فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

نگاه کلی به فصل

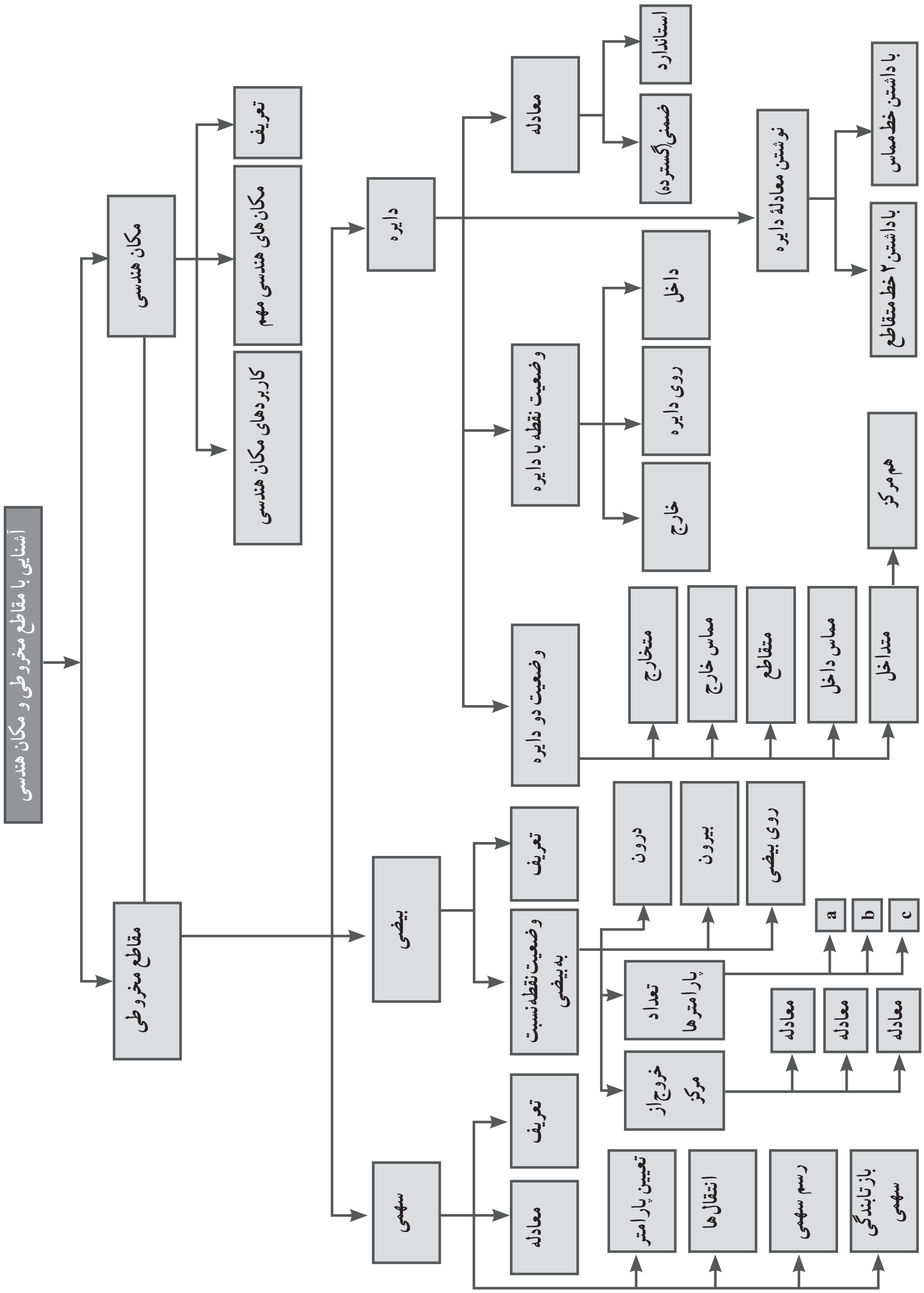
این فصل را می‌توان فصلی برای معرفی و بررسی مقاطع مخروطی در حالت کلی، بدون ریز شدن در جزئیات و با اجتناب از نکات خاص و غیر کاربردی دانست.

در شکل‌های ابتدایی فصل، به‌طور شهودی، فصل مشترک صفحات مختلف با سطح مخروطی نشان داده شده است که نتیجه آن به‌وجود آمدن چهار مقطع مهم دایره، بیضی، هذلولی و سهمی می‌باشد. البته در همان اشکال شکل‌های دیگری نیز که از برخورد صفحه و سطح مخروط در حالت‌های خاص رُخ می‌دهد به تصویر کشیده شده است تا بررسی کامل‌تر باشد.

اما برای درک صریح‌تر این موضوع لازم است دانش‌آموزان مفهوم مکان هندسی را به خوبی متوجه شوند که در ادامهٔ قسمت اول به بررسی این مفهوم پرداخته شده است. مثال‌های متعدد در زمینهٔ مکان هندسی‌های مهم از جمله در نیمساز، عمودمنصف، تعیین فاصله‌ها و ... به خوبی دانش‌آموزان را به درک بیشتری از مفهوم هندسی به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط که یک ویژگی مشترک دارند می‌رساند.

در ادامهٔ فصل و بعد از تثبیت مفهوم مکان هندسی، بررسی مفصل و دقیق مقاطع دایره، بیضی و سهمی انجام شده است. دایره و سهمی با دقت و حوصلهٔ بیشتری بررسی شده‌اند و علّت آن را می‌توان در سلسله مباحث متصل با این دو مقطع در سال‌های گذشته نیز جست‌وجو کرد. دایره و سهمی به شکل‌های مختلف در سال‌های قبل نیز بررسی شده‌اند و در کتاب حاضر بررسی آنها با رویکرد تعریفی کامل‌تر و دقیق‌تر انجام شده است. در مورد بیضی، این بررسی به شکل محدودتری انجام شده است و کتاب وارد جزئیات از جمله معادله به شکل تحلیل بیضی نشده است. تعاریف اولیه بیضی و تعیین پارامترها از جمله مواردی هستند که بررسی آنها درک شهودی مناسبی برای فراگیر ایجاد خواهد کرد و در این کتاب و این فصل به آنها پرداخته شده است.

نقشه مفهومی


آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی
مکان هندسی
تعریف
مکان های هندسی مهم
کاربردهای مکان هندسی
مقاطع مخروطی
دایره
معادله
استاندارد
ضمنی (گسترده)
نوشتن معادلهٔ دایره
با داشتن خط مماس
با داشتن ۲ خط متقاطع
وضعیت نقطه با دایره
داخل
روی دایره
خارج
وضعیت دو دایره
متخارج
مماس خارج
متقاطع
مماس داخل
متداخل
هم مرکز
بیضی
تعریف
وضعیت نقطه نسبت به بیضی
درون
بیرون
روی بیضی
تعداد پارامترها
a
b
c
خروج از مرکز
معادله
معادله
معادله
سهمی
تعریف
معادله
تعیین پارامتر
انتقال ها
رسم سهمی
بازتابندگی سهمی

تصویر ابتدای فصل (تصویر عنوانی)

مقاطع مخروطی از جمله اشکالی هستند که کاربردهای خاصّی در معماری دارند. در بناهای تاریخی استفاده از شکل‌های مختلف مقاطع مخروطی دیده می‌شود. تصویر ابتدایی به همین موضوع پرداخته است و مشخص می‌کند در بُرج طغرُل چطور از ویژگی نورپردازی و ترکیب دایره و بیضی در آن می‌توان زمان را تعیین کرد. البته استفاده از مخروط و مقاطع مخروطی همیشه یکی از کاربردهای جالب در تعیین زمان و استفاده در ساعت‌های شنی بوده است.

دانستنی‌های برای معلم

مقاطع مخروطی در ریاضیات و کاربردهای عملی جایگاه قابل قبولی دارد. در گذشته و به خصوص دورهٔ اسلامی مطالعات زیادی از طرف دانشمندان برای رابطهٔ بین مقاطع مخروطی و ساعت‌های آفتابی انجام شده بود امّا صنعتگران معمولاً ساعت‌های آفتابی را براساس جدول‌هایی می‌ساختند که موقعیت سایهٔ شاخص را برای مکانی معین و تمام موقعیت‌های خورشید به‌دست می‌داد.

برخی از منجمان قرن‌های چهارم و پنجم هجری، چون صاغانی و بیرونی، به کمک مقاطع مخروطی دربارهٔ انواع مختلف اُسطرلاب بحث کرده‌اند. ساخت و کاربرد این اُسطرلاب‌ها بسیار دشوارتر از اُسطرلاب معمولی است که در آن فقط خط مستقیم و دایره به‌کار رفته است؛ کاربرد مقاطع مخروطی در نور شناخت مهم‌تر است. در دورهٔ باستان، هندسه‌دانان آینه‌هایی سوزان سهمی‌گون را مطالعه کردند و هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی این پژوهش را ادامه دادند. ابن میثم یک مسئلهٔ معروف نور شناخت را با مقاطع دایره و هذلولی حل کرد.

از مقاطع مخروطی در حل مسائل خاصی از هندسه و حتّی معادلات استفاده شده است. ماهانی که در حدود ۲۴۶ قمری زندگی می‌کرد نخستین کسی است که مسئله‌ای هندسی را به معادلهٔ جبری درجهٔ سوم تحویل کرده است و سپس در حوالی سال ۳۲۸ قمری ابوجعفر خازن معادلهٔ ماهانی را به کمک مقطع مخروطی حل کرد. پس از او اغلب ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی معادله‌های درجهٔ سوم را به کمک مقاطع مخروطی حل کردند.

نمونه سؤال ارزشیابی

■ دایره

۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزاش $O(۱,۴)$ بوده و از نقطهٔ $A(۲,-۱)$ بگذرد.

۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۱,۳)$ و $B(-۳,-۱)$ دو سر قطری آن باشند.

۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $x+۲y=۱$ مماس بوده و مرکزاش نقطهٔ $O(-۱,۳)$ باشد.

۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خطوط $۲x+y=۲$ و $۲x+y=۵$ مماس بوده و مرکزاش روی خط $y=x-۲$ باشد.

۵ به‌ازای کدام مقدار m رابطهٔ $۲x^۲+۲y^۲-x+y-۲m+۱=۰$ مشخص‌کنندهٔ یک دایره است؟

۶ اگر $x^۲+y^۲+(m-۱)x+(m+۲)y+m=۰$ تنها مشخص‌کنندهٔ یک نقطه در صفحه باشد m کدام است؟

۷ وضعیت نقاط زیر را نسبت به دایره‌های داده شده بررسی کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۴x=۰$, $A(۱,۳)$

ب) $x^۲+y^۲+۲y=۰$, $A(-۱,-۴)$

ج) $x^۲+y^۲-۲y-۱=۰$, $A(۰,-۳)$

۸ وضعیت خطوط زیر را نسبت به دایره‌های داده شده بررسی کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$, $x+y=۲$

ب) $۲x^۲+y^۲-x-۱=۰$, $x=y$

ج) $x^۲+y^۲+۴y=۱$, $y=۲x-۱$

۹ وضعیت دوایر زیر را نسبت به هم بررسی کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۲x=۰$, $x^۲+y^۲+۴y=۰$

ب) $(x-۱)^۲+y^۲+۴x=۲$, $(y+۱)^۲+x^۲=۵$

ج) $x^۲+y^۲-۲y=۱$, $x^۲+y^۲+۲x=۱$

۱۰ اگر دایره $x^۲+y^۲-۲x=۵$ و دایره $(x+۱)^۲+y^۲=۴$ مماس داخل باشند، a را بیابید.

■ بیضی

۱۱ در یک بیضی طول قطر بزرگ سه برابر طول قطر کوچک بیضی است، خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۲ اگر فاصلهٔ رأس کانونی بیضی تا کانون دورتر دو برابر فاصلهٔ آن تا کانون نزدیک‌تر باشد، خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۳ بیضی که در آن $e=\frac{۱}{۲}$ و $b=۱$ است را رسم کنید.

۱۴ در یک بیضی خروج از مرکز $\frac{۱}{۳}$ است و فاصلهٔ کانون تا رأس دورتر کانونی ۵ است. فاصلهٔ رأس ناکانونی تا رأس کانونی را به‌دست آورید.

۱۵ نقاط $F\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ کانون‌های بیضی می‌باشند که خروج از مرکزاش $e=\frac{۲}{۵}$ است. بیضی را رسم کرده و مختصات رئوس آن را تعیین کنید.

۱۶ نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\۶\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}-۴\\۶\end{matrix}\right.$ رئوس کانونی بیضی هستند که در آن فاصلهٔ رأس کانونی تا کانون نزدیک‌تر ۱ است و مشخصات دیگر بیضی را به‌دست آورید و آن را رسم کنید.

۱۷ نقاط $B\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ رئوس ناکانونی بیضی هستند که در آن $e=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد، مشخصات دیگر بیضی را به‌دست آورید و آن را رسم کنید.

۱۸ فاصلهٔ رأس ناکانونی بیضی تا یکی از کانون‌ها ۳ می‌باشد، اگر نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک ۵ به ۲ باشد، بیضی را رسم کنید.

■ سهمی

۱۹ معادلهٔ سهمی را مشخص کنید که نقطهٔ $S(-۲,۱)$ رأس آن باشد و خط $y=۴$ خط هادی آن شود.

۲۰ معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن $F(۴,۳)$ و خط هادی آن $x=۲$ باشد.

۲۱ ویژگی‌های سهمی $x^۲+۴y-۲x=۵$ را بیابید و آن را رسم کنید.

۲۲ ویژگی‌های سهمی $y^۲-۴x+۲y=۳$ را بیابید و آن را رسم کنید.

۲۳ اگر $F(۱,۴)$ کانون سهمی $x^۲-۲y+ay-۱=۰$ باشد، a را بیابید.

۲۴ در سهمی $y^۲=۲x$ نوری به سهمی بر راستای خط $y=۴$ می‌تابد، معادلهٔ بازتاب این خط نوری را مشخص کنید.

۲۵ خط $x=۲$ خط هادی و $F(۴,۱)$ کانون سهمی می‌باشد. یک طیف نوری در راستای خط محور xها بر سطح سهمی می‌تابد، معادلهٔ بازتاب را بنویسید.

درس اول آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

اهداف

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ مقاطع مختلف مخروطی را بشناسد.

۲ درک واضحی از مفهوم مکان هندسی داشته باشد.

۳ مکان‌های هندسی مهم مانند عمودمنصف، نیمساز و تعیین فاصله‌های مختلف را مرور کند.

۴ کاربردهایی از مفهوم مکان هندسی را در حل مسائل ریاضی و هندسی ببیند.

روش تدریس

در بخش اول تدریس، چهار مقطع مخروطی یعنی دایره، بیضی، سهمی و هذلولی به‌صورت تجسمی معرفی شده‌اند. با توجه به اهمیت تجسم فضایی در این قسمت که مربوط به مخروط می‌شود و انتقال این سطح مقطع به فضای دو بعدی و صفحه لازم است در درک شهودی دانش‌آموزان بسیار دقّت شود.

در بخش دوم تدریس، مفهوم مکان هندسی مورد بحث و بررسی قرار گیرد تا دانش‌آموز این مفهوم را به‌عنوان مجموع نقاط که دارای ویژگی‌های مشترک هستند درک کند. در فعالیت شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۳۶ به ویژگی نیمساز به‌عنوان یک مکان هندسی مهم پرداخته شود.

در این فعالیت دانش‌آموز علاوه بر یادآوری ویژگی‌های نیمساز یک زاویه، یاد می‌گیرد که این ویژگی‌ها چطور به مفهوم مکان هندسی مرتبط می‌شوند. در این فعالیت به دو شرطی بودن تعریف نیز دقّت شود که بسیار مهم است.

در فعالیت شمارهٔ ۲ به بررسی دایره پرداخته شود. این فعالیت در راستای مقاطع مخروطی بسیار مهم است. در این فعالیت تعریف دایره به شکل مکان هندسی مشخص می‌شود که براساس این تعریف در صفحات بعد معادله دایره نوشته می‌شود.

در فعالیت شمارهٔ ۳، باز هم فاصله به‌عنوان یک مکان هندسی مهم در نظر گرفته شده است. در این فعالیت مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط به یک فاصله‌اند تعیین می‌شود.

در ادامهٔ درس اول یکی از کاربردهای مکان هندسی بررسی می‌شود. در این قسمت ترکیبی از مکان هندسی‌های قبل بحث و بررسی می‌شود. مفهوم عمودمنصف و تعیین فاصله از خط که در فعالیت‌های قبل بررسی شده‌اند در این مسئله ترکیب و استفاده می‌شود.

درس دوم
دایره

اهداف

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ تعیین معادلهٔ دایره به‌صورت استاندارد و ضمنی

۲ تبدیل معادلهٔ ضمنی به استاندارد

۳ بررسی وضعیت نقطه نسبت به دایره

۴ بررسی وضعیت خط نسبت به دایره

۵ بررسی وضعیت دو دایره نسبت به هم

۶ تعیین خط مماس بر دایره از نقطه‌ای روی دایره بدون استفاده از مشتق

روش تدریس

در این درس اولین مقطع مخروطی یعنی دایره به‌طور کامل بحث و بررسی می‌شود. در ابتدای این درس نیز دایره را به‌عنوان معروف‌ترین مقطع مخروطی معرفی می‌کند. تأکید مهم برای دانش‌آموزان روی این موضوع است که قرار است دایره و دیگر مقاطع به شکل تحلیلی بررسی شوند و تفاوت‌های بررسی ترسیمی و تحلیلی کاملاً بحث شود.

در ابتدای درس تعریف دایره براساس مکان هندسی که صفحات قبل توضیح داده شده است مشخص شود و سپس از روی آن معادله دایره تعیین شود.

در مثال اول این درس مشخص شود که برای نوشتن معادله دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره بسیار مهم است. در این مثال چند مورد مهم بررسی شده است که از جمله آنها محل برخورد با محور مختصات است. در ضمن معادلهٔ ضمنی دایره نیز مشخص شده است که در مطالب بعدی درس بسیار مهم خواهد بود.

در ادامهٔ درس روش تبدیل معادلهٔ ضمنی دایره به معادلهٔ استاندارد توضیح داده شده است. در این قسمت یک مثال و یک فعالیت وجود دارد که به دنبال هم دانش‌آموزان را برای رسیدن به این موضوع کمک

می‌کند. در مثال ابتدا این کار یعنی تبدیل معادله به استاندارد با ضرایب عددی انجام می‌گیرد که مسلماً کار ساده‌تری می‌باشد. دقّت شود در کل این فرایند ضرایب x^2 و y^2 عددی غیر از یک باشند.

ابتدا باید با تقسیم بر آنها ضرایب را به یک تبدیل کرده و سپس فرایند مربع کامل کردن را برای رسیدن به معادلهٔ استاندارد انجام داد. سپس در فعالیت شمارهٔ ۱ همین فرایند با استفاده از ضرایب کلی a، b و c انجام شده است که نتیجهٔ این فرایند تولید فرمول برای تعیین شعاع و مختصات مرکز می‌باشد. استفاده از فرمول‌ها نباید تأکید شود و به دانش‌آموز توصیه شود با انجام مراحل مربع کامل کردن به سرعت می‌تواند شعاع و مرکز دایره را مشخص کند. اما در انتهای فعالیت بحث مهمی وجود دارد که به بررسی شرط دایره بودن معادله می‌پردازد یک معادلهٔ گسترده وقتی ضرایب x^2 و y^2 یک هستند می‌تواند نشان دهندهٔ دایره یا نقطه باشد و می‌تواند هیچ شکلی را مشخص نکند. بحث و تمایز بین این حالات که بسیار مهم است در انتهای فعالیت انجام شده است و بعد از بررسی آن، دانش‌آموزان به راحتی می‌توانند این موضوع را تشخیص دهند. در ادامهٔ درس کار در کلاس وجود داردکه موارد فوق در آنها تمرین می‌شود.

تا با مثال‌های عددی متعدد دانش‌آموزان به تسلط کافی برسند.

در مثال بعد یکی از حالت‌های مهم نوشتن معادلهٔ دایره مشخص می‌شود. در این مثال مختصات مرکز یک نقطهٔ دلخواه روی دایره داده شده است. بازهم می‌شود در این مثال تأکید کرد که مهم‌ترین اطلاعات مورد نیاز برای نوشتن معادلهٔ دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره است هر نوع اطلاعات دیگری که داده شود باید از روی آنها مختصات مرکز و شعاع دایره تعیین شوند تا معادلهٔ دایره نوشته شود.

در فعالیت شمارهٔ ۲ یکی دیگر از مثال‌های نوشتن معادلهٔ دایره مشخص شود. باز هم مشخص می‌شود باید از هر نوع اطلاعاتی که داده می‌شود برای نوشتن معادلهٔ دایره مختصات مرکز و شعاع دایره به‌دست آیند. در این فعالیت خط مماس بر دایره داده شده و براساس قضایای خوانده شده در سال قبل مشخص می‌شود که فاصلهٔ نقطهٔ مرکز تا خط مماس همان شعاع دایره است. در این فعالیت فرمول فاصلهٔ نقطه تا خط نیز یادآوری می‌شود که بسیار مهم است.

سپس در کار در کلاس بعدی، بررسی مهمی در زمینهٔ وتر درون دایره به وقوع می‌پیوندد. این کار در کلاس از مثال‌های بسیار مهمی است که چند ویژگی مهم را در دایره مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد. تأکید بر این موضوع که شعاع عمود بر وتر آن را نصف می‌کند و در سال‌های قبل خوانده شده بسیار مهم است.

مثال بعد از آن بحث حالت‌های دو دایره نسبت به هم را بررسی می‌کند. طول خط‌المرکزین، وضعیت شعاع‌ها و مقایسهٔ آنها با هم منجر به بررسی کل حالت‌های دو دایره نسبت به هم می‌شود. در فعالیت شمارهٔ ۳ نیز همین مورد بحث و بررسی شده است. البته این بررسی در سال قبل به شکل ترسیمی انجام شده است و بررسی به شکل تحلیلی که از موارد سال قبل نیز در آن استفاده می‌شود باعث فهم بیشتر

حالت‌های دو دایره نسبت به هم می‌شود. لازم است به کمک دانش آموزان تقسیم‌بندی منظمی برای حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم انجام شود. به سؤالی که در انتهای فعالیت شده است به دقت پرداخته شود. جواب این سؤال به قدرمطلق موجود در قسمت سوم و به‌صورت کلی قدرمطلق موجود در شرط مماس درونی بودن دو دایره مربوط می‌شود که معمولاً دانش‌آموزان اثر آن را با سهل‌انگاری از دست می‌دهند. بحث و بررسی این قدرمطلق دو وضعیت را مشخص می‌کند که در آن دایره مورد نظر یا به‌عنوان دایرهٔ درونی یا به‌عنوان دایرهٔ برونی مطرح می‌شود.

کار در کلاس بعدی، چند تمرین در خصوص وضعیت دو دایره نسبت به هم مطرح می‌کند که تمرینات مفیدی برای درک دانش‌آموزان از وضعیت‌های دو دایره نسبت به هم خواهد بود.

در فعالیت شمارهٔ ۴ وضعیت خط نسبت به دایره پرداخته شود. برای این بررسی دو روش مطرح شده است که روش اول براساس معادلهٔ حاصل از تلاقی خط و منحنی است. معادلهٔ حاصل از تلاقی یک معادله درجهٔ دوم است که ریشه داشتن، نداشتن و ریشهٔ مضاعف داشتن آن وضعیت خط نسبت به دایره را مشخص می‌کند. در روش دوم از فاصلهٔ مرکز تا خط و مقایسهٔ آن با شعاع استفاده شده است که بیشتر جنبهٔ ترسیمی دارد و درسال‌های قبل مورد بررسی ترسیمی و شهودی قرار گرفته است.

مثال بعد نیز به بررسی همین فعالیت اما در خصوص خط مماس بر دایره و نوشتن معادلهٔ مماس بر دایره پرداخته است. دقت شود در این مثال از مفاهیم مشتق برای تعیین شیب خط مماس استفاده نشده است و از شرط عمود بودن خط مماس بر شعاع حاصل استفاده شده است.

درس سوم
بیضی و سهمی

اهداف

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ درک دقیق از تعریف بیضی و شکل بیضی
۲ تشخیص وضعیت نقطه نسبت به بیضی
۳ تعیین و تعریف پارامترهای بیضی و بررسی نقش آنها در رسم نمودار بیضی
۴ فهم درست از خروج از مرکز بیضی و نقش آن در تشخیص تغییرات ظاهری بیضی
۵ درک ویژگی بازتابندگی بیضی و ارتباط آن با مسائل خوانده شده در سال قبل
۶ درک تعریف سهمی و معادلهٔ سهمی
۷ بررسی شکل‌های مختلف سهمی با در نظر گرفتن مثبت و منفی شدن پارامتر سهمی
۸ انتقال محورها برای بررسی کلی سهمی در حالت کلی
۹ بررسی ویژگی بازتابندگی سهمی و کاربردهای آن

روش تدریس

بحث بیضی با یک فعالیت شروع شده است. هدف فعالیت شمارهٔ ۱ رسیدن به تعریف بیضی است. در این فعالیت ابتدا دانش‌آموز بودن شناخت از بیضی با ساده‌ترین وسایل ممکن رسم شکل را فرا می‌گیرد سپس در ادامهٔ فعالیت به بررسی وضعیت یک نقطه نسبت به بیضی می‌پردازد. نتیجهٔ این بررسی به دانش‌آموز می‌فهماند که مجموعه نقاط روی یک بیضی ویژگی مشخصی دارند که آن را به‌عنوان یک مکان هندسی مهم شاخص می‌کند. یعنی مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو نقطهٔ ثابت فرضی همیشه عددی یکسان و ثابت است که می‌دانیم این همان تعریف بیضی است.

در این فعالیت دانش‌آموز در ۵ مرحله به تعریف بیضی می‌رسد و دیده می‌شود که اثبات‌های موجود در هر مرحله براساس مطالب و موضوعاتی است که در سال‌های گذشته فرا گرفته است. در انتهای فعالیت نیز مشخص می‌شود دو نقطهٔ ثابت همان کانون‌های بیضی می‌باشند که نقش مهمی در رسم و تعریف بیضی دارند.

در فعالیت شمارهٔ ۲ پارامترهای مهم بیضی یعنی a ، b و c معرفی می‌شوند البته این فعالیت روند سریعی در شناسایی این پارامترها دارد و باید با حوصله و تمرکز کافی و حل تمرینات و مثال‌های متعدد روی این پارامترها بحث و بررسی کرد. دانش‌آموزان معمولاً این پارامترها را به خوبی یاد نمی‌گیرند و به همین دلیل با تسلط کافی بیضی را یاد نمی‌گیرند. به خصوص فرضیات قسمت اول فعالیت بسیار مهم و قابل تعمق است. در این قسمت قطر بزرگ به‌عنوان قطر کانونی و سپس قطر کوچک بیضی تعریف شده است. در همین قسمت بهتر است وضعیت بقیه‌ی قطرها با این دو قطر بررسی شود. از نکات مهم قسمت اول فعالیت این است که فقط O یعنی مرکز بیضی فقط وسط FF' است و وسط AA' یا BB' قرار گرفتن باید در قسمت‌های بعد اثبات شود و به‌عنوان پیش فرض در نظر گرفته شود. در ضمن فقط اندازه‌های OA و OB برابر a ، b فرض شده‌اند و برابر بودن OA' و OB' با a ، b نیز باید اثبات شود در ادامهٔ فعالیت نیز رابطهٔ بین پارامترهای a ، b و c به‌دست آمده است که بسیار مهم است.

سپس در کار در کلاس بعد به بررسی وتر کانونی بدون ذکر نام آن پرداخته می‌شود. دقت شود در سال‌های قبل معادلهٔ بیضی مشخص بود و با استفاده از آن وتر کانونی مشخص می‌شد اما در این کتاب معادلهٔ بیضی موجود نیست و باید طول وتر کانونی از روش‌های هندسی تعیین شود.

در فعالیت شمارهٔ ۳ تأثیر پارامترهای مختلف روی شکل ظاهری مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در این فعالیت خروج از مرکز به عنوان یک شاخص مهم ظاهری مشخص می‌شود و اثر تغییرات آن روی شکل دیده می‌شود. همچنین در این فعالیت فاصله‌هایی مانند FA و $F'A'$ به‌عنوان فاصلهٔ رأس کانونی تا کانون نزدیکتر و فاصله‌های FA' و $F'A$ به‌عنوان فاصله رأس کانونی تا کانون دورتر مورد بررسی قرار می‌گیرند. به نقطهٔ موجود در پارامترهای داده شده در۶ قسمت مختلف فعالیت دقت شود. این نظم با خروج از مرکز کوچک‌تر در دو قسمت اول شروع شده و به خروج از مرکزهای بزرگ‌تر در دو قسمت آخر منتهی می‌شود. توصیه می‌شود علاوه بر رسم جداگانهٔ بیضی‌ها، آنها را باهم در یک شکل مثلاً روی یک محور مختصات هم رسم کنید تا اثر خروج از مرکز در تغییرات ظاهری شکل دیده شود. البته نتیجهٔ این تغییرات ظاهری در توضیحات آخر فعالیت تشریح شده تا با بررسی دقیق آنها وضعیت بیضی واضح‌تر گردد.

در فعالیت شمارهٔ ۴ ویژگی بازتابندگی بیضی معرفی شده است که یکی از کاربردهای مهم در مقاطع مخروطی از جمله بیضی می‌باشد.

برای بررسی این ویژگی یک یادآوری در صفحهٔ قبل آورده شده است تا ارتباط موضوع با مباحث سال‌های قبل مشخص شود.

سپس درس سوم به بررسی مقطع مخروطی بعدی یعنی سهمی پرداخته است. معرفی سهمی نیز با یک فعالیت شروع شده است. فعالیت شمارهٔ ۵ برای مشخص شدن تعریف سهمی است. دانش‌آموز را در این

فعالیت به ترسیم شکل سهمی هدایت کنید. دقت شود دانش‌آموزان از قطر شهودی و ظاهری با شکل سهمی در سال‌های قبل آشنا هستند. این فعالیت تعریف دقیق‌تری از سهمی را نسبت به سال‌های قبل به او نشان می‌دهد. در این فعالیت مشخص کنید که سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط و یک نقطه به یک فاصله‌اند. روش رسم سهمی به ساده‌ترین روش ممکن مشخص می‌شود. استفاده از وسایل ساده‌ای مانند گونیا و نَخ رسم سهمی را به سادگی نشان می‌دهد. هدف این فعالیت مشخص شدن تعریف و شکل سهمی است.

فعالیت بعد یعنی فعالیت ۶ به تعیین معادلهٔ سهمی منجر می‌شود. برای سادگی در تعیین معادلهٔ سهمی فرض شده است که رأس سهمی روی مبدأ مختصات است. با این شکل روند محاسبات ساده‌تر می‌شود و دانش‌آموز درگیر محاسبات سخت و طولانی نمی‌شود که از هدف اصلی یعنی تعیین معادلهٔ سهمی براساس تعریف فعالیت قبل دور شود. در ادامهٔ فعالیت نیز هر چهار حالت سهمی یعنی افقی با دهانه به سمت راست یا چپ و سهمی قائم با دهانه به سهم بالا یا پایین رسم شده است. برای دانش‌آموز باید مشخص شود که این چهار حالت در مثبت یا منفی بودن پارامتر چگونه تأثیر می‌گذارد. سپس در جدول انتهای فعالیت نتایج این بررسی‌ها مشخص شده است.

در مثال بعد از فعالیت ۶ به نوعی رفتار عکس بررسی شده است. در فعالیت ۶ ویژگی‌ها مشخص بودند و از روی آنها معادله سهمی تعیین می‌شد ولی در این مثال معادلهٔ سهمی مشخص است و از روی معادله ویژگی‌ها مشخص می‌شود و سهمی رسم می‌گردد.

بخش بعدی تدریس به انتقال (محورها) اختصاص یافته است که امری لازم است. طبیعی است که سهمی که رأس آن روی مبدأ مختصات باشد نوع ساده‌ای از معادلهٔ سهمی را به ما می‌دهد. مسلماً برای اینکه رأس سهمی در مکان‌های دیگر قرار گیرد راحت‌ترین راه استفاده از انتقال است که در سال‌های گذشته مطالعه شده است. در این قسمت با انتقال می‌توان رأس سهمی را به هر نقطه‌ای از صفحهٔ مختصات انتقال داد و به تبع آن معادلهٔ سهمی متناظر را بحث و بررسی کرد. در یک جدول نیز این موارد چهارگانه دوباره بحث و بررسی و جمع‌بندی شده است. در این قسمت دو مثال وجود دارد که همین موضوع را بررسی می‌کند یعنی نوشتن معادلهٔ سهمی که رأس آنها در نقطه‌ای غیر از مبدأ مختصات باشد. مثال اول یک سهمی قائم و مثال دوم یک سهمی افقی مشخص می‌کند.

در ادامهٔ درس تبدیل معادلهٔ یک سهمی به‌صورت متعارف مطرح شده است. تمامی مقاطع مخروطی مانند دایره شکل ضمنی یا گسترده دارند. سهمی نیز دارای شکل ضمنی است که برای تبدیل معادلهٔ گسترده به معادلهٔ استاندارد یا متعارف باز هم باید از روش مربع کامل کردن استفاده کرد. در این قسمت با یک مثال عددی این روش توضیح داده شده است.

در قسمت بعد رسم سهمی توضیح داده شده است. در سال‌های گذشته دانش‌آموزان به شیوه‌های مختلف مانند تعیین رأس و نقاط کمکی، سهمی‌ها را رسم کرده‌اند. اما در این بخش نگرش دقیق‌تری از رسم سهمی به دانش‌آموز داده می‌شود. در این قسمت روش رسم براساس تعریف کامل سهمی بررسی می‌شود. به عبارت دیگر، غیر از رأس، نقطهٔ کانون و معادلهٔ خط هادی نیز مهم می‌باشند. توجه به کانون و خط هادی سهمی و تعریف سهمی که مجموعه‌ای از نقاط با فاصلهٔ یکسان نسبت به کانون و خط هادی است رسم سهمی را دقیق‌تر و کامل‌تر خواهد کرد. در مثال انتهای این قسمت این نوع رسم به وضوح توضیح داده می‌شود.

آخرین بحث در سهمی همان بررسی ویژگی بازتابندگی سهمی‌هاست که کاربردهای آن را مشخص می‌کند. این ویژگی نشان می‌دهد که سهمی در صنایع مختلف کاربردهای فراوانی دارد و استفاده از سطوح سهمی شکل بسیار کاربردی می‌باشد. استفاده از این سطوح در لامپ‌ها و ماهواره‌ها یکی از کاربردهای این مقطع مخروطی می‌باشد که بیشتر دیده می‌شود.

تمرینات (بیضی و سهمی)

۱ بیضی E به کانون‌های F و F' و قطرهای بزرگ و کوچک $۲a$ و $۲b$ مفروض است. دایرهٔ به قطر FF' را رسم می‌کنیم.

الف) اگر این دایره، بیضی را در نقطهٔ M قطع کند، ثابت کنید مساحت مثلث MFF'، مساوی مساحت مربعی به ضلع b است.

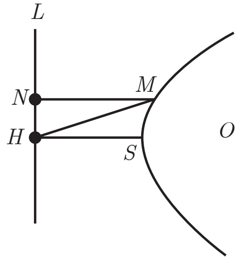
ب) نشان دهید این دایره، بیضی را در چهار نقطه قطع می‌کند، اگر و تنها اگر خروج از مرکز بیضی بزرگ‌تر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد و این دایره، بر بیضی در دو نقطه مماس است اگر خروج از مرکز بیضی مساوی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد و اگر خروج از مرکز بیضی کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، بیضی و دایره نقطهٔ برخوردی ندارند.

۲ بیضی E به کانون‌های F و F' و قطرهای بزرگ و کوچک $۲a$ و $۲b$ مفروض است. دایره‌ای به مرکز F و به شعاع b رسم می‌کنیم تا بیضی را در نقطهٔ M قطع کند. ثابت کنید زاویهٔ $F'MF$، حاده است، اگر $a < \frac{۳}{۲}b$ و منفرجه است، اگر $a > \frac{۳}{۲}b$ و قائمه است اگر $a = \frac{۳}{۲}b$

۳ بیضی E به کانون‌های F و F' و قطر بزرگ AA' مفروض است. به مرکز F و شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم. طول مماسی که از A' بر دایرهٔ فوق می‌توان رسم کرد به‌دست آورید.

۴ در نقطهٔ M واقع بر بیضی E به کانون‌های F و F'، مماس d را بربیضی رسم کرده‌ایم. اگر فاصلهٔ F' از d باشد، MF' و MF را برحسب a بیابید.

۵ در نقطهٔ M واقع بر بیضی E به کانون‌های F و F'، مماس d را رسم کرده‌ایم و در نقطهٔ M عمودی بر d رسم کرده‌ایم تا قطر بزرگ بیضی را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید : $e=\dfrac{DF}{MF}$ (خروج از مرکز بیضی)

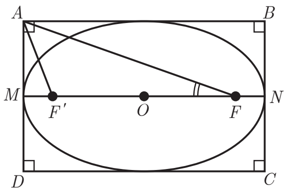


۶ در شکل مقابل M نقطه‌ای دلخواه روی سهمی و S رأس سهمی و MN و SH بر خط هادی سهمی (L) عمود شده است.
ثابت کنید :

$$MH^2+MN^2=2(MS^2+HS^2)$$

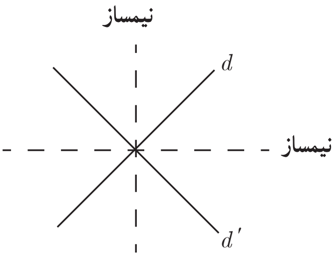
۷ در مثلث ABC، مجموعه نقاطی را مشخص کنید که به رأس A نزدیک‌تر از ضلع BC باشند. (با ذکر دلیل)

۸ در شکل مقابل بیضی E در چهارضلعی $ABCD$ محاط شده است. اگر قطر بزرگ و کوچک به ترتیب $4\sqrt{2}$ و ۴ باشند و فاصلهٔ رأس A از کانون F بیضی، مساوی ۴ واحد باشد، اندازهٔ زاویهٔ AFM و فاصلهٔ A از کانون F' را بیابید.



حل تمرینات

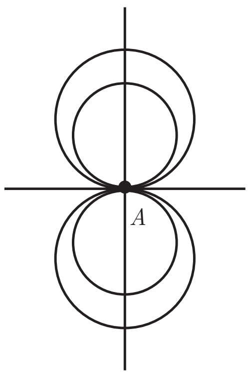
■ تمرین (مکان هندسی)



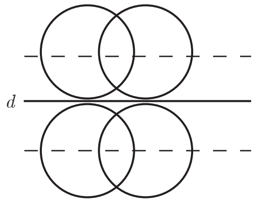
۱ مکان هندسی هریک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید.

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند. این مکان هندسی همان نیمساز دو زاویهٔ حاصل از برخورد دو خط متقاطع می‌باشد.

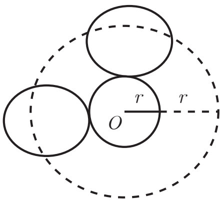
ب) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند. روی خط عمود بر خط d که از A می‌گذرد قرار دارد. نقطه A جز مکان هندسی مطلوب نمی‌باشد و باید محذوف در نظر گرفته شود.



ج) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند. دو خط موازی با خط d می‌باشد که به فاصلهٔ r از خط d رسم شده‌اند.

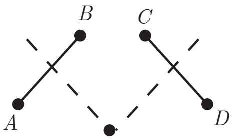


ت) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند روی دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $2r$

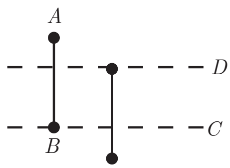


۲ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید)

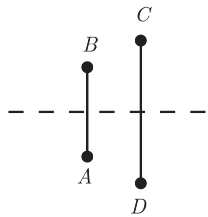
در حالت کلی محل برخورد عمودمنصف‌های AB و CD جواب مسئله است، که شامل حالات زیر می‌شود :



۱ــ یک نقطه



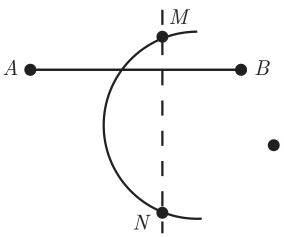
۲ــ هیچ نقطه



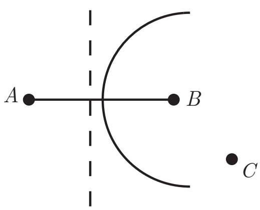
۳ــ بی‌شمار نقطه

۳ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

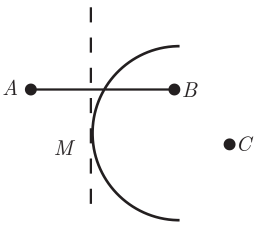
مکان مورد نظر محل برخورد عمودمنصف AB با دایره‌ای است که به مرکز C و شعاع ۳cm رسم شود.



۱ــ دو نقطه

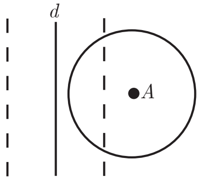


۲ــ هیچ نقطه

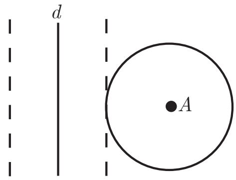


۳ــ یک نقطه

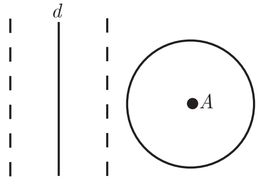
۴ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید) مکان هندسی مورد نظر محل برخورد دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲cm با خطوط موازی d است که به فاصله ۳cm از آن رسم شده‌اند. حالت‌های زیر رُخ می‌دهد.



۱ــ دو نقطه



۲ــ یک نقطه

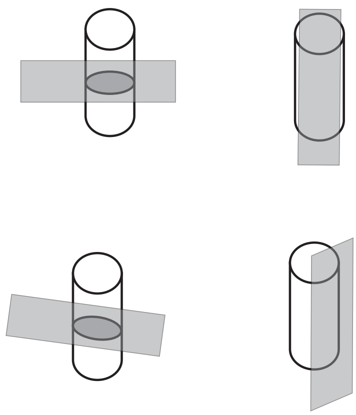


۳ــ هیچ نقطه

۵ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟

دو خط متقاطع

۶ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l مسطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحهٔ P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)



✓اگر صفحهٔ P عمود بر d و l باشد سطح مقطع حاصل یک دایره خواهد بود.

✓اگر صفحهٔ P با d و l زاویهٔ θ بسازد سطح مقطع حاصل یک بیضی خواهد بود.

✓اگر صفحهٔ P موازی d و l باشد مشکل حاصل دو خط موازی است.

✓اگر صفحهٔ P بر سطح استوانه مماس باشد یک خط حاصل می‌شود.

تمرین (دایره)

۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که :

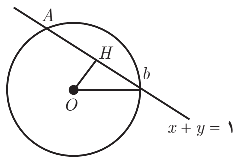
الف) $O(۱,۱)$ مرکز آن و $A(۳,۲)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$$OA = ۲ = \sqrt{(۱-۳)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۵} \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵$$

ب) $O(۲,۱)$ مرکز آن بوده و بر خط $۳x+۴y=۰$ مماس باشد.

$$r = OH = \frac{|۶+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴$$

پ) $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=۱$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.



$$OH = \frac{|-۱-۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow OH^۲ + HB^۲ = OB^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲} + ۱ = OB^۲$$

$$\Rightarrow OB = r = \sqrt{\frac{۱۱}{۲}} \Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۱۱}{۲}$$

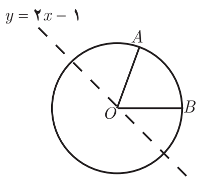
ت) خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.

$$\begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۱ \end{cases} \rightarrow ۲-y=۳ \rightarrow y=-۱$$

$$۲x = ۴ \rightarrow x = ۲ \xrightarrow{O\left|\begin{smallmatrix}۲\\-۱\end{smallmatrix}\right.} (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۱}{۲۵}$$

$$d = r = \frac{|۸-۳-۶|}{\sqrt{۱۶+۹}} = \frac{۱}{۵}$$

ج) از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y=۲x-۱$ شامل قطری از آن باشد.



$$OA = OB = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲} = \sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲}$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x+۱+۴x^۲-۱۲x+۹ = x^۲-۶x+۹+۴x^۲-۴x+۱$$

$$-۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow O\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right.$$

$$OA = r = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰} \qquad (x-۰)^۲+(y+۱)^۲=۱۰ \Rightarrow x^۲+(y+۱)^۲=۱۰$$

۲ حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^{۲}+y^{۲}-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد؟

$$a^{۲}+b^{۲}-۴c>۰ \Rightarrow ۹+۲۵-۴a>۰ \Rightarrow ۴a<۳۴ \Rightarrow a<\frac{۱۷}{۲}$$

۳ وضعیت هر یک از نقاط $A(-۱,-۱)$، $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایره $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y-۵=۰$ تعیین کنید.

$$O(۱,-۲)\,,\, r=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۲۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$$

$OC=\sqrt{۱+۲۵}=\sqrt{۲۶}\Rightarrow OC>r\Rightarrow$ خارج دایره C و A داخل دایره

$OA=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}\Rightarrow OA<r\Rightarrow$ داخل دایره O

$OB=\sqrt{۰+۰}=۰\Rightarrow$ مرکز دایره B و $OD=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow OD=r\Rightarrow$ روی دایره D

۴ وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x^{۲}+y^{۲}=۴$, $x^{۲}+y^{۲}-۲x=۴$

$$\begin{cases}O(۰,۰)\\ r=۲\end{cases}\quad \begin{cases}O'(۱,۰)\\ r'=\frac{\sqrt{۴+۱۶}}{۲}=\sqrt{۵}\end{cases}\qquad \begin{cases}d=۱\\ r+r'=\sqrt{۵}+۲\Rightarrow r-r'<d<r+r'\Rightarrow\\ r-r'=\sqrt{۵}-۲\end{cases}$$ متقاطع

ب) $x^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱$, $(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۱$

$$\begin{cases}O(۰,۱)\\ r=۱\end{cases}\quad \begin{cases}O'(۱,۰)\\ r'=۱\end{cases}\qquad \begin{cases}d=\sqrt{۲}\\ r+r'=۲\Rightarrow r-r'<d<r+r'\Rightarrow\\ r-r'=۰\end{cases}$$ متقاطع

ج) $x^{۲}+y^{۲}=۱$, $x^{۲}+y^{۲}-۳\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}y+۵=۰$

$$O'\left|\begin{matrix}\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\end{matrix}\right.\qquad R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۸+۱۸-۲۰}=۲\qquad OO'=\sqrt{\frac{۱۸}{۴}+\frac{۱۸}{۴}}=۳\qquad ۳=۱+۲$$

$\Rightarrow OO'=R+R'\Rightarrow$ مماس خارج‌اند

د) $x^۲+y^۲=۱$, $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$

$$\begin{cases}O(۰,۰)\\ r=۱\end{cases}\quad \begin{cases}O'(۳,۰)\\ r'=\dfrac{\sqrt{۳۶+۴-۳۶}}{۲}=۱\end{cases}\quad \begin{cases}d=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}\\ r+r'=۲\Rightarrow d>r+r'\Rightarrow\\ r-r'=۰\end{cases}$$ متخارج

۵ نقاط $A(-۱,-۱)$, $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند، معادلهٔ دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به‌دست آورید.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰\Rightarrow\begin{cases}A\Rightarrow ۱+۱-a-b+c=۰\\ B\Rightarrow ۱+۱+a+b+c=۰\\ C\Rightarrow ۱+۹+a-۳b+c=۰\end{cases}\Rightarrow c=-۲\Rightarrow a=-۲,b=۲$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲=۰\Rightarrow O\begin{vmatrix}۱\\-۱\end{vmatrix}$$

$$m_{OB}=\frac{-۱-۱}{۱-۱}=\text{ت.ن}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=۰\Rightarrow y-۱=۰(x-۱)\Rightarrow y=۱$$

۶ وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $۳x+۴y=۰$, $x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$

$$\begin{cases}O(۲,۲)\\ r=\dfrac{\sqrt{۱۶+۱۶-۲۸}}{۲}=۱\end{cases}\Rightarrow OH=\frac{|۶+۸|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow OH>r\Rightarrow$$ خط دایره را قطع نمی‌کند

ب) $x+y=۲$, $x^۲+y^۲=۲$

$$\begin{cases}O(۰,۰)\\ r=\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow OH=\frac{|۰+۰-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}\Rightarrow OH=r\Rightarrow$$ خط بر دایره مماس است

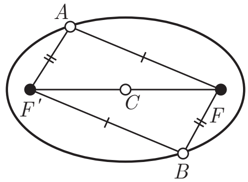
ج) $x+y=۱$, $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۲$

$$\begin{cases}O(۱,۱)\to OH=\dfrac{|۱+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\\ r=\dfrac{\sqrt{۴+۴+۸}}{۲}=۲\end{cases}\Rightarrow OH<r\Rightarrow$$ متقاطع

تمرین (سهمی)

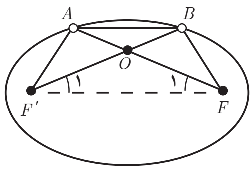
۱ دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است اگر $AF'=BF$ باشد، نشان دهید :

الف) درحالتی‌که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند با هم موازی‌اند.



$$\left.\begin{matrix} AF'+AF=2a \\ BF'+BF=2a \\ BF=AF' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AF=BF' \Rightarrow AFBF' \text{ چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است } \Rightarrow AF \parallel BF'$$

ب) درحالتی‌که AF و BF'یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



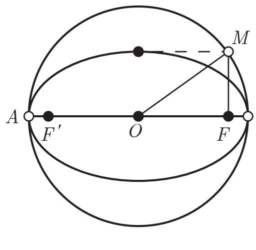
$$\left.\begin{matrix} AF'+AF=2a \\ BF'+BF=2a \\ BF=AF' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AFF'}=\overset{\Delta}{BFF'} \Rightarrow \begin{cases} AF=BF' \\ \hat{F}_1=\hat{F}'_1 \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{MFF'} \text{ متساوی الساقین}$$

۲ قطر دایرۀ C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای M مانند قطع کند، ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

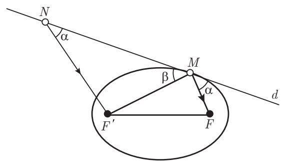
$OA=a$, $OF=c \Rightarrow OM=R=a$

$\overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow OM^2=OF^2+MF^2 \Rightarrow a^2=c^2+MF^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2=a^2-MF^2 \\ c^2=a^2-b^2 \end{cases} \Rightarrow MF^2=b^2 \Rightarrow MF=b$$



۳ در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های بیضی F و F' مشخص شده‌اند خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند، ثابت کنید : $NF'=MF'$



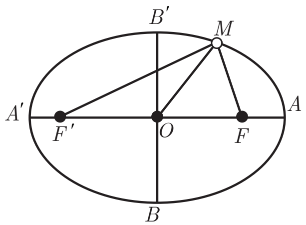
$$\left.\begin{array}{l} \hat{\alpha}=\hat{\beta} \quad \text{می‌دانیم} \\ MF \parallel NF', d \ \text{مورب} \Rightarrow \angle N=\angle \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{N}=\hat{\beta}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{FMN} \ \text{متساوی الساقین} \Rightarrow NF'=MF'$$

۴ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است :

الف) نشان دهید $OM=OF=OF'$

$c^۲=a^۲=b^۲ \Rightarrow c^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow c=۴ \Rightarrow OF'=OF=OM=۴$



ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

چون OM میانهٔ نظیر ضلع $F'F$ است و با نصف آنها برابر است پس مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.

$MF+MF'=۱۰ \Rightarrow MF=۱۰-MF'$

$MF^۲=MF'^۲=FF'^۲ \Rightarrow (۱۰-MF')^۲+MF'^۲=۶۴ \Rightarrow ۲MF'-۲۰MF'+۳۶=۰$

$\Rightarrow MF'^۲-۱۰MF'+۱۸=۰$

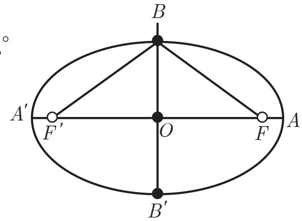
$$MF'=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۱۸}}{۱} \Rightarrow MF'=۵\pm\sqrt{۷} \Rightarrow MF=۵\mp\sqrt{۷} \Rightarrow \begin{cases} MF'=۵+\sqrt{۷} \\ MF=۵-\sqrt{۷} \end{cases}$$

۵ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟

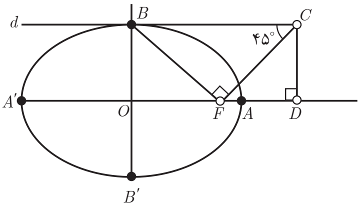
$a = ۲b$

$c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۴b^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b$

$\tan O\hat{B}F = \dfrac{OF}{OB} = \dfrac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow O\hat{B}F = ۶۰^\circ \Rightarrow FBF' = ۱۲۰^\circ$



۶ در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ c قطع کند و از c عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$ ، مقدار $\dfrac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.



$AF = a - c$

$FD = b = \sqrt{a^۲ - b^۲} = \sqrt{c^۲} = c$

$AD = FD - FA = c - (a - c) = ۲c - a$

$\dfrac{AD}{AF} = \dfrac{۲c - a}{a - c}$

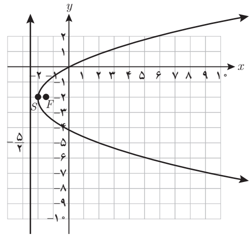
۷ سهمی $y^۲ = ۲x - ۴y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

$y^۲ + ۴y + ۴ - ۴ = ۲x \Rightarrow (y+۲)^۲ = ۲x + ۴ \Rightarrow (y+۲)^۲ = ۲(x+۲)$ سهمی افقی

رأس $S(-۲,-۲)$ $\qquad ۴a = ۲ \to a = \dfrac{۱}{۲}$ $\qquad F\left|\begin{matrix} h+a \\ k \end{matrix}\right.$ $\qquad F\left|\begin{matrix} -۲+\frac{۱}{۲} \\ -۲ \end{matrix}\right.$ $\qquad F\left|\begin{matrix} -\frac{۳}{۲} \\ -۲ \end{matrix}\right.$

محل برخورد با محور xها $\Rightarrow y = ۰ \Rightarrow ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$ $\qquad A\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right.$

محل برخورد با محور yها $\Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y^۲ = -۴y \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ & B\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right. \\ y = -۴ & C\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۴ \end{matrix}\right. \end{cases}$



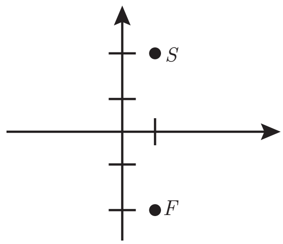
۸ مختصات رأس و کانون سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را به‌دست آورید. $(a\neq ۰)$

$$\frac{y}{a}=x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\Rightarrow \frac{y}{a}=x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}+\frac{c}{a}\Rightarrow \frac{y}{a}=(a+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{b^۲}{۴a^۲}+\frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{a}+\frac{b^۲}{۴a^۲}-\frac{c}{a}=(a+\frac{b}{۲a})^۲\Rightarrow (x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{۱}{a}(y+\frac{b^۲}{۴a^۲}-c)$$ سهمی قائم

$$۴p=\frac{۱}{a}\Rightarrow p=\frac{۱}{۴a}\qquad F\left|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\ \frac{۴ac-b^۲}{۴a}+\frac{۱}{۴a}\end{matrix}\right.\qquad F\left|\begin{matrix}h\\ k+P\end{matrix}\right.\qquad S\left|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\ \frac{۴ac-b^۲}{۴a}\end{matrix}\right.\qquad S\left|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\ c-\frac{b^۲}{۴a}\end{matrix}\right.$$ رأس

۹ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $S(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد.



$SF=۴\Rightarrow a=۴$

$(x-h)^۲=۴a(y-k)\Rightarrow (x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

۱۰ سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$$y^۲=۴(x-۱)\qquad S\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$۴a=۴\Rightarrow a=۱\Rightarrow F=O\left|\begin{matrix}\alpha+a=۱+۱=۲\\ \beta=۰\end{matrix}\right.$$

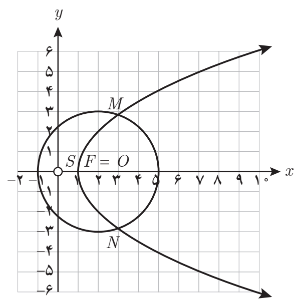
$$(x-۲)^۲+(y-۰)^۲=۹\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۵=۰$$

$$\begin{cases}y^۲=۴x-۴\\ y^۲=-x^۲+۴x+۵\end{cases}\Rightarrow ۴x-۴=-x^۲+۴x+۵\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳$$

$x=۳\Rightarrow y^۲=۸\Rightarrow y=\pm۲\sqrt{۲}$

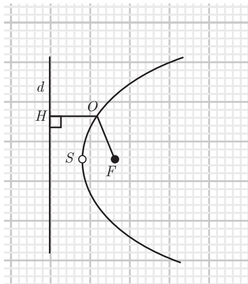
$x=-۳\Rightarrow y^۲=-۱۶$

$$M\left|\begin{matrix}۳\\ ۲\sqrt{۲}\end{matrix}\right.\qquad N\left|\begin{matrix}۳\\ -۲\sqrt{۲}\end{matrix}\right.$$



۱۱ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

با توجه به اینکه OH و OF شعاع دایره هستند پس با هم برابرند یعنی : $OH=OF=r$
که این تعریف سهمی است پس نقطهٔ O روی سهمی قرار گرفته است.

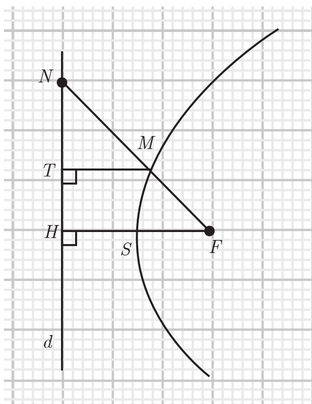


۱۲ در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم، ثابت کنید : $\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$

$$MF = MT\,,\ FA = AH$$

$$\overset{\Delta}{NMT} \sim \overset{\Delta}{NFH} \Rightarrow \frac{NM}{NF}=\frac{MT}{FH} \Rightarrow \frac{NM}{NF}=\frac{MF}{۲FA} \Rightarrow \frac{MN}{MF}=\frac{NF}{۲FA}$$

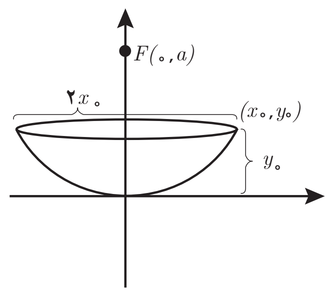
$$MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MN}{MF}=\frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$



۱۳ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن را به‌دست آورد. او از معلم‌اش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

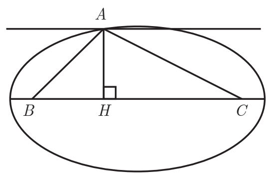
$(x-0)^2=4a(y-0) \Rightarrow x^2=4ay$

نقطهٔ روی سهمی $\xrightarrow{(x_0,y_0)} x_0^2=4ay_0 \to a=\frac{x_0^2}{4y_0}$



۱۴ فرض کنید از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد. با استفاده از خواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را توضیح دهید.

با داشتن BC (کانون‌ها به فاصلهٔ BC از هم قرار دارند) وسط آنها را O مرکز بیضی در نظر گرفته و از دو طرف به اندازهٔ $p-c$ یعنی محیط منهای BC روی امتداد BC انتخاب کرده تا دور آن بیضی پدید آیند. با داشتن O و C می‌توان b را محاسبه کرد و بیضی را رسم کرد.



$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=(p-c)^2-c^2 \Rightarrow b=\sqrt{p^2-pc}$

$AB+AC+BC=2p \Rightarrow AB+AC=2p-BC \Rightarrow 2a=2p-BC$

$AH<H \Rightarrow$ ۴ جواب

$AH=H \Rightarrow$ ۲ جواب

$AH>H \Rightarrow$ جواب ندارد

بیضی با کانون‌های B و C و رأس A نقطه‌ای از بیضی که قطر بزرگ بیضی $2a$ است رسم می‌کنیم خط موازی BC به فاصلهٔ AH از آن رسم می‌کنیم.

۱۵ سهمی $y=x^۲$ و دو خط موازی $d_۱: y=ax+b$ و $d_۲: y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند در نظر بگیرید :

الف) معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط $d_۱$ و سهمی $y=x^۲$ باشد.

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ y = ax+b \end{cases} \Rightarrow x^۲ = ax+b \Rightarrow x^۲ - ax - b = ۰$$

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط $d_۱$ و سهمی باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطهٔ M را به‌دست آورید.

$$\text{ریشه‌ها} \Rightarrow \alpha, \beta \Rightarrow A\begin{vmatrix}\alpha \\ a\alpha+b\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}\beta \\ a\beta+b\end{vmatrix} \Rightarrow M\begin{vmatrix}\dfrac{\alpha+\beta}{۲} \\ \dfrac{a\alpha+b+a\beta+b}{۲}\end{vmatrix} \quad M\begin{vmatrix}\dfrac{a}{۲} \\ \dfrac{a^۲+۲b}{۲}\end{vmatrix}$$

پ) مراحل الف و ب را با جای گذاری خط $d_۲$ با $d_۱$ انجام دهید و مختصات نقطهٔ M' (نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط $d_۲$ و سهمی) را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ y = ax+b' \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ax - b' = ۰$$

$$\text{ریشه‌ها} \Rightarrow \alpha', \beta' \Rightarrow A\begin{vmatrix}a' \\ a\alpha'+b'\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}\beta' \\ a\beta'+b'\end{vmatrix} \Rightarrow M'\begin{vmatrix}\dfrac{\alpha'+\beta'}{۲} \\ \dfrac{a\alpha'+a\beta'+۲b'}{۲}\end{vmatrix} \quad M'\begin{vmatrix}\dfrac{a}{۲} \\ \dfrac{a^۲+۲b'}{۲}\end{vmatrix}$$

ت) خط MM' نسبت به محور yها چه وضعیتی دارد؟

$$m_{MM'} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{y_۲ - y_۱}{۰} = \text{ت ن} \Rightarrow$$ موازی محور yها

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

دو خط دلخواه $d_۱$ و $d_۲$ را موازی هم رسم می‌کنیم تا سهمی را در دو نقطه قطع کند. وسط آنها را M و M' می‌نامیم MM' موازی محورتقارن است. سپس در نقطه‌ای دلخواه عمودی بر خط MM' رسم می‌کنیم تا سهمی را در دو نقطهٔ M و N سهمی را قطع کند. عمودمنصف MN همان محور تقارن سهمی است که از رأس آن هم می‌گذرد.