱, ۲)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟



۶ نقطه $S(x, 8)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع 10° در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) مقدار x را به دست آورید.

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به دست آورید.

پ) نشان دهید \hat{PSQ} قائمه است.

۷ اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ ، $C(3, 1)$ می‌باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

۹ نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

۱۰ نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM

باشند طول MH را به دست آورید.