۳

فصل سوم

روابط طولی در شکل‌های هندسی

عکس: فرهاد کولی‌وند

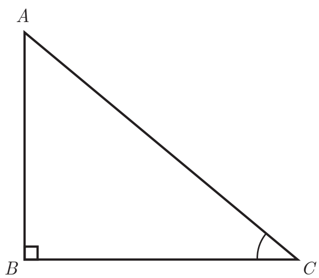
یکی از کاربردهای مهم روابط طولی، محاسبهٔ فاصله‌های غیر قابل دسترس است.

تصویر عنوانی

محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس، یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. محاسبه ارتفاع کوه‌های بلند از جمله این محاسبه‌ها است. تصویر ابتدای این فصل، مربوط به اُشتران کوه، معروف به آلپ ایران، رشته کوهی در شرق استان لرستان و یکی از بلندترین رشته کوه‌های زاگرس است. سن‌بران بلندترین قلهٔ این رشته کوه به ارتفاع ۴۱۵۰ متر است. این رشته کوه، سرچشمه یکی از سرشاخه‌های رود دز به نام ماربره است که در دوره کوه‌زایی جدید ایجاد شده است. این کوه از جمله کوه‌های جوان است که حدود ۳۰ میلیون سال پیش ایجاد شده است. قله‌های بلند و پربرف، دره‌های ژرف و طولانی، رودهای دائمی، پوشش گیاهی و جانوری بسیار متنوع و روستاهای کوهپایه‌ای از جمله ویژگی‌های اشتران‌کوه می‌باشد که، به سبب بلندی، از فاصله ۱۰۰ کیلومتری نیز به خوبی پیداست. گفته می‌شود این رشته‌کوه، به سبب وجود قله‌های ۸ گانه، که هر یک بلندتر از ۴۰۰۰ متر و مانند کاروانی از شتر به ردیف قرار گرفته است، به شتر کوه و یا اشتران‌کوه معروف شده است.

همان‌گونه که در تصویر دیده می‌شود، در مثلث ABC به کمک دوربین زاویه‌سنج (طول‌یاب) زاویه دید AB از نقطه دید C ($\hat{C}$) و طول AC اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها ارتفاع قله (AB) به دست می‌آید.

$$\frac{AC}{\sin ۹۰} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{AC.\sin C}{\sin ۹۰^\circ} = AC.\sin C$$



- روابط طولی در مثلث
  - قضیهٔ سینوس‌ها
    - برخی از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه
  - قضیه کسینوس‌ها
  - قضیهٔ نیمسازهای زاویه‌های داخلی و محاسبه طول نیمسازها
    - قضیهٔ نیمسازهای زاویه‌های داخلی
    - محاسبهٔ طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث
  - قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)
    - محاسبه مساحت مثلث به کمک دستور هرون
    - محاسبه ارتفاع‌های مثلث به کمک دستور هرون
    - محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل چهار درس است که در آن به روابط طولی در هر مثلث دلخواه اشاره می‌شود. در هندسه (۱) برخی از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه بیان و اثبات شد. در این فصل، قضیه سینوس‌ها، قضیه کسینوس‌ها، قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی و محاسبه طول آنها و قضیه هرون بیان و اثبات می‌شود. در درس چهارم می‌توان با استفاده از دستور هرون، طول ارتفاع‌های نظیر اضلاع هر مثلث را محاسبه کرد. در این درس، دستور دیگری نیز برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی بیان شده است.

درس اوّل

قضیه سینوس‌ها

اهداف درس

در پایان این درس از دانش‌آموز انتظار می‌رود بتواند :

۱ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه را بیان کند؛

۲ با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، مسائل مرتبط را حل کند؛

۳ قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه را بیان کند؛

۴ نشان دهد قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه برقرار است؛

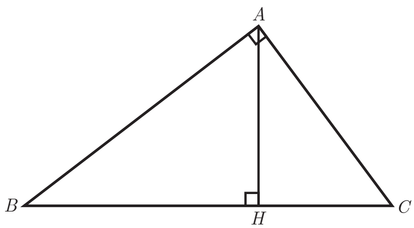
۵ در حل مسائل مرتبط، از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده کند؛

۶ نمونه‌هایی از کاربرد قضیه سینوس‌ها در زندگی را مثال بزنند.

روش تدریس درس اوّل

معلم در ابتدا می‌تواند، با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه و ارتفاع نظیر وتر، روابط طولی ذکر شده در کتاب هندسه (۱) را یادآوری کند. همچنین می‌تواند بیان فارسی روابط طولی را از دانش‌آموزان بخواهد تا این روابط به صورت بهتری در ذهن دانش‌آموزان ماندگار شود.

۱ و ۲ $\begin{matrix} AB^{۲} = BC.BH \\ AC^{۲} = BC.CH \end{matrix}$ ، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع زاویه قائمه برابر است با حاصل‌ضرب اندازه وتر در اندازه تصویر آن ضلع بر وتر.



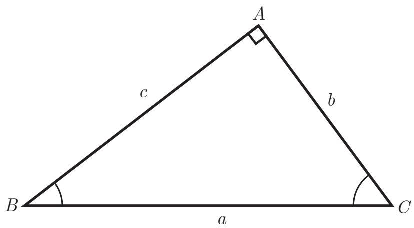
۳ $AH^{2} = BH . CH$، در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین اندازه دو قطعه روی وتر است.

۴ $AB^{2} + AC^{2} = BC^{2}$، رابطه فیثاغورس : در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازه وتر برابر است با مجموع مربع‌های اندازه دو ضلع زاویه قائمه.

۵ $AB . AC = BC . AH$، در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل‌ضرب اندازه‌های اضلاع زاویه قائمه برابر است با اندازه وتر در اندازه ارتفاع وارد بر وتر.

ــ در ادامه درس، با طرح سه فعالیت، قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه اثبات می‌شود.

ــ **در فعالیت (۱)** معلم می‌تواند، با یادآوری تعریف نسبت‌های مثلثاتی و تکمیل جاهای خالی توسط دانش‌آموزان، به این نتیجه برسد که در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن، برابر است با اندازه وتر.



$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

$$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

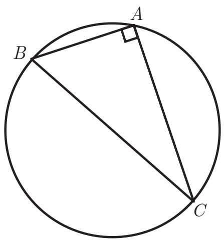
$$\sin A = \sin 90^\circ = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$

ــ در ادامه، قضیه سینوس‌ها در سه حالت اثبات می‌شود :

حالت اوّل : $\hat{A}$ قائمه باشد.

حالت دوم : $\hat{A}$ حاده باشد.

حالت سوم : $\hat{A}$ منفرجه باشد.



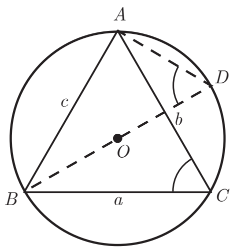
حالت اوّل در فعالیت (۱) : و حالت دوم و سوم در فعالیت (۲) بررسی می‌شود.

فعالیت (۲) : انجام دادن این فعالیت، نیازمند یادآوری دو مطلب توسط معلم است :

۱ عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند؛

۲ نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، مرکز دایره محیطی مثلث است. پس از یادآوری این مطالب، دانش‌آموز به این نتیجه می‌رسد که مرکز دایره محیطی در این شکل، وسط وتر BC در مثلث قائم‌الزاویه ABC است؛ و چون $\hat{A}$ مساوی ۹۰° است و همچنین $\hat{A}$ محاطی است، پس باید روبه‌رو به قطر دایره باشد؛ یعنی وتر مثلث ABC همان قطر دایره است. معلم در پایان، بر نتیجه این فعالیت چنین تأکید می‌کند : «در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن ضلع، برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.»

فعالیت (۳) : دانش‌آموزان در این فعالیت با پاسخ به موارد ۱ و ۲ و ۳ و ۴، حالت دوم قضیه سینوس‌ها در مثلث دلخواه $ABC(\hat{A} < ۹۰^\circ)$ را اثبات می‌کنند.



۱ زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ محاطی روبه‌روی کمان AB و اندازه آنها برابر با نصف کمان AB است.

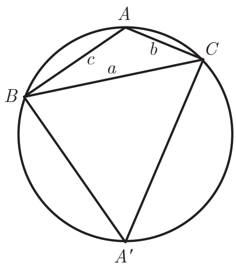
۲ مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؛ چون محاطی روبه‌رو به قطر است.

۳ با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ داریم :

$$\sin C = \sin D \ , \ \sin D = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{c}{۲R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

۴ دانش‌آموز در این قسمت به طور مشابه به این نتایج دست می‌یابد :

$$\frac{a}{\sin A} = ۲R \ , \ \frac{b}{\sin B} = ۲R$$



۵ دانش‌آموز با پاسخ‌گویی به سؤالات این قسمت، قضیه سینوس‌ها در حالت سوم یعنی مثلث $ABC(\hat{A} > ۹۰^\circ)$ را اثبات می‌کند؛ نقطه‌ای دلخواه (A') روی کمان BC را در نظر می‌گیرد و آن را به B و C وصل می‌کند. زاویه‌های A و A' نسبت به یکدیگر مکمل‌اند؛ زیرا :

$$\hat{A} + \hat{A}' = \frac{\widehat{BA'C}}{۲} + \frac{\widehat{BAC}}{۲} = \frac{\widehat{BA'C} + \widehat{BAC}}{۲} = \frac{۳۶۰}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

و چون $\hat{A} > ۹۰^\circ$ است پس $\hat{A}'$ حاده است.

می‌دانیم : $\sin A = \sin(۱۸۰ - \hat{A}') = \sin A'$

اکنون در مثلث $A'BC$، طبق نتیجه قسمت (۳)، می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{a}{\sin A'} = ۲R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = ۲R$$

بنابراین : در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن، برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.

معلم در ادامه، قضیه سینوس‌ها را بیان می‌کند.

قضیهٔ سینوس‌ها : در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$ داریم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

ــ **مثال ۱** : این سؤال به کمک قضیه سینوس‌ها حل می‌شود و برای زاویهٔ B دو جواب به دست می‌آید.

$\hat{B} = ۱۳۵^\circ$ قابل قبول نیست؛ چون مثلث ABC نمی‌تواند دو زاویه منفرجه داشته باشد.

ــ **مثال ۲** : این مثال، یک مثال کاربردی از قضیه سینوس‌هاست که با الگوسازی و رسم مثلث حل می‌شود.

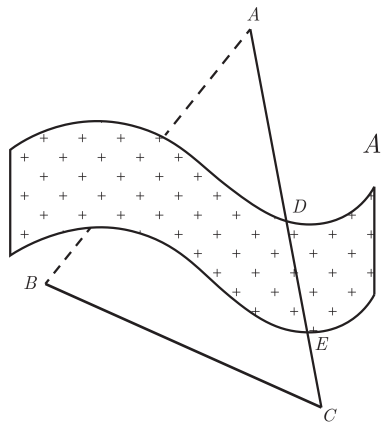
«در کار در کلاس»، مسئلهٔ کاربردی دیگری از قضیه سینوس‌ها آورده شده که دانش‌آموزان، با تکمیل راه‌حل، فاصله دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه را به دست می‌آورند :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin\left(۱۸۰ - (B + C)\right)} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B + C)}$$

در حل این مسئله از این نکته استفاده می‌شود : با توجه به اینکه مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، داریم :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰ - (\hat{B} + \hat{C})$$

در ادامه حل سؤال، با جای‌گذاری اندازه‌های داده شده در فرمول، طول تقریبی AB به دست می‌آید :

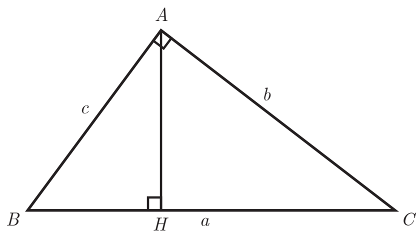


$$AB=\frac{۳\times\sin ۶۰}{\sin(۶۰+۷۰)}=\frac{۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sin(۱۸۰-۵۰)}=\frac{۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sin ۵۰}\simeq ۳/۳۹$$

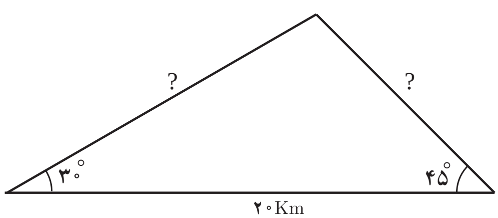
حل تمرین‌های درس اوّل

۱ از سمت راست تساوی شروع می‌کنیم و به سمت چپ تساوی می‌رسیم. در حل این سؤال از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، که در ابتدای درس یادآوری شد، استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=\frac{۱}{a.HC}+\frac{۱}{a.BH}=\frac{۱}{a}\left(\frac{۱}{HC}+\frac{۱}{BH}\right)=\frac{۱}{a}\times\frac{HC+BH}{HC.BH}=\frac{۱}{a}\times\frac{a}{h_a^۲}=\frac{۱}{h_a^۲}$$



۲ در حل این سؤال باید سینوس ۱۰۵° را به دست آوریم.



$$\sin ۱۰۵^{\circ} = \sin\left(۱۸۰-(۳۰+۴۵)\right) = \sin(۳۰+۴۵) =$$

$$\sin ۳۰ \times \cos ۴۵ + \cos ۳۰ \times \sin ۴۵ = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴} + \frac{\sqrt{۶}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

$$\frac{x}{\sin ۳۰} = \frac{y}{\sin ۴۵} = \frac{۲۰}{\sin ۱۰۵} \Rightarrow x = \frac{۲۰ \times \sin ۳۰}{\sin ۱۰۵} = \frac{۲۰ \times \frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}} = \frac{۴۰}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}$$

$$= \frac{۴۰\left(\sqrt{۲}-\sqrt{۶}\right)}{-۴} = ۱۰\left(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}\right)$$

$$y = \frac{۲۰ \times \sin ۴۵}{\sin ۱۰۵} = \frac{۲۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}} = \frac{۴۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}} = ۲۰\sqrt{۳} - ۲۰$$

درس دوم

قضیه کسینوس‌ها

اهداف درس

در پایان این درس از دانش‌آموز انتظار می‌رود بتواند :

۱ قضیه کسینوس‌ها در هر مثلث را بیان کند؛

۲ اثبات قضیه کسینوس‌ها در هر مثلث را نشان دهد؛

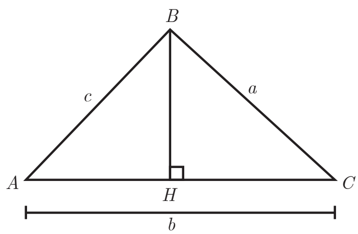
۳ نمونه‌هایی از کاربرد قضیه کسینوس‌ها در زندگی را مثال بزند؛

۴ مسائلی را که در حل آنها از قضیه کسینوس‌ها استفاده می‌شود از دیگر مسائل تمییز دهد.

روش تدریس درس دوم

در ابتدای تدریس، معلّم می‌تواند با طرح این سؤال، ذهن دانش‌آموزان را آماده کند : می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه رابطه‌ای بین اضلاع وجود دارد. آیا تا به حال فکر کرده‌اید که ممکن است در هر مثلث دلخواه، بین اضلاع رابطه‌ای باشد.

در فعالیت (۱) هدف این است که دانش‌آموز با تکمیل جاهای خالی برای هر مثلث دلخواه ABC در دو حالت $(\hat{A}<۹۰^\circ , \hat{A}>۹۰^\circ)$ به این نتیجه برسد که قضیه کسینوس‌ها در هر مثلث دلخواه برقرار است.



ـ در مثلث ABC $(\hat{A}<۹۰^\circ)$، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. دانش‌آموز به کمک نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه، جاهای خالی را تکمیل می‌کند.

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c.\cos A\ ,\ CH = b - AH = b - c.\cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c.\sin A$$

$$\Delta BHC : BC^{۲} = BH^{۲} + CH^{۲} \Rightarrow a^{۲} = (c.\sin A)^{۲} + (b - c.\cos A)^{۲}$$

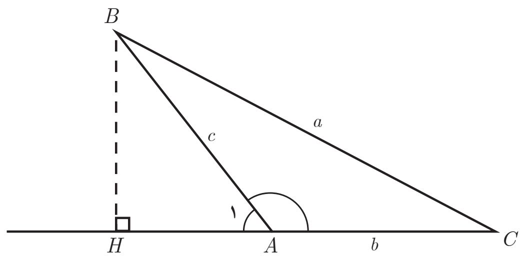
در ادامه به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی $(\sin^{۲} A + \cos^{۲} A = ۱)$ رابطه $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A$ به‌دست می‌آید.

$$a^{۲} = (c.\sin A)^{۲} + (b - c.\cos A)^{۲} = c^{۲}\sin^{۲} A + b^{۲} - ۲bc\cos A + c^{۲}.\cos^{۲} A$$

$$= c^{۲}\underbrace{(\sin^{۲} A + \cos^{۲} A)}_{۱} + b^{۲} - ۲bc\cos A \Rightarrow a^{۲} = c^{۲} + b^{۲} - ۲bc\cos A$$

در قسمت بعدی فعالیت (۱) با درنظرگرفتن مثلث ABC $(\hat{A} > ۹۰^\circ)$، ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه زاویه $A_۱$ خارجی رأس A است، داریم :

$$\hat{A}_۱ = ۱۸۰ - \hat{A} \Rightarrow \begin{cases} \sin \hat{A}_۱ = \sin A \\ \cos \hat{A}_۱ = -\cos A \end{cases} \quad (۱)$$



در مثلث ABH با نوشتن تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم :

$$\cos A_۱ = \frac{AH}{C}, \sin A_۱ = \frac{BH}{C} \Rightarrow AH = c.\cos A_۱ \overset{(۱)}{=} -c\cos A\ , BH = c.\sin A_۱ \overset{(۱)}{=} c.\sin A$$

$$CH = b + AH = b - c.\cos A$$

$$\Delta BHC:\ BC^{۲} = BH^{۲} + CH^{۲} \Rightarrow a^{۲} = (c.\sin A)^{۲} + (b - c.\cos A)^{۲} =$$

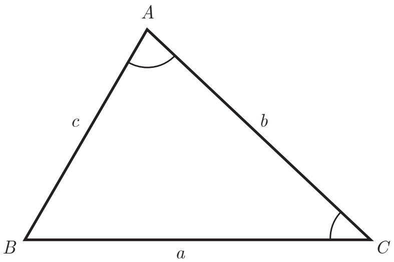
$$C^{۲}\sin^{۲}A+b^{۲}-۲bc\cos A+c^{۲}.\cos^{۲}A=C^{۲}(\underbrace{\sin^{۲}A+\cos^{۲}A}_{۱})+b^{۲}-۲bc\cos A$$
$$\Rightarrow a^{۲}=c^{۲}+b^{۲}-۲bc\cos A$$

ــ در پاسخ به سؤال آخر این فعالیت، دانش‌آموز در می‌یابد که اگر زاویه A قائمه باشد، پس کسینوس زاویه A صفر می‌شود و رابطه به‌صورت $a^{۲}=c^{۲}+b^{۲}$ در می‌آید که همان رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه است.

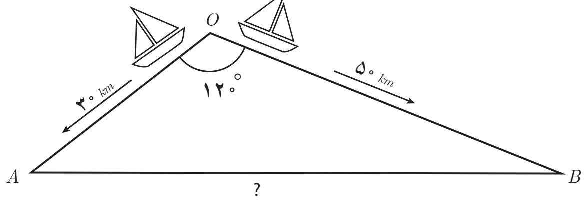
پس از انجام دادن فعالیت توسط دانش‌آموز، قضیه کسینوس‌ها توسط معلم بیان می‌شود.

قضیه کسینوس‌ها : در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها.

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc.\cos A \qquad b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}-۲ac.\cos B$$
$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab.\cos C$$

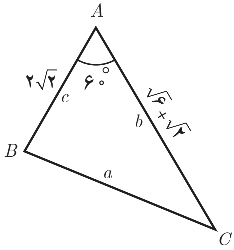


در ادامه، یک مثال کاربردی از قضیه کسینوس‌ها مطرح و پیشنهاد می‌شود معلم از ابتدا مسافتی را که هر قایق پس از نیم‌ساعت طی می‌کند از دانش‌آموزان سؤال کند و اعداد حاصل را برروی شکل (برحسب واحد کیلومتر) بنویسد.



ــ در سؤال ۱ «کار در کلاس»، دانش‌آموز به این نتیجه می‌رسد که اگر در مثلثی اندازه دو ضلع و زاویه بین آنها مشخص باشد، آنگاه به کمک قضیه کسینوس‌ها می‌توان اندازه ضلع سوم را به‌دست آورد.

$$BC^{۲}=(۲\sqrt{۲})^{۲}+(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۲}-۲\times۲\sqrt{۲}\times(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\times\cos ۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow BC^{۲}=۸+(۸+۲\sqrt{۱۲})^{۲}-۲\sqrt{۱۲}-۴\Rightarrow BC^{۲}=۱۲\ ,\ BC=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$



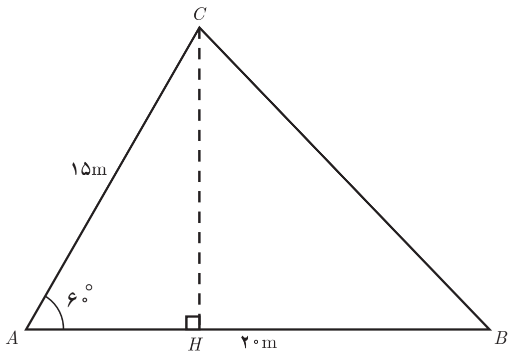
ـ در سؤال ۲ «کار در کلاس» به کمک قضیه سینوس‌ها، اندازه $\hat{C}$ به‌دست می‌آید.

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰}\Rightarrow \sin C=\frac{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat{C}=۴۵^\circ$$
$$\Rightarrow\hat{B}=۱۸۰-(۶۰+۴۵)=۷۵^\circ$$

حل تمرین‌های درس دوم

۱ الف)

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB.AC.\cos A$$
$$BC^۲=۲۰^۲+۱۵^۲-۲\times۲۰\times۱۵\times\cos۶۰\Rightarrow$$
$$BC^۲=۴۰۰+۲۲۵-۳۰۰=۳۲۵\ ,\ BC=\sqrt{۳۲۵}=۵\sqrt{۱۳}\ (m)$$ طول درخت



ب) قسمت ب سؤال را می‌توان به دو روش حل کرد :

روش اوّل) استفاده از قضیه سینوس‌ها

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۱۵}{\sin B}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\sin B=\frac{۱۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۵\sqrt{۱۳}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}\simeq ۰/۷۲$$

$$\Rightarrow\sin B\simeq ۰/۷۲\xrightarrow{\text{به کمک ماشین حساب}}\hat{B}\simeq ۴۶^\circ$$

روش دوم) استفاده از قضیه کسینوس‌ها

$$۱۵^۲=۲۰^۲+(۵\sqrt{۱۳})^۲-۲\times۲۰\times(۵\sqrt{۱۳}).\cos B\Rightarrow ۲۲۵=۴۰۰+۳۲۵-۲۰۰\sqrt{۱۳}\cos B\Rightarrow$$

$$۲۰۰\sqrt{۱۳}\cos B=۵۰۰\Rightarrow\cos B=\frac{۵}{۲\sqrt{۱۳}}\times\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۲۶}\simeq ۰/۶۹$$

$$\cos B\simeq ۰/۶۹\xrightarrow{\text{به کمک ماشین حساب}}\hat{B}\simeq ۴۶^\circ$$

پ)

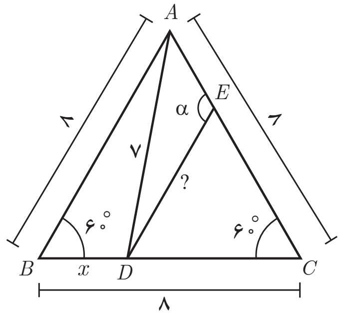
$$\sin A=\frac{CH}{AC}\Rightarrow CH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱۵=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$$

۲

$$\overset{\Delta}{ABD}\ ,\ ۷^۲=۸^۲+x^۲-۲\times۸\times x\times\cos۶۰^\circ$$

$$۴۹=۶۴+x^۲-۸x\Rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰\Rightarrow(x-۳)(x-۵)=۰\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=۳\\x=۵\end{cases}\xRightarrow{CD>BD}x=۳\ \text{ق ق}\Rightarrow DC=۸-۳=۵$$



برای به‌دست آوردن فاصله نقطه E از D، دو روش مطرح می‌شود :

روش اول)

$$EC = DC = ۵ \Rightarrow \overset{\Delta}{EDC} \text{ متساوی‌الساقین } , \ \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{E} = \hat{D} = \frac{۱۸۰-۶۰}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow$$
$$\overset{\Delta}{EDC} \text{ متساوی‌الساقین } \Rightarrow ED = ۵$$

روش دوم)

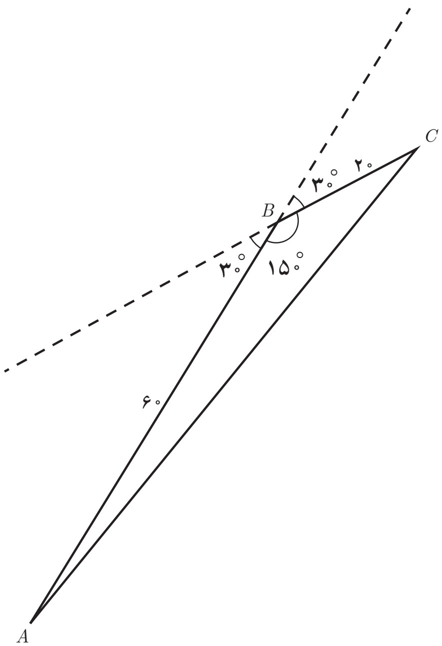
$$ED^۲ = ۵^۲ + ۵^۲ - ۲ \times ۵ \times ۵ \times \cos ۶۰^\circ = ۲۵ + ۲۵ - ۲۵ = ۲۵ \Rightarrow ED = ۵$$

$$A\hat{E}D = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

۳

$$d = V.t \Rightarrow \begin{cases} AB = ۶۰ \times ۱ = ۶۰\ km \\ AC = ۴۰ \times ۰/۵ = ۲۰ km \end{cases}$$

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC \,.\, AB \,.\, \cos ۱۵۰^\circ$$
$$BC^۲ = ۶۰^۲ + ۲۰^۲ - ۲ \times ۶۰ \times ۲۰ \times \cos(۱۸۰ - ۳۰) = ۳۶۰۰ + ۴۰۰ + ۲۴۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$= ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} \Rightarrow BC = \sqrt{۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳}} \simeq ۷۷/۹۶$$



۴

$$\Delta AMC\,,\ b^{۲} = AM^{۲} + (\frac{a}{۲})^{۲} - ۲\times AM\times\frac{a}{۲}\times\overbrace{\cos(۱۸۰-\alpha)}^{-\cos\alpha}\ ①$$

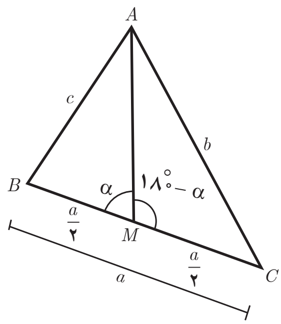
$$\Delta AMB\,,c^{۲} = AM^{۲} + (\frac{a}{۲})^{۲} - ۲\times AM\times\frac{a}{۲}\times\cos\alpha\ ②$$

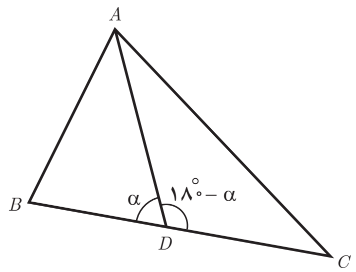
طرفین تساوی‌های ۱ و ۲ را با یکدیگر جمع می‌کنیم. اکنون داریم :

$$b^{۲} + c^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲}$$ (قضیه میانه‌ها)

حالت خاص؛ $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۸$

$$۶^{۲} + ۴^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{۸^{۲}}{۲} \Rightarrow ۳۶ + ۱۶ = ۲AM^{۲} + ۳۲ \Rightarrow ۲AM^{۲} = ۲۰ \Rightarrow AM^{۲} = ۱۰ \Rightarrow AM = \sqrt{۱۰}$$





۵ برای اثبات قضیه استوارت؛ از طرف راست تساوی شروع می‌کنیم و با جایگذاری، به‌طرف چپ تساوی می‌رسیم.

می‌دانیم :

$$\Delta ADB\,,\ AB^{۲} = AD^{۲} + BD^{۲} - ۲AD.BD.\cos\alpha\ ①$$

$$\Delta ADC\,,\ AC^{۲} = AD^{۲} + DC^{۲} - ۲AD.DC.\underbrace{\cos(۱۸۰-\alpha)}_{-\cos\alpha}\ ②$$

طرف راست : $AB^{۲}.DC + AC^{۲}.DB \xrightarrow[\text{۱ و ۲}]{\text{جایگذاری}}$

$$(AD^{۲}+BD^{۲}-۲AD.BD.\cos\alpha).DC + (AD^{۲}+DC^{۲}+۲AD.DC.\cos\alpha).DB =$$

$$AD^{۲}.DC + BD^{۲}.DC - ۲\cancel{AD.BD}.\cancel{DC}.\cos\alpha + AD^{۲}.DB + DC^{۲}.DB + ۲\cancel{AD.DC}.\cancel{DB}.\cos\alpha =$$

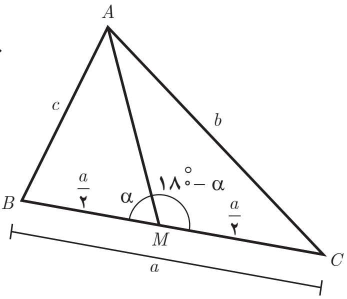
$$AD^{۲}(DC+DB)+BD.\ DC(BD+DC)=AD^{۲}.\ BC+BD.\ DC.\ BC$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه می‌گیریم،چون AM میانه است پس

$$BM=MC=\frac{a}{۲}$$

قضیه استوارت : $AB^{۲}\ .\ MC+AC^{۲}.\ MB=AM^{۲}.\ BC+BM.\ MC.\ BC \xrightarrow{BM=MC=\frac{a}{۲}}$

$$c^{۲}.\frac{a}{۲}+b^{۲}.\frac{a}{۲}=AM^{۲}.a+\frac{a}{۲}.\frac{a}{۲}.a\Rightarrow$$



قضیه میانه‌ها :

$$\cancel{\frac{a}{۲}}(c^{۲}+b^{۲})=\cancel{\frac{a}{۲}}(۲.AM^{۲}+\frac{a^{۲}}{۲})\Rightarrow b^{۲}+c^{۲}=۲AM^{۲}+\frac{a^{۲}}{۲}$$

۶ حل مسئله ۲، با استفاده از قضیه استوارت

قضیه استوارت در مثلث ABC : $۸^{۲}\times DC+۸^{۲}\times BD=۷^{۲}\times ۸+BD\ .\ DC\times ۸\ \Rightarrow$

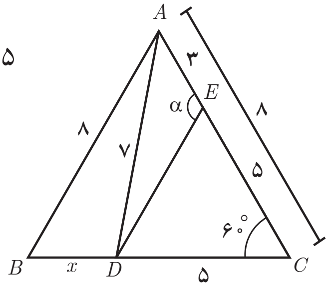
$$۸^{۲}(\underbrace{DC+BD}_{۸})=۷^{۲}\times ۸+BD\ .(۸-BD)\times ۸ \xrightarrow{\div ۸}$$

$$۶۴=۴۹+۸BD-BD^{۲}\ \Rightarrow\ BD^{۲}-۸BD+۱۵=۰\ \Rightarrow$$

$$(BD-۳)(BD-۵)=۰\Rightarrow \begin{matrix} BD=۳ \\ BD=۵ \end{matrix} \xrightarrow{DC>BD} \begin{matrix} BD=۳ \\ DC=۸-۳=۵ \end{matrix}$$

قضیه استوارت در مثلث ADC : $۵^{۲}\times ۳+۷^{۲}\times ۵=DE^{۲}\times ۸+۳\times ۵\times ۸\ \Rightarrow\ ۷۵+۲۴۵=۸DE^{۲}+۱۲۰\Rightarrow$

$$۸DE^{۲}=۲۰۰\Rightarrow DE^{۲}=\frac{۲۰۰}{۸}=۲۵\Rightarrow DE=\sqrt{۲۵}=۵$$



درس سوم

قضیهٔ نیمسازهای زاویه‌های داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

اهداف درس

در پایان این درس از دانش‌آموز انتظارمی‌رود که بتواند :

۱ قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث را بیان کند؛

۲ قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث را اثبات کند؛

۳ با استفاده از قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث، مسائل مرتبط را حل کند؛

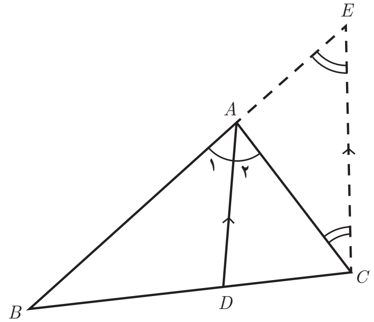
۴ قضیه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث را بیان کند؛

۵ با استفاده از قضیه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث، مسائل مرتبط را حل کند.

روش تدریس درس سوم

در این درس معلم دو مطلب را آموزش می‌دهد : ۱ــ قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث؛ ۲ــ قضیه محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث.

۱ برای اثبات قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی، از نقطه C خطی موازی با نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.



الف و ب)

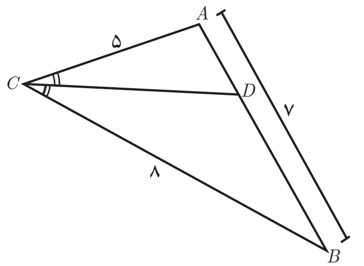
$$\left.\begin{array}{l} AD \| EC \text{ و } BE \text{ مورب (قاطع) } \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{E} \\ AD \| EC \text{ و } AC \text{ مورب (قاطع) } \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C} \\ \text{ طبق فرض } AD \text{ نیمساز است } \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E} = \hat{C} \Rightarrow \overset{\Delta}{AEC} \text{ متساوی‌الساقین } \Rightarrow AE = AC \ (۱)$$

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC داریم :

$$AD \| EC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \frac{AB}{AC}$$

مثالی که در ادامه آورده شده است، نشان می‌دهد که با معلوم‌بودن اندازه‌های سه ضلع هر مثلث، می‌توان طول قطعاتی که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را محاسبه کرد.

حل «کار در کلاس» نیز مشابه مثال داده شده است. با رسم نیمساز زاویه C داریم :



$$\frac{۸}{۵} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{۸+۵}{۵} = \frac{BD+AD}{AD} \Rightarrow \frac{۱۳}{۵} = \frac{۷}{AD}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{۷ \times ۵}{۱۳} = \frac{۳۵}{۱۳}$$

$$BD = ۷ - \frac{۳۵}{۱۳} = \frac{۹۱ - ۳۵}{۱۳} = \frac{۵۶}{۱۳}$$

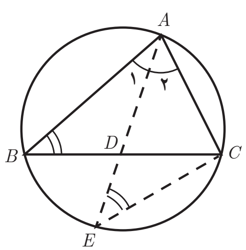
۲ محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه A، AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.

اکنون داریم :

الف) $\hat{E} = \hat{B}$ زیرا محاطی رو به یک کمان است.

ب) مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؛ زیرا :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ \hat{B} = \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\end{array}\right\} \xRightarrow{(ز ، ز)} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEC}$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر : $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EC}{BD}$

ت) از تناسب اوّل نتیجه می‌گیریم :

$$AB.AC = AD.\ AE \xlongequal{\text{جایگذاری}} AD(AD + DE) = AD^۲ + AD.DE$$

می‌دانیم $AD.\ DE = BD.\ DC$ زیرا طبق قضیه فصل (۲)، از تشابه دو مثلث ABD و CDE داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ \text{ متقابل به رأس‌اند}\end{array}\right\} \xRightarrow{(ز ، ز)} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{CDE} \Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{BD}{DE} \Rightarrow AD.DE = BD.DC$$

بنابراین : $AD^۲ = AB.\ AC - BD.\ DC$

و این یعنی (قضیه ۲) : در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

برای حل مثالی که در ادامه مطرح می‌شود از دو قضیه ۱ و ۲ استفاده می‌شود.

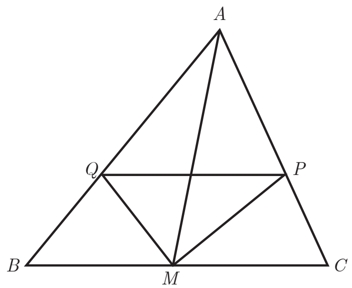
حل تمرین‌های درس سوم

۱ MP نیمساز زاویه AMC و MQ نیمساز زاویه AMB است : فرض و M وسط BC $(MB = MC)$

حکم : $PQ \| BC$

حل)

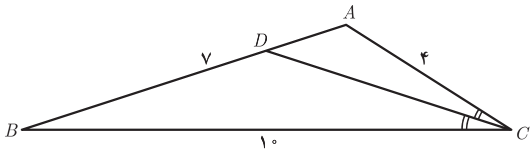
$$\left.\begin{array}{l}\text{است } AMC \text{ نیمساز زاویه } MP \Rightarrow \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AP}{PC} \\ \text{است } AMB \text{ نیمساز زاویه } MQ \Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AQ}{QB}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB} \xRightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \| BC$$



۲

$$CD: \frac{۴}{۱۰} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{۴+۱۰}{۱۰} = \frac{AD+DB}{DB} \Longrightarrow$$ نیمساز زاویه C است

$$\frac{۱۴}{۱۰} = \frac{۷}{DB} \Rightarrow DB = \frac{۷\times۱۰}{۱۴} = ۵ \quad AD = ۷-۵ = ۲$$



۳ AD نیمساز زاویه A است.

الف) چون نقطه D روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طبق خاصیت نیمساز، از دو ضلع زاویه A به یک فاصله است؛ یعنی $DH = DH'$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}} = \dfrac{\frac{۱}{۲}DH'\times AB}{\frac{۱}{۲}DH\times AC} = \dfrac{AB}{AC} \quad (۱) \\[2ex] \dfrac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}} = \dfrac{\frac{۱}{۲}BD\times AH''}{\frac{۱}{۲}CD\times AH''} = \dfrac{BD}{CD} \quad (۲) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$