



فصل سوم

بردارها

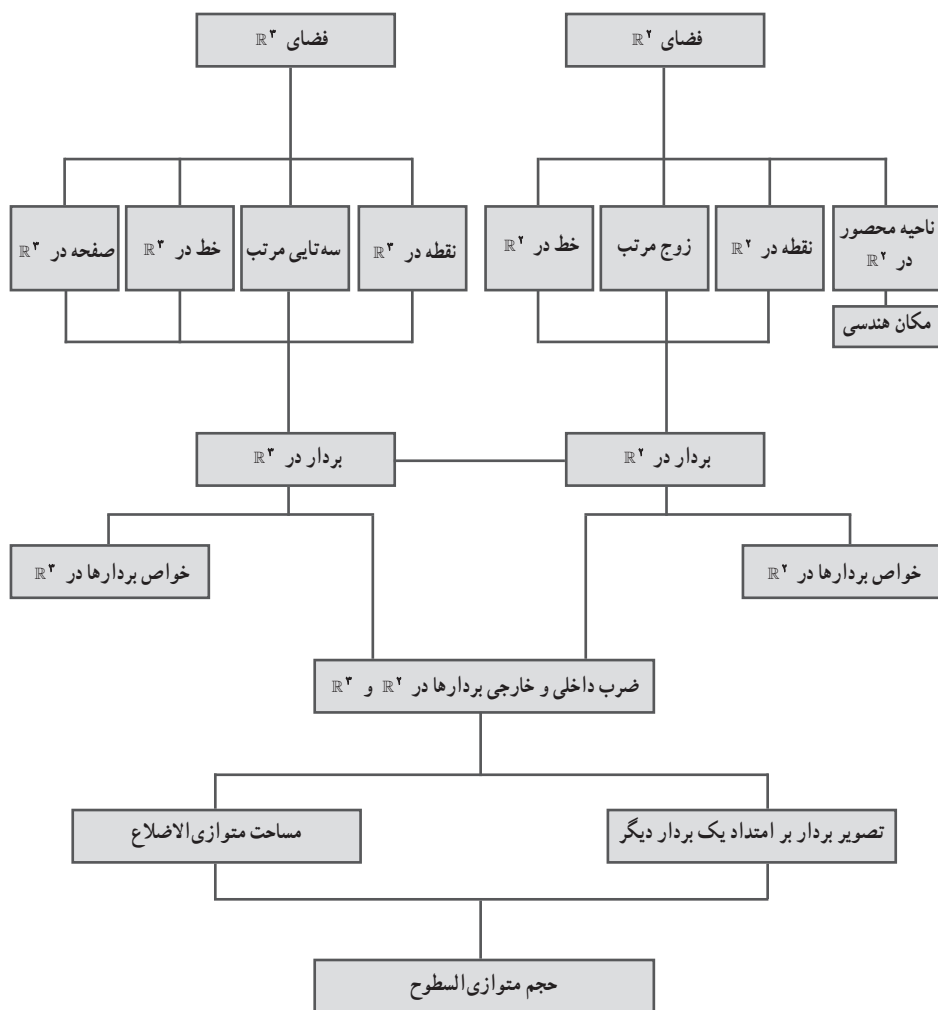
نگاه کلی به فصل

فصل بردارها به دو درس «معرفی فضای \mathbb{R}^3 » و «ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها» تقسیم می‌شود. در این فصل دانش‌آموزان به تعمیق مفاهیم بردارها و ارتباط آن با هندسه از یک سو و ارتباطش با مباحث جبری از یکدیگر می‌پردازند. گفتنی است دانش‌آموزان پیش‌تر با مفهوم بردار بر روی محور اعداد و نیز بردار در صفحه آشنا شده‌اند. بنابراین تعمیم و تعمیق مفهوم بردار در این فصل بر پایه دانش قبلی دانش‌آموز استوار است. از این رو از ذکر تمامی مقدمات اجتناب شده و با اشاره‌ای به آنها از مباحث مقدماتی که قبلاً فرا گرفته شده عبور کرده و به تعمیم آنها می‌پردازیم.

درس اول معرفی فضای \mathbb{R}^3 می‌پردازد. مسیر در نظر گرفته شده برای معرفی فضای \mathbb{R}^3 بر مبنای شناخت دانش‌آموز در فضای \mathbb{R}^2 ، و نیز آشنایی او با فضای \mathbb{R}^3 بعدی که در سال‌های قبل با آن آشنا شده است، می‌باشد. دانش‌آموزان در سال‌های قبل با دستگاه مختصات دوبعدی (صفحه) و مفهوم نقطه در صفحه و همچنین رسم نمودار توابع در صفحه آشنا شده‌اند، اما بیشتر این مفاهیم را به صورت شهودی فرا گرفته‌اند. در آغاز این درس سعی می‌شود که همان مفاهیم قبلی را باز تعریف کنیم و ذهن انتزاعی دانش‌آموزان را تقویت کنیم. از جمله موضوعاتی که به شناخت عمیق‌تر فضای \mathbb{R}^2 کمک می‌کند، یافتن نواحی از این صفحه است که با قیودی از جنس خط محدود شده‌اند. پس از مطالعه سریع فضای \mathbb{R}^2 که ترکیبی از مرور مطالب قبلی و بیان برخی ویژگی‌های آن است با دیدگاهی مابین شهود و دیدگاه اصل موضوعی زمینه لازم برای معرفی فضای \mathbb{R}^3 آماده می‌شود. پس از آن به معرفی بردارها می‌پردازیم. مجدداً همانند قبل ابتدا بردارها در \mathbb{R}^2 یادآوری شده و تا اندازه‌ای خواص آنها به صورت اصل موضوعی بیان می‌شود و سپس به بردارها در \mathbb{R}^3 می‌پردازیم.

درس دوم به تعریف و ارائه خواص ضرب بردارها می‌پردازد. ابتدا به ضرب داخلی و خواص آن می‌پردازد و سپس به ضرب خارجی دو بردار پرداخته می‌شود. دانش‌آموزان در این درس درمی‌یابند که رفتار و خواص بردارها از جمله اعمال اصلی بین آنها با اعداد حقیقی متفاوت است و عملاً با اشیای جدیدی روبه‌رو هستند که قواعد و ویژگی‌های خود را دارند. در این درس سعی شده است که به جای تعریف یک‌باره این ضرب‌ها، دانش‌آموزان را در فرایند ساخت و تعریف آنها همراه کرد، گرچه شاید همیشه میسر نباشد. از این رو تلاش بر این است که در بیان خواص و تعاریف مربوط به این دو روش ضرب بین بردارها از شهود دانش‌آموز حداکثر استفاده به عمل آید. از جمله کاربردهایی از ضرب خارجی و داخلی که در این درس ارائه شده است یافتن حجم متوازی‌السطوحی است که بردارهای سازنده آن داده شده است. برای این منظور می‌بایست قبل از یافتن حجم متوازی‌السطوح، نحوه یافتن تصویر یک بردار در امتداد یک بردار دیگر و نیز نحوه محاسبه مساحت متوازی‌الاضلاع به کمک بردارها آموزش داده شود.

نقشه مفهومی فصل



چند نمونه سؤال ارزشیابی

۱ اگر $\vec{a} = (1, 3, 2)$ و $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ باشند حاصل عبارت $(\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$ را به دست آورید.
 ۲ نشان دهید اگر a و b دو بردار مخالف صفر عمود بر هم باشند آن گاه ضرب داخلی آنها صفر است

و برعکس

۳ اگر $\vec{a} \perp \vec{b}$ نشان دهید $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$

۴ اگر $6 = x + y - 2z$ باشد حداقل مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ کدام است.

(راهنمایی: از نامساوی کوشی شوارتز استفاده کنید. دو بردار $\vec{a} = (x, y, z)$ و $\vec{b} = (1, 1, -2)$ را انتخاب کنید)

۵ تصویر قائم بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ روی بردار $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.
 $\vec{c} = (-1, -1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 3, 1)$

۶ تصویر قائم بردار $\vec{a} = (4, -3, 2)$ را بر امتداد برداری که با قسمت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می سازد را به دست آورید.

(راهنمایی: برداری که با محورها زاویه یکسان دارد به صورت $\vec{b} = (x, x, x)$ که $x \neq 0$ است)
 ۷ اگر \vec{a} و \vec{b} دو بردار مخالف صفر باشند نشان دهید.

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$$

۸ سه رأس مثلث ABC , $A(2, 1, 1)$ و $B(3, 1, 2)$ و $C(2, 3, 1)$ است زاویه داخلی B چند درجه است. (راهنمایی بردارهای \vec{BA} و \vec{BC} را تشکیل داده و زاویه بین آنها را حساب می کنیم).

۹ اگر $\vec{a} = (3, m, 5)$ و $\vec{b} = (3 - m, 7, 0)$ و بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ بر هم عمود باشند. زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} چند درجه است.

(راهنمایی: $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$)

۱۰ اگر $\vec{a} = (2, 1, 2)$ و $|\vec{b}| = 2$ و زاویه بین \vec{a} و \vec{b} برابر $\frac{\pi}{6}$ باشد. حاصل $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b})$ را به دست آورید.

۱۱ اگر a و b بردارهایی به طول ۵ سانتی متر و زاویه بین آنها $\frac{\pi}{4}$ باشد، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $(\vec{a} - 2\vec{b})$ و $(3\vec{a} + 2\vec{b})$ ساخته می شود را حساب کنید.

۱۲ اگر $\vec{a} = (1, 2, -1)$ و $\vec{b} = (3, 0, 1)$ دو بردار باشند مساحت متوازی الاضلاعی که بردارهای $(\vec{a} + 3\vec{b})$ و $(2\vec{a} - \vec{b})$ می سازند را بیابید.

۱۳ اگر سه نقطه $A(2, 1, -1)$ و $B(1, 0, -2)$ و $C(3, 1, 1)$ سه رأس یک مثلث باشند. مساحت مثلث را بیابید.

۱۴ اگر $|a| = 2$ و $|b| = 3$ و $a \cdot b = \frac{18}{5}$ باشد مساحت مثلثی که دو بردار \vec{a} و \vec{b} را می‌سازند بیابید.

۱۵ حجم متوازی‌السطوحی را بیابید که توسط سه بردار $\vec{a} = (3, 2, 1)$ ، $\vec{b} = (0, -1, 4)$ و $\vec{c} = (0, -1, 2)$ می‌سازند.

۱۶ اگر سه بردار $\vec{a} = (0, -1, 2)$ ، $\vec{b} = (m, -1, 3)$ و $\vec{c} = (4, 1, 2)$ در یک صفحه باشند مقدار m کدام است.

۱۷ نقطه $A(3, -2, 4)$ مفروض است.

(الف) اگر از A بر صفحه xyz عمود کنیم و پای عمود را B بنامیم مختصات B کدام است.

(ب) اگر از A بر محور y ها عمود کنیم و پای قائم را C بنامیم، مختصات C کدام است.

(ج) طول پاره خط BC را بیابید.

۱۸ اگر $A(0, 1, -1)$ ، $B(1, 1, 0)$ و $C(1, 1, -1)$ سه رأس مثلث ABC باشند.

(الف) مختصات M وسط BC را به دست آورید.

(ب) طول میانه AM از مثلث را بیابید.

(ج) مختصات نقطه G ، نقطه برخورد میانه‌ها را به دست آورید.

(د) طول AG را به دست آورید و نشان دهید $AG = \frac{2}{3}AM$.

۱۹ وجه‌های یک مکعب مستطیل قسمتی از صفحات به معادلات $x = -1$ ، $x = 2$ ، $y = -3$ ، $y = 4$ ،

$z = -1$ و $z = 2$ است.

(الف) معادله وجهی را بنویسید که موازی صفحه yoz و در قسمت منفی محور z ها باشد.

(ب) معادله یالی را بنویسید که در هر دو صفحه $x = 2$ و $z = 2$ باشد.

(ج) مختصات رأسی از مکعب مستطیل را بنویسید که همه مؤلفه‌های آن مثبت باشد.

۲۰ مؤلفه‌های بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ را روی محور مختصات نشان دهید. سپس طول بردار را

به دست آورید.

۲۱ بردارهای $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{j} + 7\vec{k}$ مفروض‌اند.

(الف) طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را بیابید.

(ب) طول بردار $2\vec{a} + \vec{b}$ را به دست آورید.

(ج) حاصل $\frac{|\vec{a} - 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|}$ را به دست آورید.

۲۲ اگر $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = (3, 1, 2)$ باشد و $r = 4$ نشان دهید:

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{ra} + r\vec{b}$$

اهداف درس

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند:

- ۱ آشنایی با فضای \mathbb{R}^2 و درک مفهوم زوج مرتب و نقطه در صفحه و نقش و ارتباط این دو مفهوم در تعریف \mathbb{R}^2 به صورت اصل موضوعی.
- ۲ کسب مهارت یافتن نواحی محصور به خطوط در \mathbb{R}^2 و تقویت قوه تجسم مفاهیم جبری – هندسی.
- ۳ آشنایی با فضای \mathbb{R}^3 و پیوند آن با مفاهیم پیش‌آموخته درباره فضای سه‌بعدی.
- ۴ یادآوری و تعمیم مفهوم بردارها در فضای \mathbb{R}^2 و اعمال و خواص آنها.
- ۵ آشنایی با بردارها در فضای \mathbb{R}^3 و اعمال و خواص آنها.

ارائه محتوا

هدف نهایی این درس معرفی فضای \mathbb{R}^3 و بردارها در این فضا می‌باشند. اما برای این منظور ابتدا باید فضای \mathbb{R}^2 و نیز بردارها در این فضا به نحو دقیق‌تری نسبت به دانش قبلی دانش‌آموزان مطالعه و بررسی شوند تا زمینه برای معرفی فضای \mathbb{R}^3 و بردارها در این فضا مهیا شود. ساختار کلی این درس به صورت زیر است:

یادآوری و تعمیم مفاهیم در \mathbb{R}^2 ← معرفی فضای \mathbb{R}^3 ← بردارها در \mathbb{R}^2 ← بردارها در \mathbb{R}^3

دلیل این ترتیب محتوایی این است که برای معرفی فضای \mathbb{R}^3 نیاز است تا فضای \mathbb{R}^2 به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها معرفی شوند و نیز برخی مفاهیم مقدماتی مانند نقطه و خط در صفحه یادآوری گردند. گفتنی است که دانش‌آموزان قبلاً به طور شهودی کار کردن با صفحه مختصات را یاد گرفته‌اند لیکن در اینجا تلاش می‌شود که همان مفاهیم را در بستری کمابیش اصل موضوعی ارائه دهیم (البته نه کاملاً). در واقع تعریف دقیق فضای \mathbb{R}^2 به صورت:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

برای اولین بار است که معرفی می‌شود و تناظر بین زوج مرتب‌ها در تعریف فوق که یک مفهوم اصل موضوعی است و نقاط صفحه که یک مفهوم شهودی آشنا برای دانش‌آموز است. نقش کلیدی در

درونی‌سازی مفهوم فضای \mathbb{R}^2 توسط دانش‌آموز دارد. در واقع تعریف فضای \mathbb{R}^2 را می‌توان به کلی مستقل از هندسه درک کرد. در این راستا صفحه دکارتی تجسم شهودی (و بلکه هندسی) فضای مجرد \mathbb{R}^2 است. تأکید بر تناظر بین زوج مرتب‌ها در تعریف \mathbb{R}^2 و نقاط صفحه، دانش‌آموز را با درک مفاهیم انتزاعی مانند \mathbb{R}^2 یاری می‌دهد.

به منظور ارتقای توانایی تجسم هندسی دانش‌آموزان و دست‌ورزی بیشتر با فضای \mathbb{R}^2 کار در کلاس صفحه ۶۲ طراحی شده است.

کار در کلاس صفحه ۶۲

هدف از این کار در کلاس کمک به ذهن دانش‌آموز در عبور از مفاهیم تابعی و نمودارهای تابعی در صفحه \mathbb{R}^2 است. به دلیل اینکه در سال‌های گذشته دانش‌آموز از صفحه دکارتی عمدتاً برای رسم توابع استفاده کرده است، نوعی ارتباط پنهان بین توابع و صفحه \mathbb{R}^2 به وجود آمده است. در این ارتباط بخش کلیدی صفحه، محورهای x و y هستند و نیز ارتباطی که ضابطه یک تابع با این دو محور دارد. بنابراین بدنه صفحه \mathbb{R}^2 چندان مورد توجه نیست و زیرسایه نمودارهای تابعی کم‌رنگ شده است. از طرفی عمده شکل‌هایی که دانش‌آموزان در دستگاه دکارتی رسم کرده‌اند از جنس تابع بوده‌اند و درک عمیقی از اینکه چگونه می‌توان یک ناحیه از صفحه را (که لزوماً تابع نیست و یا اصلاً منحنی نیست) را مشخص کرد ندارد. این ناتوانی می‌تواند به ضعف در درک خواص فضای \mathbb{R}^2 منجر شود. برای عبور از غلبه منحنی‌های تابعی که در آنها اغلب محورهای x و y نقش برجسته‌ای دارند، این کار در کلاس تلاش دارد تا توجه دانش‌آموزان را به ابعادی دیگر از صفحه دکارتی جلب کند. البته در این مسیر تنها به دانش‌های قبلی دانش‌آموز بسنده می‌شود و از نمودارهای پیچیده یا نواحی پیچیده عمده‌اً اجتناب شده است.

از طرفی این کار در کلاس در پیوند با مفهوم مکان هندسی، که در فصل قبل به آن پرداخته شده، می‌باشد چرا که هر ناحیه خواسته شده در واقع مکان هندسی نقاطی از \mathbb{R}^2 است که در آن رابطه (های) داده شده صدق می‌کنند. همچنین مهارت تجسم این گونه نواحی به دانش‌آموز امکان تجسم رویه‌ها و خم‌ها در \mathbb{R}^3 در سطوح بالاتر ریاضی را می‌بخشد هر چند که راهی نسبتاً طولانی باید پیموده شود، لیکن این اولین گام لازم برای کسب آن مهارت است.

در ادامه این درس به معرفی فضای \mathbb{R}^3 پرداخته شده است. برای این منظور از ادبیات استفاده شده در بخش اول این درس برای فضای \mathbb{R}^2 کمک گرفته شده است. از طرفی سعی شده است با قرینه‌های دنیای واقعی مانند کنج اتاق اجزای این فضا را شهودی‌تر کنیم. توجه شود که در این فصل خاصیت راست‌گرد بودن محورها بررسی نمی‌شود.

پس از معرفی محورها و صفحات، به معرفی هشت ناحیه دستگاه \mathbb{R}^3 پرداخته شده است. با توجه به ماهیت دوبعدی تصاویر امکان نمایش همه ناحیه‌ها در یک تصویر وجود ندارد. توصیه می‌شود که دبیران محترم از نرم‌افزارهای نمایش سه‌بعدی و یا برخی ویدئوهای آموزشی موجود که در آنها زاویه دید بیننده به دور دستگاه می‌چرخد استفاده کنند. در ادامه برای نمایش نقطه در \mathbb{R}^3 ابتدا از مهارت دانش‌آموز برای یافتن نقطه در صفحه بهره‌برده شده است و سپس نقطه مشخص شده در صفحه xy را به اندازه z در راستای عمود تغییر می‌دهیم. به منظور نمایش رابطه‌ای که هر نقطه با محورهای سه‌گانه و نیز صفحات سه‌گانه دارد مجدداً یک نقطه را در نظر گرفته‌ایم و صفحاتی که گذرنده از آن نقطه و عمود بر صفحات سه‌گانه اصلی است را نمایش داده‌ایم. در این وضعیت نقطه مزبور در کنج یک مکعب مستطیل قرار می‌گیرد که ابعاد آن با سه‌تایی (x,y,z) نقطه مربوطه برابر است. ارائه مثال‌های مختلف در نواحی گوناگون از سوی دبیران محترم برای آموزش مهارت نمایش نقاط در \mathbb{R}^3 ضروری است.

در ادامه به فاصله دو نقطه در \mathbb{R}^3 پرداخته شده و رابطه آن استخراج شده است. برای سادگی ابتدا حالتی که یکی از نقاط مبدأ مختصات است در نظر گرفته شده و سپس حالت کلی مطرح شده است. از آنجا که در فرایند کشف رابطه مزبور از دانش قبلی دانش‌آموز برای یافتن فاصله دو نقطه در صفحه استفاده شده است، در صورت نیاز دبیران محترم می‌توانند با مثالی دوبعدی رابطه فاصله دو نقطه در صفحه را مرور کنند.

فعالیت صفحه ۶۷

هدف از این فعالیت آشنایی دانش‌آموزان با برخی خطوط و صفحات خاص ساده می‌باشد. در این فصل به معادله خط و معادله صفحه به‌طور کلی پرداخته نشده و تنها به مرور مفاهیم ساده‌ای از خط و صفحه که دانش‌آموزان قبلاً در هندسه ۲ به‌طور غیرتحلیلی با آن آشنا شده‌اند می‌پردازیم اما این بار با بیان تحلیلی. از این رو ادبیات به کار رفته برای معرفی خطوط و صفحات ساده (که حالات خاصی هستند) به بحث مکان هندسی در فصل قبلی کتاب نزدیک است. در اینجا نیز یکی از اهداف تقویت تجسم هندسی دانش‌آموزان است.

کار در کلاس صفحه ۶۸

این کار در کلاس تعمیم فعالیت صفحه ۶۷ می‌باشد. با انجام این فعالیت دانش‌آموزان وضعیت خط و صفحه‌ها در \mathbb{R}^3 را قبلاً به صورت هندسی با آنها آشنا شده‌اند تا حدودی به صورت تحلیلی مرور می‌کنند.

بخش بعدی این فصل به بررسی بردارها در \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 می‌پردازد. از آنجا که مرور بردارها در \mathbb{R}^2 مقدمه طرح موضوع در \mathbb{R}^3 است، ابتدا بردارها را در \mathbb{R}^2 یادآوری کرده و تا اندازه تعمیم می‌دهیم و سپس به معرفی بردارها در \mathbb{R}^3 می‌پردازیم.

قسمت ابتدایی صفحه ۶۹ به یادآوری مفهوم بردار که دانش‌آموزان در متوسطه اول فرا گرفته‌اند می‌پردازد و به سرعت وارد خواص آنها در دستگاه مختصات دوبعدی می‌شود. عمده این خواص قبلاً در متوسطه اول آموزش داده شده لیکن در اینجا سعی شده تا اندازه‌ای با ادبیاتی جدید و نمادهای مرسوم در کتب ریاضیاتی ارائه شوند. گفتنی است جمع بردارها به روش مثلث گفته شده و دیربان محترم می‌تواند در صورت نیاز آن را یادآوری کنند لیکن هدف نهایی به دست آوردن حاصل جمع دو بردار است فارغ از روش استفاده.

مثال صفحه ۷۱

در این مثال مفاهیم آموخته شده در متوسطه اول در خصوص بردار یادآوری و تعمیم می‌یابد. دانش‌آموزان در متوسطه اول نحوه به دست آوردن حاصل جمع دو بردار داده شده را فرا گرفته‌اند. اما در این مثال بردار برابند \vec{t} داده شده و از دانش‌آموز خواسته شده تا بردار نیروی محرکه \vec{t} را چنان بیاید که در نهایت برابند دو بردار \vec{w} و \vec{t} برابر \vec{t} شود. این در واقع عکس عملیاتی است که قبلاً در متوسطه اول فرا گرفته و در واقع عمل تفریق بردارها را به صورت غیرمستقیم به نمایش می‌گذارد. می‌توان به بردار \vec{t} به مثابه یک بردار متغیر نگاه کرد که باید آن را چنان تغییر دهیم تا نتیجه دلخواه حاصل شود. این نوع نگاه سطح شناختی بالاتری را مطالبه می‌کند که در واقع تعمیمی از مفهوم بردار در متوسطه اول است که در آن بردارها ثابت بود و عمل‌ها بین آنها انجام می‌شد. واقعی بودن موقعیت این مثال به جذابیت آن می‌افزاید. دیربان محترم می‌تواند مثال‌های متنوع دیگری مثلاً در مورد حرکت یک کشتی در دریا را ارائه دهند که وضعیت‌های مختلفی بین بردارها را نمایش دهد.

در ادامه به طور مختصر بردارهای یک‌ه در \mathbb{R}^2 یادآوری شده و سپس در کار در کلاس صفحه ۷۳ عمده

مباحث مربوط به بردارها در \mathbb{R}^2 جمع‌بندی و مرور شده است. چنانچه در خلال انجام این کار در کلاس دبیران متوجه بدفهمی خاصی از سوی دانش‌آموزان شدند می‌بایست اندکی درنگ کرده و پس از ارائه مثال‌های متنوع و رفع بدفهمی به سراغ بخش بعدی که بردارها در \mathbb{R}^3 است بروند. در صفحه ۷۳ بردارها در \mathbb{R}^3 معرفی و اعمال و خواص آنها با تعمیم آنچه که در مورد بردارها در \mathbb{R}^2 گفته شده بود مطرح می‌شود.

هدف از کار در کلاس صفحه ۷۴ دست‌ورزی بیشتر با عملیات برداری در \mathbb{R}^3 است. به دبیران محترم توصیه می‌شود که نمونه‌های مشابه این کار در کلاس را ارائه دهند تا از دریافت مفاهیم مقدماتی بردارها در \mathbb{R}^3 بخصوص تجسم فضایی بردارهایی که انتهای آنها در نواحی غیرناحیه اول است اطمینان حاصل کنند. در ادامه خواص جمع بردارها بدون اثبات آورده شده است. گرچه از دید دانش‌آموزان بسیاری از این خواص بدیهی هستند و نیازی به اثبات ندارند اما اثبات برخی از آنها می‌تواند آموزنده باشد گرچه برای ارزشیابی مدنظر نیست.

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

اهداف درس

- در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند:
- ۱ آشنایی با ضرب داخلی دو بردار و ارتباط آن با زاویه بین دو بردار.
 - ۲ آشنایی با ضرب خارجی دو بردار و ارتباط آن با زاویه بین دو بردار.
 - ۳ کسب مهارت یافتن تصویر یک بردار در امتداد یک بردار دیگر.
 - ۴ کسب مهارت یافتن مساحت یک متوازی‌الاضلاع با داشتن بردارهای سازنده آن.
 - ۵ کسب مهارت یافتن حجم یک متوازی‌السطوح با داشتن بردارهای سازنده آن.

ارائه محتوا

این درس با آموزش ضرب داخلی دو بردار آغاز می‌شود. برای این منظور اغلب دو مسیر در منابع آموزشی استفاده شده است. یک راه بهره‌گیری از فرایند یافتن تصویر قائم یک بردار در امتداد بردار دیگر است و راه دوم استفاده از فرایند یافتن زاویه بین دو بردار است. در هر دو فرایند عبارتی ظاهر می‌شود و آن را ضرب داخلی دو بردار معرفی می‌کنند. در کتاب هندسه ۳ مسیر دوم انتخاب شده است چرا که به نظر دنبال کردن آن ساده‌تر است و نیاز به دانش قبلی کمتری دارد. از طرفی این رویکرد نقش زاویه را در تعریف ضرب داخلی تا حدودی پررنگ‌تر می‌کند چرا که یکی از کاربردهای عملی استفاده از ضرب داخلی، یافتن میزان دور یا نزدیک بودن دو بردار از یکدیگر است و زاویه بین دو بردار در اینجا نقش محوری دارد.

پس از بررسی نحوه تعریف ضرب داخلی دو بردار در \mathbb{R}^2 ، تعمیم آن در \mathbb{R}^3 به صورت تعریف آمده است. در صفحه ۷۹ برخی خواص ضرب داخلی همراه با اثبات آنها آمده است. از جمله خواص مهم می‌توان به رابطه تعامد دو بردار با ضرب داخلی و نیز نامساوی کشی شوارتز اشاره کرد.

در صفحه ۷۹ تصویر قائم یک بردار بر امتداد برداری دیگر آموزش داده شده است که در آن از رابطه تعامد دو بردار کمک گرفته شده است. یکی از ویژگی‌های این اثبات در عین سادگی قابلیت تعمیم آن به فضای اقلیدسی بالاتر بدون افزودن پیچیدگی آن است.

در کار در کلاس صفحه ۸۰ تمام خواص ضرب داخلی مرور می شود و بدفهمی های احتمالی دانش آموزان کشف و با ارائه مثال های بیشتر توسط دبیران محترم رفع می گردد.

بخش دوم این درس به مفهوم ضرب خارجی می پردازد. از آنجا که دانش آموزان قبلاً با دترمینان ماتریس در فصل اول آشنا شده اند، بنابراین تعریف ضرب خارجی براساس دانش قبلی دانش آموز ارائه شده است. استدلال اینکه چرا ضرب خارجی دو بردار به این صورت تعریف شده خارج از حوصله این کتاب است. کوتاه اینکه برخی کمیت های فیزیکی مانند گشتاور نیروی وارد بر یک صفحه که بر صفحه عمود است به کمک این نوع ضرب بین بردارها قابل محاسبه هستند و از این رو انگیزه ای برای تعریف ضرب خارجی دو بردار به صورت فعلی می باشند.

در ادامه اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار با کمک محاسبه ای ساده براساس مفاهیم مقدماتی بردارها به دست می آید. در صفحه ۸۲ برخی خواص ضرب خارجی مطرح شده است و اثبات برخی از آنها ذکر شده است. ارائه اثبات دیگر خواص نیز توصیه می شود.

در انتهای این درس کاربردی از ضرب داخلی و ضرب خارجی که همان یافتن حجم متوازی السطوح است آمده است. تمرین های ص ۸۴، تمرین های ۳ و ۴ و ۶ بدفهمی های رایج دانش آموزان در خصوص خواص ضرب داخلی و خارجی را هدف گرفته است.

