

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

اهداف درس

- ۱ درک مفهوم محاطی و محیطی بودن چندضلعی و آشنایی با شرایط لازم و کافی برای محاطی و محیطی بودن چندضلعی (به ویژه چهار ضلعی ها)؛
- ۲ آشنایی با نحوه رسم دایره‌های محاطی و محیطی در چندضلعی در صورت وجود؛
- ۳ آشنایی با دایره محاطی خارجی مثلث و رابطه شعاع دایره محاطی خارجی مثلث با محیط، مساحت و اضلاع آن مثلث.

روش تدریس درس سوم

درس با ارائه تعریفی از چندضلعی محاطی و دایره محیطی آن چندضلعی آغاز می‌شود. پس از ارائه تعریف، طی یک قضیه دو شرطی، شرط لازم و کافی محاطی بودن چندضلعی بیان می‌شود. انتظار می‌رود دانش‌آموزان، با توجه به تعریف چندضلعی محاطی و دایره محیطی آن، همچنین خواص دایره و ویژگی‌های عمود منصف پاره خط که در کتاب هندسه و در درس گذشته این فصل خوانده‌اند بتوانند این قضیه دو شرطی را اثبات کنند.

در ادامه تعریف چند ضلعی محیطی و دایره محاطی آن را ارائه می‌شود. پس از تعریف فعالیتی ارائه می‌شود که انتظار می‌رود دانش‌آموزان پس از انجام آن فعالیت، شرط لازم و کافی محیطی بودن یک چندضلعی را درک کنند و بتوانند از این فعالیت در حل مسائل و اثبات قضایا استفاده کنند. مثلث، به عنوان یکی از پرکاربردترین چندضلعی‌ها در هندسه، از منظر محاطی و محیطی بودن، بررسی

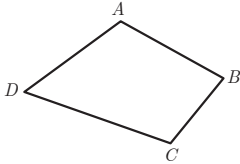
می‌شود و دانش‌آموزان با توجه به خواص مثلث و دایره درمی‌یابند که هر مثلث هم محیطی است و هم محاطی و مرکز دایره محیطی هر مثلث، نقطه هم‌رسی سه عمود منصف آن و مرکز دایره محاطی هر مثلث، نقطه هم‌رسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن است.

انتظار می‌رود دانش‌آموزان بر اساس «کار در کلاس» صفحه ۲۵ که در خصوص رابطه بین مساحت یک n ضلعی محیطی با محیط آن و شعاع دایره محاطی اش است، بتوانند رابطه بین مساحت هر مثلث محیطی با محیط آن و شعاع دایره محاطی اش را به دست آورند.

در صفحه ۲۶ دایره محاطی خارجی نظیر هر رأس مثلث معرفی و فعالیتی ارائه می‌شود که در آن نحوه محاسبه شعاع دایره محاطی خارجی تبیین می‌شود.

در صفحه ۲۷ و ۲۸ طی دو قضیه دو شرطی و اثبات آنها، شرایط لازم و کافی برای محاطی و محیطی بودن هر چهارضلعی بیان می‌شود.

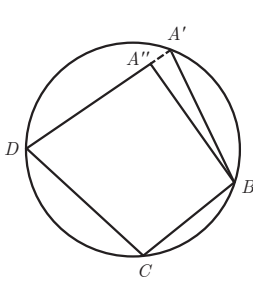
در قضیه اول شرط لازم و کافی برای محاطی بودن هر چهارضلعی، مکمل بودن دو زاویه مقابل آن چهارضلعی ارائه و اثبات می‌شود. برای این قضیه دو شرطی، طرف اول قضیه (فرض: چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. حکم: دو زاویه مقابل آن چهارضلعی مکمل هم



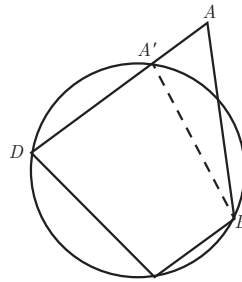
هستند.) به راحتی با استفاده از تعریف زاویه محاطی و دایره اثبات می‌شود.

طرف دوم قضیه (فرض: دو زاویه مقابل چهارضلعی $ABCD$ مکمل هم هستند. حکم: چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.) با استفاده از برهان خلف اثبات می‌شود. روند اثبات این گونه است که با توجه به اثبات این امر

که هر مثلث محاطی است، مطمئناً می‌توان یک دایره محاطی که از سه رأس چهارضلعی می‌گذرد رسم کرد. و این دایره از رأس چهارم چهارضلعی (به عنوان مثال A) نمی‌گذرد (فرض خلف). بر این اساس و با توجه به شکل (۱) و (۲).

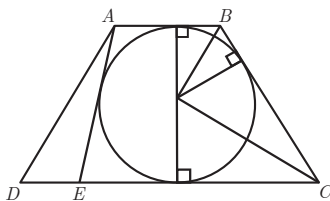


(۱)



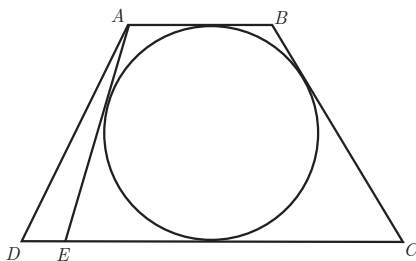
(۲)

از رأس B به نقطه A' که روی ضلع AD یا در امتداد آن قرار دارد وصل می‌کنیم. چهارضلعی $A'BCD$ یک چهارضلعی محاطی است. سپس با توجه به قسمت اول قضیه، \hat{C} و $\hat{BA'D}$ مکمل هم هستند و با توجه به فرض قضیه که \hat{C} با \hat{A} مکمل هستند، نتیجه گرفته می‌شود که $\hat{A} = \hat{BA'D}$ که این ممکن نیست؛ زیرا در شکل (۱) زاویه $BA'D$ زاویه داخلی غیر مجاور با زاویه خارجی A در مثلث ABA' و در شکل (۲) زاویه A زاویه داخلی غیر مجاور با زاویه خارجی $BA'D$ در مثلث ABA' است که در هر دو مورد دو زاویه A و $BA'D$ با هم مساوی نیستند و این تناقضی است که مبنای اثبات قضیه است. در قضیه دوم، شرط لازم و کافی برای محیطی بودن چندضلعی بیان می‌شود. قسمت اول قضیه با فرض محیطی بودن چهارضلعی و حکم برابر بودن مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل با مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر، براساس هم اندازه بودن در پاره خط مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره اثبات می‌شود. برای اثبات عکس قضیه، با توجه به شکل ارائه شده، ابتدا با استفاده از رسم نیمساز دو زاویه B و C ، رسم دایره‌ای محاطی که بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است، نتیجه گرفته می‌شود برای اثبات مماس بودن دایره مفروض بر ضلع AD از برهان خلف استفاده می‌شود.



فرض خلف این است که دایره مفروض بر ضلع AD مماس نیست و پاره خط دیگری مانند AE مماس است. با توجه به اینکه E بین دو رأس C و D باشد و یا D بین C و E باشد، دو حالت پیش می‌آید که در ادامه این قسمت قضیه را برای هر دو حالت اثبات می‌کنیم:

حالت اول: E بین C و D قرار دارد:



$$\left. \begin{array}{l} ۱ \quad AB + CD = BC + AD \quad \text{بنا بر فرض قضیه} \\ ۲ \quad AB + CE = BC + AE \quad \text{(شرط محیطی بودن چهارضلعی)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} ۱ و ۲ \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$CD - CE = AD + AE \xrightarrow{CD=CE+DE} \cancel{CE} + DE - \cancel{CE} = AD + AE \\ \Rightarrow AD + AE = DE$$

که این رابطه، با توجه به نامساوی مثلث‌ها، امکان ندارد؛ بنابراین، قضیه اثبات می‌شود.
حالت دوم: D بین C و E قرار دارد:

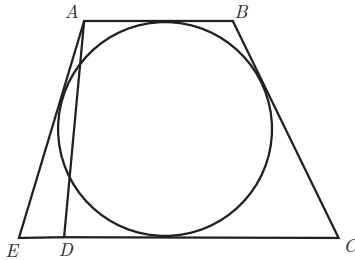
$$۱ \quad AB + CD = BC + AD \quad \text{فرض قضیه}$$

$$۲ \quad AB + CE = BC + AE \quad \text{شرط محیطی بودن چهارضلعی}$$

$$۲ - ۱ \Rightarrow CE - CD = AE - AD \xrightarrow{CE=CD+ED}$$

$$\cancel{CD} + ED - \cancel{CD} = AE - AD \Rightarrow ED + AD = AE$$

که این رابطه نیز با توجه به نامساوی بودن مثلث‌ها امکان ندارد و قضیه در این حالت نیز اثبات می‌شود.



در «کار در کلاس» صفحه ۲۸ انتظار می‌رود که دانش‌آموزان با توجه به قضایای مربوط محاطی و محیطی بودن چهارضلعی‌ها و همچنین ویژگی‌های چهارضلعی‌های مختلف بتوانند محاطی یا محیطی بودن هر یک از آنها را مشخص کنند.

پس از انجام «کار در کلاس» صفحه ۲۸ چندضلعی محدب منتظم تعریف می‌شود. در صفحه ۲۹ فعالیتی ارائه می‌شود که دانش‌آموزان با انجام آن درک می‌کنند که هر چندضلعی محدب منتظم، هم محاطی و هم محیطی است.

مجله ریاضی به‌عنوان مطلبی خواندنی برای علاقه‌مندان در خصوص زاویه‌های دید و کمان شامل (حاوی) پس از تمرین‌های این درس ارائه می‌شود که جزء محتوای درس نیست و فقط جهت مطالعه برای دانش‌آموزان است.

حل تمرین های درس

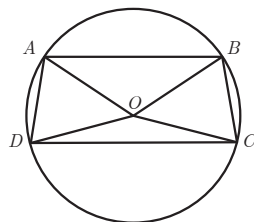
۱ ثابت کنید یک دوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

فرض: دوزنقه محاطی است. حکم: $AD = BC$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} AD \parallel DC, AB \parallel DC \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \leftarrow \text{طبق شرط محاطی بودن دوزنقه} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$$



در این دوزنقه، زاویه های مجاور به ساق برابرند؛ بنابراین، دوزنقه، متساوی الساقین است.

فرض: دوزنقه متساوی الساقین است. حکم: دوزنقه محاطی است.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \xrightarrow[\text{متساوی الساقین بودن دوزنقه}]{\widehat{C} = \widehat{D} \text{ با توجه به فرض}} \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \xrightarrow[\text{دوزنقه محاطی است.}]{\widehat{A} = \widehat{B}} \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ دوزنقه محاطی است.}$$

۲ مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد.

مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث است و چون مثلث

متساوی الاضلاع است، نقطه O محل برخورد نیمسازها نیز است.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2}$$

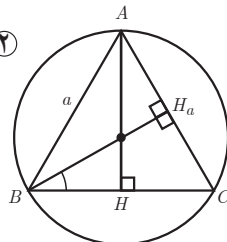
بنابراین:

$$AH = OA + OH \Rightarrow AH = R + OH \quad (1)$$

$$OBH : \widehat{B}_1 = 30^\circ \rightarrow \sin \widehat{B}_1 = \frac{OH}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OH}{R} \rightarrow OH = \frac{R}{2} \quad (2)$$

$$1 \text{ و } 2 \rightarrow AH = R + \frac{R}{2} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}R$$

$$OBH : \widehat{B}_1 = 30^\circ \Rightarrow \cos \widehat{B}_1 = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{R} \Rightarrow$$



$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2}R \quad \Rightarrow \quad AH \text{ میانه } BC \text{ نیز است.} \quad \Rightarrow \quad BC = 2BH \Rightarrow BC = \sqrt{3}R$$

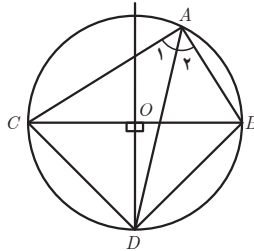
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{R}{2} \times \sqrt{3}R = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$$

۳ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

فرض می‌کنیم AD نیمساز زاویه A دایره محیطی مثلث ABC را در نقطه D قطع کند.

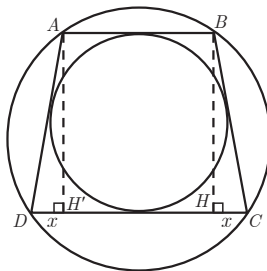
$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \xrightarrow{\text{خواص زاویه محاطی}} \widehat{CD} = \widehat{DB} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{DB}$$

بنابراین، فاصله D از دو سر ضلع BC به یک اندازه است و این یعنی اینکه D روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد. پس نیمساز زاویه A و عمود منصف ضلع مقابل به زاویه A یعنی BC همدیگر را روی نقطه‌ای روی دایره محیطی مثلث ABC قطع می‌کند.



۴ یک دوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

چون دوزنقه $ABCD$ محاطی است، طبق سؤال ۱، متساوی الساقین است یعنی رابطه $AD=BC$.



از طرفی چون دوزنقه $ABCD$ محیطی است پس داریم: رابطه ۲ $AB + DC = AD + BC$

$$۱ \text{ و } ۲ \Rightarrow ۲BC = AB + DC \Rightarrow BC = \frac{AB + DC}{۲} \quad ۳$$

$$\triangle BHC: BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow BC^2 = BH^2 + x^2 \quad ۴$$

$$\widehat{ABCD}: DC = ۲x + HH' \xrightarrow{HH' = AB} DC = ۲x + AB \Rightarrow x = \frac{DC - AB}{۲} \quad ۵$$

با جایگذاری ۳ و ۵ $\Rightarrow BC^2 = BH^2 + x^2 \Rightarrow BH = \sqrt{BC^2 - x^2}$

$$BH = \sqrt{\left(\frac{AB + DC}{۲}\right)^2 - \left(\frac{DC - AB}{۲}\right)^2} = \sqrt{AB \cdot DC}$$

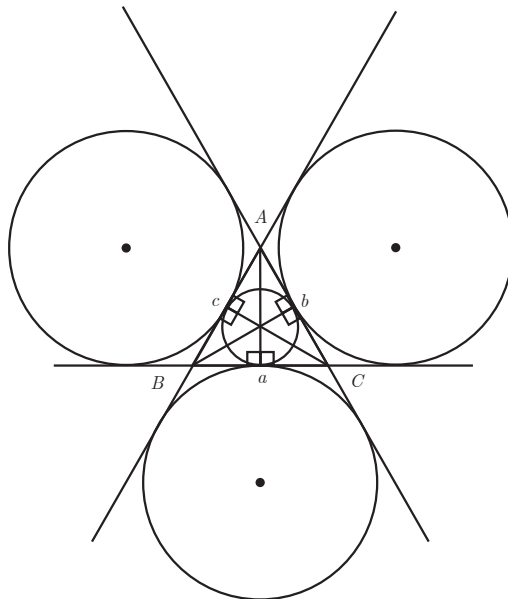
$$S_{\widehat{ABCD}} = \left(\frac{AB + DC}{۲}\right) \sqrt{AB \cdot DC}$$

۵ اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$



اگر محیط مثلث ABC را $2p$ و S را مساحت آن در نظر بگیریم در دایره محاطی مثلث ABC داریم:

$$S = rp \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{s}$$

$$\left. \begin{aligned} r_a &= \frac{s}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{s} \\ r_b &= \frac{s}{p-b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{s} \\ r_c &= \frac{s}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

در دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{s} + \frac{p-b}{s} + \frac{p-c}{s} = \frac{3p - (a+b+c)}{s} = \frac{3p - 2p}{s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع مثلث ABC باشند داریم:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2s}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2s} \\ s &= \frac{1}{2} bh_b \Rightarrow h_b = \frac{2s}{b} \Rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2s} \\ s &= \frac{1}{2} ch_c \Rightarrow h_c = \frac{2s}{c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{a+b+c}{2s} = \frac{2p}{2s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

۶ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N, M, P و باشند T و T' نقطه‌های

تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند نشان دهید:

$$AM = AN = P - a$$

$$BN = BP = P - b, \quad CM = CP = P - C$$

$$AT = AT' = P$$

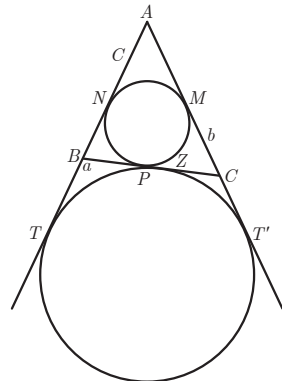
$$AM = AN = P - a$$

$$\left. \begin{aligned} AN &= C - BN \\ AM &= b - CM \end{aligned} \right\} \Rightarrow AM + AN = b + c - (BN + CM)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{AM=AN} \\ BN=BP, CM=CP \end{aligned} \Rightarrow 2AM = b + c - \underbrace{(BP + CP)}_a = b + c - a$$

$$\Rightarrow 2AM = 2p - 2b \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$$BN = BP = P - b$$



$$\left. \begin{array}{l} BN = C - AN \\ BP = a - cp \end{array} \right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP)$$

$$\xrightarrow{BP=BN} \xrightarrow{AN=AM, CP=CM} \sphericalangle BN = a + C - \underbrace{(AM + CM)}_b = a + c - b$$

$$\sphericalangle BN = \sphericalangle p - \sphericalangle b \Rightarrow BN = BP = P - b$$

$$CM = CP = P - C$$

$$\left. \begin{array}{l} CM = b - AM \\ CP = a - BP \end{array} \right\} \Rightarrow CM + CP = b + a - (AM + BP)$$

$$\xrightarrow{CM=CP} \xrightarrow{AN=AM, BP=BN} \sphericalangle CM = b + a - \underbrace{(AN + BN)}_c = b + a - c$$

$$\Rightarrow \sphericalangle CM = \sphericalangle P - \sphericalangle C \Rightarrow CM = CP = P - C$$

$$AT = AT' = P$$

$$AT + AT' = C + BT + b + CT' \xrightarrow{AT=AT'} \xrightarrow{BT=BZ, CT'=CZ}$$

$$\sphericalangle AT = C + b + \underbrace{BZ + CZ}_a = c + b + a = \sphericalangle P \Rightarrow$$

$$AT = AT' = P$$

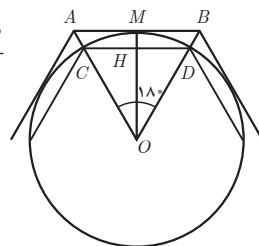
■ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه $AB = \sphericalangle r \tan \frac{\sphericalangle}{n}$ و $CD = \sphericalangle r \sin \frac{\sphericalangle}{n}$.

$$\triangle OHD: \widehat{H} = 90^\circ \rightarrow \sin \frac{\sphericalangle}{n} = \frac{OH}{OD} \xrightarrow{OD=r} \rightarrow \sin \frac{\sphericalangle}{n} =$$

$$\frac{DH}{r} \xrightarrow{\times \sphericalangle} \sphericalangle \sin \frac{\sphericalangle}{n} = \frac{\sphericalangle DH}{r} \xrightarrow{\sphericalangle DH=CD} \rightarrow CD = \sphericalangle r \sin \frac{\sphericalangle}{n}$$

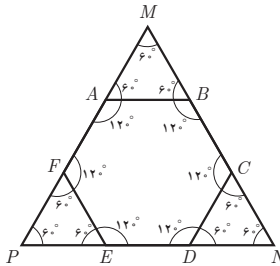
$$\triangle OMB: \widehat{M} = 90^\circ \rightarrow \tan \frac{\sphericalangle}{n} = \frac{MB}{OM} \xrightarrow{OM=r} \rightarrow \tan \frac{\sphericalangle}{n} = \frac{MB}{r}$$

$$\xrightarrow{\times \sphericalangle} \sphericalangle \tan \frac{\sphericalangle}{n} = \frac{\sphericalangle MB}{r} \xrightarrow{\sphericalangle MB=AB} \rightarrow AB = \sphericalangle r \tan \frac{\sphericalangle}{n}$$



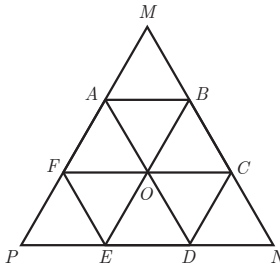
۸ شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است. با توجه به شکل و با توجه به اینکه اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است، اندازه زاویه های M ، N و P 60° است؛ بنابراین مثلث MNP ، متساوی الاضلاع است.



ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی دو سوم مساحت مثلث MNP است. اگر قطره های شش ضلعی منتظم را رسم کنیم، شش مثلث متساوی الاضلاع داخل شش ضلعی و ۹ مثلث متساوی الاضلاع در داخل مثلث MNP به وجود می آید.

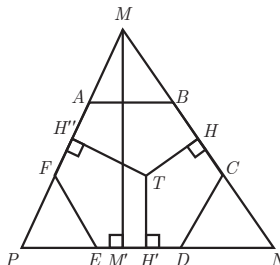
$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{MNP}} = \frac{6S_{\triangle OAB}}{9S_{\triangle OAB}} = \frac{2}{3}$$



پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC ، AF و ED رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می دانید، مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

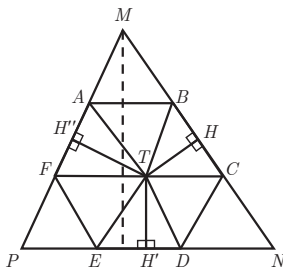
در درون هر مثلث متساوی الاضلاع، مجموع فواصل هر نقطه از سه ضلع مثلث برابر طول ارتفاع مثلث است بنابراین:

$$TH + TH' + TH'' = MM'$$



ت) مجموع مساحت‌های مثلث TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان

دهید:



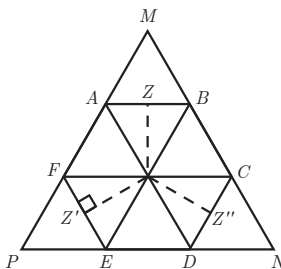
$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = \frac{1}{3} TH \cdot BC + \frac{1}{3} TH' \cdot ED + \frac{1}{3} TH'' \cdot AF \quad \underline{\underline{BC = ED = AF}}$$

$$\frac{1}{3} BC (TH + TH' + TH'') = \frac{1}{3} BC \cdot h$$

$$S_{MNP} = \frac{1}{3} MN \cdot h \quad \xrightarrow{MN = \sqrt{3} BC} \quad \frac{S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}}{S_{MNP}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3} BC \cdot h}{\frac{1}{3} \sqrt{3} BC \cdot h} = \frac{1}{3}$$



$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = \frac{1}{3} BC \cdot h \quad \textcircled{1}$$

$$S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = \frac{1}{3} CD \cdot TZ'' + \frac{1}{3} EF \cdot IZ' + \frac{1}{3} AB \cdot TZ$$

$$\underline{\underline{AB = BC = CD = ED = EF = AF}} \quad \frac{1}{3} BC (TZ + TZ' + TZ'') \quad \underline{\underline{TZ + TZ' + TZ'' = h}}$$

$$\frac{1}{3} BC \cdot h \quad \textcircled{2}$$

$$1 \text{ و } 2 \Rightarrow S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = \frac{1}{3} BC \cdot h$$

۹ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم، چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کند. نشان دهید هشتضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

$$\left. \begin{aligned} OB = OA = OD = OC \\ \hat{O}_1'' = \hat{O}_2'' = \hat{O}_3''' = \hat{O}_4''' = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$O \hat{A} B = O \hat{A} D = O \hat{D} C = O \hat{C} B \text{ (ض زض)}$$

$$\Rightarrow AB = AD = DC = CB \quad ۱$$

همچنین (زاویه‌های محاطی رو به رو به قطر) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \quad ۲$
 چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است. $\Rightarrow ۱$ و ۲

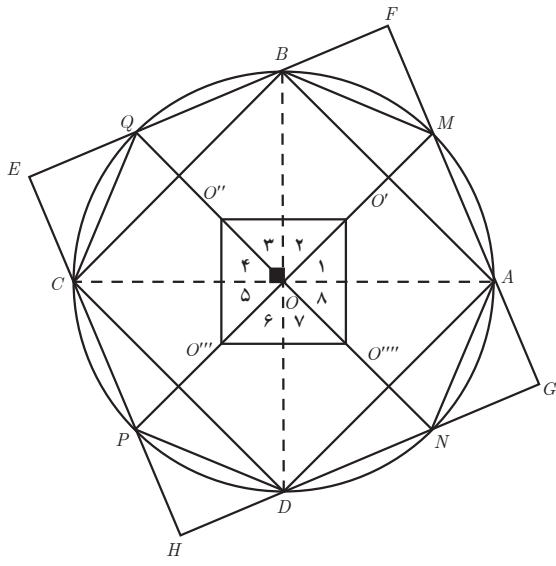
عمود منصف هر ضلع در مربع، نیمساز زاویه مقابل نیز هست، پس:

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = \hat{O}_5 = \hat{O}_6 = \hat{O}_7 = \hat{O}_8 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{M} = \hat{B} = \hat{Q} = \hat{C} = \hat{P} = \hat{D} = \hat{N} = \hat{A} = \frac{\sqrt{AM}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

هشتضلعی $AMBQCPDN$ ، منتظم است.



توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود در تدریس این درس، همانند سایر درس‌ها، نکات آموزشی زیر توسط همکاران محترم لحاظ شود:

۱ تا حد امکان به دانش‌آموزان فرصت بحث و بررسی مسائل و ارائه استدلال و نقد استدلال‌های دیگران داده شود.

۲ تا حد امکان از پاسخ مستقیم به دانش‌آموزان و اثبات کامل قضایا و حل تمرین‌ها خودداری شود و سعی شود دانش‌آموزان با بحث و کار گروهی اثبات‌ها را انجام یا تکمیل نمایند و به حل تمرین‌ها بپردازند.

۳ در صورت امکان سعی شود پس از اثبات یا حل هر مسئله‌ای از دانش‌آموزان خواسته شود به دنبال راه حل جدید یا اثبات جدیدی باشند. طبیعی است این امکان برای تمامی قضایا و سؤالات فراهم نیست، ولی برای برخی قضایا و مسائل مطمئناً این امکان وجود دارد؛ بنابراین، لازم است از این فرصت‌ها برای تقویت قدرت استدلال و اثبات و حل مسئله دانش‌آموزان استفاده شود.

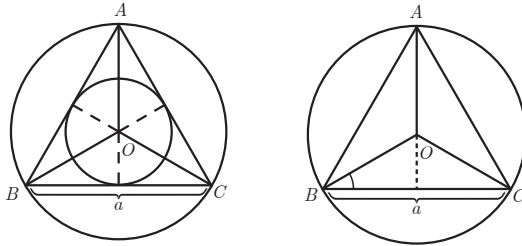
۴ در انجام فعالیت‌ها سعی کنید تا حد امکان دانش‌آموزان بتوانند خود با آن مواجه شوند و آن را حل کنند. شما بروند انجام فعالیت توسط آنان فقط نظارت کنید. در صورت نیاز، به حداقل راهنمایی اکتفا کنید.

بdfهمی‌ها و اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

یکی از رایج‌ترین بdfهمی‌های دانش‌آموزان، استفاده از شرط لازم و کافی برای محاطی بودن یک چندضلعی در خصوص محیطی بودن آن چندضلعی است. شایع‌ترین علت این بdfهمی، درک نادرست از مفهوم محاطی و محیطی بودن و تمایز نگذاشتن بین این دو مفهوم است. برای برطرف کردن این بdfهمی پیشنهاد می‌شود همکاران در این درس با ارائه نمونه‌های مختلف اشکال محاطی و محیطی و بحث در خصوص تمایز بین آنها (محیطی و محاطی بودن یک شکل) موجب درک عمیق در دانش‌آموزان گردند.

نمونه سؤالات تکمیلی درس سوم

۱ با توجه به شکل زیر، اندازه شعاع دایره محیطی و محاطی مثلث متساوی الاضلاع ABC را به دست آورید. (راهنمایی: می‌دانیم فاصله نقطه هم‌رسی میانه‌ها در هر مثلث تا پای هر میانه برابر $\frac{1}{3}$ اندازه آن میانه است).



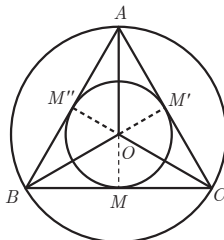
حل:

پیدا کردن اندازه شعاع دایره محیطی: با توجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC و اینکه هر ارتفاعی، نیمساز، عمود منصف و میانه نیز هست، برای محاسبه شعاع دایره محیطی، کافی است اندازه OA را که $\frac{2}{3}$ میانه OM هست، به دست آوریم.

$$\begin{aligned} \triangle OBM : \cos B_1 = \frac{BM}{OB} \quad \widehat{B_1} = 30^\circ \quad \cos 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{a}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}a}{3} \end{aligned}$$

محاسبه اندازه شعاع دایره محاطی: با توجه به شکل دیده می‌شود که شعاع دایره محیطی $\frac{2}{3}$ میانه

AM و شعاع دایره محاطی $\frac{1}{3}$ میانه AM است و چون $r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ پس $R = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ محاطی



۲ اندازه شعاع‌های دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه اندازه شعاع‌های دایره محاطی خارجی هر مثلث از فرمول صفحه بعد به دست می‌آیند.

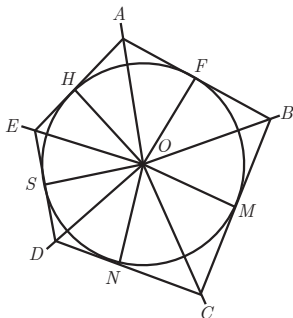
$$\left\{ \begin{array}{l} r_a = \frac{S}{p-a} \\ r_b = \frac{S}{p-b} \\ r_c = \frac{S}{p-c} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{در مثلث متساوی الاضلاع: } p = \frac{3a}{2} \\ \hline \text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع: } S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \end{array}$$

$$r_a = r_b = r_c = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2} - a} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

۳ نشان دهید مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با حاصل ضرب نصف محیط در شعاع دایره محاطی آن.

$$S = P \cdot r$$

یک چند ضلعی محیطی را در نظر بگیریم از مرکز دایره به رئوس چندضلعی و نقاط مماس چندضلعی بر دایره وصل می کنیم. به عنوان نمونه پنج ضلعی محیطی دلخواهی را در نظر می گیریم. با توجه به اینکه در نقطه مماس، شعاع بر ضلع پنج ضلعی عمود است مجموع مساحت مثلث های حاصل، برابر مساحت پنج ضلعی محیطی مورد نظر است.



$$S_{ABCDE} = \frac{OH \cdot AH}{2} + \frac{OH \cdot EH}{2} + \frac{OS \cdot ES}{2} + \frac{OS \cdot SD}{2} + \frac{ON \cdot DN}{2} + \frac{ON \cdot NC}{2} + \frac{OM \cdot MC}{2} + \frac{OM \cdot MB}{2} + \frac{OF \cdot FB}{2} + \frac{OF \cdot FA}{2}$$

$$\frac{OH = OF = OM = ON = OS = r}{2} (AH + HE + ES + SD + DN + NC + CM + MB + BF + FA) = \frac{r}{2} \cdot 2P = P \cdot r$$

۴ توضیح دهید چرا در هر مثلث متساوی الاضلاع، اندازه شعاع دایره محیطی آن، دو برابر اندازه شعاع دایره محاطی اش است.

همان گونه که در شکل سؤال ۱ مشخص است، شعاع دایره محاطی مثلث متساوی الاضلاع، بخش

کوچک میانه، و شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع، بخش بزرگ تر میانه است. با توجه به قضیه ای که دانش آموزان در خصوص میانه ها در سال گذشته خوانده اند، نسبت قسمت بزرگ تر میانه به قسمت کوچک ترش ۲ به ۱ است؛ یعنی شعاع دایره محیطی، ۲ برابر شعاع دایره محاطی است.

۵ کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

– چهار رأس هر چهارضلعی محاطی بر یک دایره واقع است. ✓

– چهار ضلع هر چهارضلعی محیطی بر یک دایره مماس است. ✓

– مربع چهارضلعی محیطی است ولی محاطی نیست. ×

– هر متوازی الاضلاعی محاطی است ولی محیطی نیست. ×

– دایره های محاطی و محیطی هر مربع مساوی یکدیگرند. ×

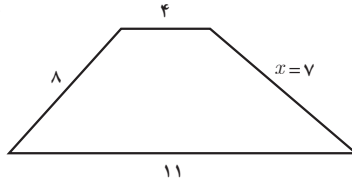
– لوزی یک چهارضلعی محاطی است. ×

– مستطیل چهارضلعی محاطی است ولی هر مستطیلی چهارضلعی محیطی نیست. ×

۶ دو زاویه مجاور از یک چهارضلعی محاطی 60° و 110° اند، دو زاویه دیگر چهارضلعی را تعیین کنید. 60° و 110°

۷ اندازه های سه ضلع مجاور یک چهارضلعی محیطی به ترتیب ۴، ۸ و ۱۱ سانتی متر است. اندازه ضلع چهارم آن را تعیین کنید.

$$x + 8 = 4 + 11 \rightarrow x = 7$$

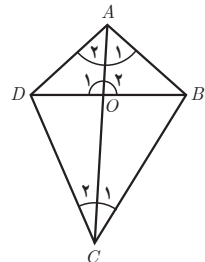


۸ ثابت کنید اگر دو ضلع مجاور از یک چهارضلعی محیطی مساوی یکدیگر باشند، دو قطر چهارضلعی

بر هم عمودند. آیا یکدیگر را نصف هم می کنند؟ با توجه به محیطی بودن چهارضلعی و برابر بودن دو ضلع مجاور داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB + DC = AD + BC \\ AD = AB \text{ (طبق فرض سؤال)} \end{array} \right\} \rightarrow DC = BC$$

$$\left. \begin{array}{l} AD = AB \\ DC = BC \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle ADC \cong \triangle ABC \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{array}$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \triangle ADO, \triangle ABO : OA = OA \\ AB = AD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADO \cong \triangle ABO \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ$$

بنابراین قطرها بر هم عمودند.

اما در پاسخ به این پرسش که آیا قطرها همدیگر را نصف نیز می‌کنند باید گفت همیشه این گونه نیست؛ مثلاً در شکلی همانند کایت که تمامی این شرایط را دارد، قطرها همدیگر را نصف نمی‌کنند.

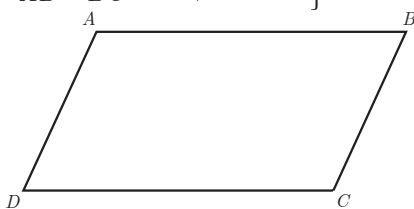
۹ ثابت کنید اگر متوازی الاضلاعی در دایره‌ای محاط باشد، آنگاه مستطیل است و اگر متوازی الاضلاعی بر دایره‌ای محیط باشد، آنگاه لوزی است.

اثبات قسمت اول: اگر متوازی الاضلاعی محاطی باشد \Leftarrow مستطیل است.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \text{ : با توجه به محاطی بودن} \\ 2 \quad \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ 3 \quad \hat{B} = \hat{D} \text{ : با توجه به متوازی الاضلاع بودن} \\ 4 \quad \hat{A} = \hat{C} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1, 3 \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \\ 2, 4 \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \end{array} \Rightarrow ABCD \text{ چهارضلعی} \\ \text{مستطیل است}$$

اثبات قسمت دوم: اگر متوازی الاضلاعی محیطی باشد لوزی است.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad AB + DC = BC + AD \text{ : با توجه به محیطی بودن} \\ 2 \quad AB = DC \text{ : با توجه به لوزی بودن} \\ 3 \quad AD = BC \end{array} \right\} 1, 2, 3 \Rightarrow AB = BC = DC = AD$$



۱۰ ثابت کنید که در هر مثلث متساوی الاضلاع، دایره‌ی محاطی داخلی بر سه دایره‌ی محاطی بیرونی مماس است. با توجه به متساوی الاضلاع بودن مثلث ABC داریم که نیمساز هر زاویه داخلی مثلث، عمود منصف ضلع مقابل آن زاویه نیز هست؛ یعنی نقطه F نقطه وسط ضلع AB است. اگر دایره‌ی محاطی خارجی نظیر ضلع AB را در نظر بگیریم، با توجه به اینکه مرکز دایره‌ی محاطی خارجی

نظیر ضلع AB ، نقطه محل برخورد نیمسازهای خارجی در زاویه A و B است، پس طبق شکل و با توجه به متساوی الاضلاع بودن مثلث ABC داریم:

$$\left. \begin{aligned} \triangle A'O'F, \triangle B'O'F: \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = 6^\circ \quad \textcircled{1} \\ \widehat{F}_1 = \widehat{F}_2 = 9^\circ \quad \text{در نقطه مماس بودن بر} \quad \textcircled{2} \\ \text{ضلع } AB \\ \widehat{A}_1 + \widehat{F}_1 + \widehat{O}'_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{F}'_2 + \widehat{O}'_2 = 18^\circ \quad \begin{matrix} 1 \text{ و } 2 \\ \Rightarrow \\ O'F = O'F \end{matrix} \quad \widehat{O}'_1 = \widehat{O}'_2 = 3^\circ \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(ز ض ز)} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\triangle A'O'F \cong \triangle B'O'F \Rightarrow AF = BF$$

یعنی F نقطه وسط AB است. با توجه به اینکه پاره خط AB یک نقطه وسط دارد، بنابراین هم دایره محاطی داخلی و هم دایره محاطی خارجی نظیر ضلع AB ، در نقطه وسط بر ضلع AB مماس هستند، پس، دو دایره مذکور در همان نقطه بر هم مماس هستند. به طریقی مشابه ثابت می شود که دایره محاطی داخلی مثلث بر دو دایره محاطی خارجی مثلث ABC نیز در دو نقطه وسط ضلع نظیر مماس است؛ بنابراین، در هر مثلث متساوی الاضلاع، دایره محاطی داخلی بر سه دایره محاطی برون مماس است.

