

فصل اول

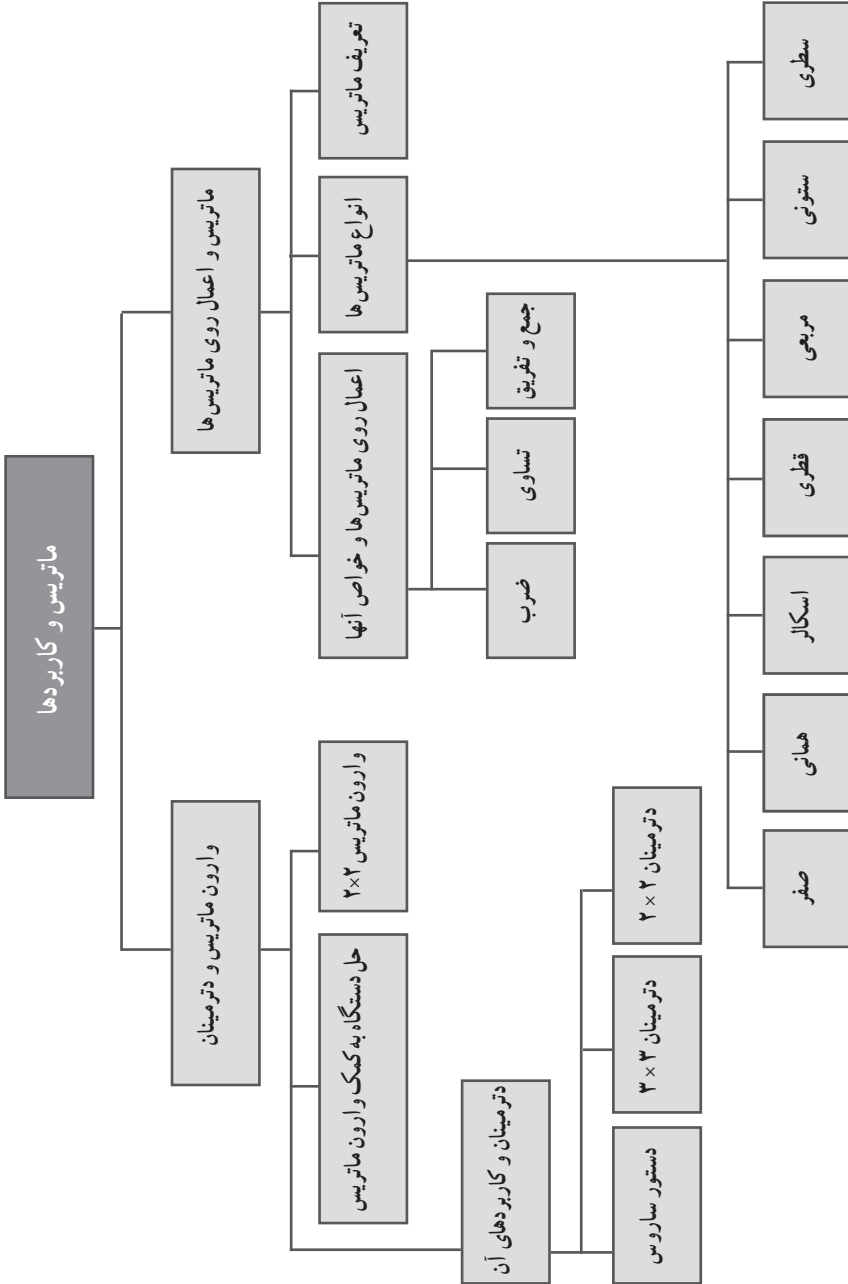
ماتریس و کاربردها

نگاه کلی به فصل

در این فصل دانش آموز با مفاهیمی چون ماتریس و دترمینان آشنا می‌شود و اعمال اصلی روی ماتریس‌ها را می‌آموزد. ماتریس مفهومی جدیدی است که دانش آموزان تا به حال با آن آشنا نشده‌اند، اگر دانش آموز جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد حقیقی را بداند مفهوم ماتریس را به سادگی می‌آموزد. این فصل ۲ درس دارد که درس اول به مفهوم ماتریس، انواع ماتریس‌ها و اعمال روی ماتریس می‌پردازد و به خواص آنها اشاره می‌کند و مهارت حساب در مورد ماتریس‌ها را بالا می‌برد. در فصل دوم در مورد وارون ماتریس بحث و طریقه به دست آوردن وارون ماتریس بیان می‌شود و دانش آموز مشخص می‌کند کدام ماتریس‌ها وارون دارند و آنهایی که وارون دارند، وارون آن را مشخص می‌کند. همچنین با مفهوم دترمینان آشنا می‌شوند که چگونه یک ماتریس مربعی را به یک عدد حقیقی تبدیل می‌کند.

سپس دستگاه به عنوان یک کاربرد از وارون ماتریس ارائه شده و جواب‌های دستگاه‌های دو در دو را به کمک وارون ماتریس پیدا می‌کند.

و در انتها دترمینان ماتریس 3×3 را به عنوان یک مهارت یاد می‌گیرد.



ماتریس و اعمال روی آنها

اهداف درس اول

- در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند:
- ۱ آشنایی با مفهوم ماتریس و جزئیات آن نظیر درایه‌ها، مرتبه، سطر و ستون، نام‌گذاری آنها
 - ۲ با انواع ماتریس آشنا شوند و ماتریس‌های مربعی با غیرمربعی را تشخیص دهند. ماتریس‌های قطری، اسکالر، همانی و صفر را بشناسند و مثال بزنند.
 - ۳ اعمال روی ماتریس را بیاموزند بتوانند ماتریس‌ها را باهم جمع یا کم کنند و ضرب ماتریس‌ها که جزء مفاهیم بسیار کاربردی در ریاضیات است را خوب یاد بگیرند. و ماتریس‌ها را در صورت ضرب شدن، ضرب کنند.
 - ۴ خواص جمع و تفریق و ضرب ماتریس را بیاموزند و بتوانند از آنها استفاده کنند. به‌عنوان یک مهارت با آن آشنا باشند.
 - ۵ بتوانند مسائل روزمره را به‌صورت ماتریس در بیاورند و به کمک ماتریس به جواب برسند.

روش تدریس

هدف اصلی در این درس آشنا شدن با مفهوم ماتریس به‌عنوان یک مفهوم کلیدی در ریاضیات است. کاربرد ماتریس در ریاضیات، به‌خصوص ریاضیات جدید بسیار زیاد است لذا می‌خواهیم دانش‌آموزان با این مفاهیم ارتباط خوبی بگیرند. لذا برای اینکه به این هدف برسیم لازم است از مثال‌های کاربردی استفاده شود و دانش‌آموز مفهوم ماتریس را به‌عنوان یک درس ضروری در زندگی خود احساس کند.

ابتدا به چند نمونه مثال اشاره کنند. سپس ماتریس را تعریف کنند. سطرها و ستون‌ها را مشخص کنند و درایه‌ها را مشخص کنند و از دانش‌آموز بخواهیم که چند ماتریس با مرتبه مشخص مثال بزند. سپس یکی از مسائل کاربردی که گفته شده را بخواهیم به‌صورت ماتریس نمایش دهند. همانند کار در کلاس صفحه ۱۱، که دانش‌آموز مسئله اصلی و واقعی را به‌صورت ماتریس نمایش دهد. و برعکس.

نمایش ماتریس که جز مفاهیم بسیار کلیدی در ماتریس‌هاست با آنها آشنا شود. در این قسمت سعی شود با حوصله بیشتری آموزش داده شود. ماتریس‌ها به‌صورت رابطه‌ای بین درایه‌ها نشان داده شود و

از دانش آموز بخواهیم به صورت آرایش مستطیلی نشان دهد و برعکس. یعنی یک ماتریس را مشخص کنیم و دانش آموز آن را به صورت رابطه ریاضی بین درایه‌ها نشان دهد. همانند مثال صفحه ۱۱. در این قسمت، دانش آموزان تمرین بیشتری نیاز دارند سعی شود چند نمونه برای مهارت بیشتر، به صورت تمرین در منزل به آنها واگذار شود.

ماتریس‌ها را معرفی کنیم و از دانش آموزان بخواهیم آنها را بشناسند و مثال بزنند. به عنوان مثال، از دانش آموز بخواهیم ماتریس قطری مثال بزنند که یکی از درایه‌های آن $\sqrt{2}$ باشد.

تساوی ماتریس در صفحه ۱۳ بیان شده و چند مثال در این مورد بیان شود و اگر زمان تدریس در کلاس محدود است. چند نمونه به عنوان تمرین به دانش آموز واگذار گردد. در صفحه ۱۴، کار در کلاس در مورد جمع ماتریس‌هاست. پیشنهاد می‌شود دو ماتریس متفاوت با مرتبه‌های متفاوت مثال زده شود و از دانش آموز بخواهیم آنها را جمع کند و به این نتیجه برسد که آنها با هم جمع نمی‌شوند و شرط جمع پذیری ماتریس را بیان کند.

بیان مثال‌های نظیر مثال قسمت (ث) در کار در کلاس بسیار توصیه می‌گردد. در کار در کلاس صفحه ۱۵، می‌خواهیم دانش آموز ضرب عدد در ماتریس را بیاموزد و همچنین بتواند از عدد در ماتریس‌ها فاکتور بگیرد. سعی شود دانش آموز خودش به این نتیجه‌ها برسد.

چند مثال عددی در مورد خواص جمع و ضرب عدد در ماتریس و تفریق بیان شود. و از دانش آموز بخواهیم به این خواص که در صفحه ۱۵ بیان شده برسد و با این ویژگی‌های ماتریس آشنا شود. یک حالت کلی که در صفحه ۱۶ بیان شده برای آنها حل کنیم. کار در کلاس صفحه ۱۷، آشنایی با همین خواص ضرب عدد در ماتریس است.

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۱۷، بهتر است به این صورت حل شود.

ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و r و s دو عدد حقیقی باشند آنگاه

$$(r + s)A = (r + s)[a_{ij}] = [(r + s)a_{ij}] = [ra_{ij} + sa_{ij}] =$$

$$[ra_{ij}] + [sa_{ij}] = r[a_{ij}] + s[a_{ij}] = rA + sA$$

به همین ترتیب برای تفریق حل شود.

هدف از کار در کلاس ۱۷ پایین صفحه، آشنایی دانش آموزان با ضرب دو ماتریس سطری و ستونی است. اجازه دهیم دانش آموزان به این نتیجه برسند. اجازه دهیم مسئله (باز پاسخ) باشد. مثال‌های متعددی بیان کنند و فکر کنند که جواب منحصر بفرد است. هدف از این مثال بیان حالت‌های مختلف است.

ضرب ماتریس در ماتریس

ضرب ماتریس‌ها با حاصل ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی آغاز شود. چند نمونه ماتریس سطری در ستونی بیان شود تا مطمئن شویم این ضرب را به‌عنوان یک مهارت کسب کرده سپس وارد ضرب یک ماتریس سطری ۱×۲ در یک ماتریس ۲×۲ شویم چند نمونه از این ضرب‌ها را انجام دهیم. دقت شود در ضرب ماتریس‌ها بسیار باید با دقت عمل کنیم یکی از مفاهیم است که کج فهمی در آن بسیار زیاد است. بعد از ضرب ماتریس سطری در چند ماتریس مربعی و غیرمربعی، به ضرب ماتریس‌های ۲×۲ درهم ادامه دهیم و کار در کلاس صفحه ۱۸ را حل کنیم. در قسمت (پ) کار در کلاس قبل از ضرب از دانش‌آموز بخواهیم آیا ماتریس‌ها شرایط ضرب را دارند، سپس مرتبه ماتریس حاصل ضرب را بخواهیم و بعد عمل ضرب را انجام دهند.

قسمت (ت) کار در کلاس صفحه ۱۸ و ۱۹ از دانش‌آموز بخواهیم چند ماتریس مثال بزند و بعد مقایسه کند.

می‌دانیم در مجموعه اعداد حقیقی اگر حاصل ضرب دو عدد حقیقی صفر شود حداقل یکی از آنها صفر است اما در ماتریس‌ها ممکن است چنین نباشد. دو ماتریس دارای حاصل ضرب صفر باشند ولی خودشان صفر نباشند. مانند:

$$A = [1 \quad 2 \quad 3] \qquad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = [1 \quad 2 \quad 3] \times \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -5 + 2 + 3 = 0$$

مثال دیگر:

$$A = [1 \quad -1] \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = [1 \quad -1] \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [3 - 3 \quad 1 - 1] = [0 \quad 0]$$

مثال دیگر، از ضرب ۲×۲ ها

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & -1+1 \\ -1+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این قسمت اجازه دهیم دانش‌آموزان خودشان چند مثال بیاورند.
هدف کار در کلاس ۱ صفحه ۱۹ (وسط صفحه)
آموزش خاصیت جابه‌جایی در عمل ضرب ماتریس هاست. با حل این کار در کلاس به این نتیجه می‌رسد و از دانش‌آموز می‌خواهیم نتیجه زیر کار در کلاس را خودش کامل کند.
در قسمت ۲ کار در کلاس: هدف خاصیت ضرب ماتریس همانی در ماتریس هاست. با انجام کار در کلاس دانش‌آموز به نتیجه زیر کار در کلاس می‌رسد. در ضمن در این قسمت اجازه دهید دانش‌آموز این ضرب را با ماتریس 3×3 امتحان کند. هدف قسمت ۳ کار در کلاس خاصیت توزیع پذیری است. با حل آن به خاصیت توزیع پذیری می‌رسد.

توصیه‌های آموزشی

- ۱ در نمایش ماتریس‌ها به صورت آرایش مستطیلی سعی شود از خواص مختلف اعداد نظیر توان و ضرب استفاده شود تا دانش‌آموز بتواند به کمک روابط بین درایه‌ها، درایه‌های ماتریس را مشخص کند.
- ۲ در تساوی ماتریس‌ها می‌توانید از معادلات استفاده کنید. معادلات درجه ۱ یا ۲
- ۳ در تعریف انواع ماتریس، اجازه دهیم دانش‌آموزان خودشان مثالی از انواع ماتریس ارائه دهند.
- ۴ کار در کلاس را اجازه دهید دانش‌آموزان حل کنند و خودشان به نتیجه خواسته شده برسند.
- ۵ بیان خواص ماتریس به صورت کلی را برای مواردی که در کتاب اشاره شده توصیه می‌کنیم.
- ۶ از نمونه مسائلی نظیر تمرینات صفحه ۲۰ و ۲۱ بیشتر استفاده شود. به خصوص مسائل شماره ۱، ۲، ۵، ۶، ۷ و ۱۱

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

- ۱ در نمایش ماتریس‌ها و درایه‌ها، جای سطر و ستون را اشتباه می‌گیرند برای رفع آن اجازه دهید در مسائل دانش‌آموز درایه‌ها را مشخص کند.
- ۲ ضرب ماتریس‌ها یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان است.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg+ce+dg & af+bh+cf+hd \\ af+bh+ce+dg & cf+bh+ae+bh \end{bmatrix}$$

از این نمونه و نمونه‌های مشابه این بسیار اشتباه می‌شود.
نمونه‌ای از اشتباهات دانش‌آموزان:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 3 \times 2 \\ 2 \times -1 & 4 \times -4 \end{bmatrix}$$

۳ در ضرب عدد در ماتریس، دانش‌آموز عدد را فقط در یک سطر یا یک ستون ضرب می‌کند. مراقب باشیم این اتفاق نیفتد.

۴ در ضرب ماتریس‌های توانی، دانش‌آموز درایه‌ها را مانند اعداد به توان می‌رساند.
مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 25 \end{bmatrix} \rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 27 & 8 \\ 1 & 125 \end{bmatrix}$$

۵ انواع ماتریس‌ها را با هم قاطی می‌کند. ماتریس اسکالر را به جای قطری و برعکس یاد می‌گیرد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ ماتریس زیر را به صورت آرایش مستطیلی نشان دهید.

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3}, a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{2} & i = j \\ \frac{1}{2} & i < j \\ -1 & i > j \end{cases}$$

$$B = [b_{ij}]_{3 \times 4}, b_{ij} = [i^2 - 2i \times j]$$

۲ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ab & 4 \\ 3 & a+b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ با هم برابرند $a^2 + b^2$ را به دست آورید.

۳ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض اند مطلوب است :
 الف) $A \times B$
 ب) $(A+B) \times (A-B)$
 $2A^2 \times 3I$

۴ اگر $A = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2} = \begin{cases} -1 & i=j \\ 0 & i < j \\ 2 & i > j \end{cases}$ باشد حاصل $A \times B$ را به دست آورید.

۵ دو ماتریس 2×2 مثال بزنید و به کمک آن نشان دهید $A+B = B+A$

۶ اگر $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$ باشد مقدار x را به دست آورید.

۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^5 - A^4$ را بیابید.

۸ ماتریس اسکالری مانند $A = [a_{ij}]$ از مرتبه ۳ مثال بزنید که $a_{22} + a_{33} = -2$ باشد.

۹ اگر حاصل ضرب دو ماتریس A و B صفر باشد. حداقل یکی از ماتریس‌ها، ماتریس صفر است. به

کمک یک مثال نقض نادرستی حکم فوق را بیان کنید.

۱۰ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ باشد و $A^2 = \alpha A + \beta I$ مقدار α و β را بیابید.

۱۱ ماتریس قطری مانند $B = [b_{ij}]$ از مرتبه ۳ مثال بزنید. که در آن $b_{ij} = [i+j]$ باشد. سپس حاصل B^2

را به دست آورید.

۱۲ با یک مثال نقض نشان دهید که ضرب ماتریس‌های مربعی 2×2 خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۱۳ اگر A و B ماتریس 3×3 تعویض پذیر باشند ثابت کنید.

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

۱۴ برای هر ماتریس مربعی A و همانی I که A با I هم مرتبه است ثابت کنید.

$$(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$$

درس
دوم

وارون ماتریس و دترمینان

اهداف درس دوم

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

- ۱ آشنایی با وارون ماتریس و تعریف آن
- ۲ مشخص کردن ماتریس‌های وارون‌پذیر (نامفرد) و وارون ناپذیر (منفرد) و شرط وارون‌پذیری ماتریس
- ۳ پیدا کردن وارون ماتریس‌های نامفرد
- ۴ حل دستگاه‌ها به کمک وارون ماتریس و پیدا کردن جواب آنها
- ۵ به دست آوردن دترمینان ماتریس‌های 2×2 و 3×3
- ۶ آشنایی با ویژگی‌های دترمینان و کاربرد دترمینان

روش تدریس درس دوم

ابتدا در مورد وارون اعداد حقیقی صحبت شود و مشخص کنید که همه اعداد حقیقی وارون ندارند. سپس ۲ ماتریس که وارون یکدیگر هستند را در هم ضرب کنید تا به ماتریس همانی برسید. از دانش‌آموزان بخواهید برای یک ماتریس خاص، ماتریسی بیابند که حاصل ضرب آنها برابر ماتریس همانی شود. سپس مبحث وارون را بیان کنید. همانند مسئله صفحه ۲۲ مثال حل کنید.

پرسش متن صفحه ۲۳ بالای صفحه برای آشنایی با وارون ماتریس است.

پرسش متن صفحه ۲۳ (وسط صفحه) را دانش‌آموز حل کند و به این نتیجه برسد که $(A^{-1})^{-1} = A$ چند نمونه ماتریس مثال بزنید و از دانش‌آموزان خواسته شود. آنها را حل کند و وارون ماتریس را بیابند در این مثال‌ها، ماتریس‌هایی مثال بزنید که وارون نداشته باشند.

قضیه صفحه ۲۳ برای دانش‌آموزان ثابت شود و به آنها گفته شود که ماتریس در صورت وارون‌پذیر بودن فقط یک وارون دارد.

فعالیت صفحه ۲۴ اشاره به حل دستگاه 2×2 به کمک وارون ماتریس است. یک نمونه حل کنید و اجازه دهید فعالیت را دانش‌آموزان حل کنند و مهارت حل دستگاه‌ها به کمک وارون ماتریس را بیابند و مراقب باشید که از شیوه حذفی استفاده نکنند. ماتریس ضرایب، ماتریس مجهول و ماتریس معلوم را از روی

دستگاه مشخص کنید و برعکس دستگاه را به صورت ماتریس بیان کنید و اجازه دهید دانش آموزان ماتریس را به صورت دستگاه حل کنند.

حالت‌های مختلف دستگاه را در نظر بگیرید و اجازه دهید دانش آموزان دستگاه را حل کنند و مشخص کنند کدام دستگاه‌ها جواب دارند یا جواب ندارند یا بی‌شمار جواب دارند. وضعیت دو خط در صفحه را برای آنها بیان کنید و مشخص کنید که حل دستگاه یعنی بررسی وضعیت دو خط در صفحه است.

رابطه بین تعداد جواب دستگاه‌ها و وضعیت خط در صفحه را توسط دانش آموزان بیابید. برای این کار، کار در کلاس صفحه ۲۶ بسیار کمک می‌کند.

تاریخچه‌ای در مورد دترمینان ماتریس بیان کنید و دترمینان ماتریس‌های 2×2 و 3×3 را بیابید. چندین نمونه مثال بیان کنید تا دانش آموزان دترمینان‌های آنها را مشخص کنند.

دستور ساروس را برای حل دترمینان 3×3 به عنوان یک مهارت به دانش آموزان بیان کنید و چند مثال بیان کنید.

مثال متن بالای صفحه ۲۹ سمت راست یک سؤال باز پاسخ است می‌خواهیم به دانش آموزان بگوییم ماتریس‌های زیادی با این شرایط وجود دارند. دقت شود که این سؤال جواب منحصر بفرد ندارد.

کار در کلاس صفحه ۲۹

در مورد ویژگی دترمینان ماتریس صحبت می‌کند در قسمت اول به این نتیجه می‌رسیم که $|AB| = |A||B|$ البته مثال را دانش آموزان خودشان حل کنند و به نتیجه برسند. چند نمونه مثال از این نمونه بیان شود.

قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۲۹

این مثال یک مسئله باز پاسخ است و شما در کلاس مثال‌های مختلفی را بیان کنید. اجازه دهید دانش آموزان این مثال را خودشان حل کنند $|A^2| = |A|^2$ و نتیجه بگیرید که $|A^n| = |A|^n$

قسمت ۳ کار در کلاس صفحه ۲۹

به کمک دستور ساروس و بسط به دست آورید. اجازه دهید دانش آموزان به این هدف برسند که دترمینان ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

قسمت ۴ کار در کلاس صفحه ۲۹

هدف اصلی $|KA| = K^T|A|$ می‌خواهیم دانش‌آموزان با حل مثال به این نتیجه برسند دقت شود که این نتیجه در کتاب نیامده ولی با دانش‌آموزان باید به این نتیجه برسیم که بعداً در تمرین ۸ صفحه ۳۱ نمونه‌ای از آن را می‌بینیم.

توصیه‌های آموزشی

- ۱ در پیدا کردن وارون ماتریس دقت شود که چند نمونه اول، ماتریس‌هایی باشند که وارون پذیر باشند. سپس نمونه‌ای را بیان کنید که وارون پذیر نباشند.
- ۲ شرط وارون‌پذیری ماتریس بیان شود تا بدانند که کدام‌ها وارون‌پذیراند.
- ۳ پیدا کردن وارون ماتریس را با الگو به آنها آموزش دهید.
- ۴ در حل دستگاه‌ها به کمک وارون ماتریس دقت شود دانش‌آموزان دنبال شیوه‌های حذفی نباشند.
- ۵ در تعداد جواب دستگاه به کمک مدل هندسی و تحلیلی ارتباط برقرار شود و دانش‌آموزان هر دو شیوه را بشناسند.
- ۶ اجازه دهید دانش‌آموزان در به‌دست آوردن دترمینان 3×3 از شیوه بسط استفاده کنند چند مورد به‌صورت اجباری از آنها بخواهید که به کمک بسط به‌دست آورند. سپس از شیوه ساروس استفاده کنند.
- ۷ کار در کلاس‌ها به‌دقت حل شود تا به نتایج و اهداف درس برسند.
- ۸ برخی از ویژگی‌های دترمینان به‌صورت کار در کلاس مطرح شده با حل آن کار در کلاس‌ها ویژگی و نتایج را پررنگ بیان کنید.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

- ۱ در به‌دست آوردن وارون ماتریس $\frac{1}{|A|}$ را دانش‌آموزان فراموش می‌کنند و فقط به ماتریس الحاقی فکر می‌کنند.
- ۲ شرط وارون‌پذیری را در نظر نمی‌گیرند و از هر ماتریس وارون می‌گیرند.
- ۳ دانش‌آموزان باید بدانند که ماتریس‌های غیرمربعی وارون‌پذیر نیستند و در مورد آنها از وارون استفاده نمی‌شود.

۴ در حل دستگاه‌ها، دانش‌آموزان ماتریس ضرایب را با مجهول می‌نویسند.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 3y \\ x & -2y \end{bmatrix}$$

۵ در حل دستگاه به کمک وارون ماتریس، شرط جواب داشتن را رعایت نمی‌کنند و دستگاه‌های فاقد جواب به دنبال جواب می‌گردند.

۶ در به دست آوردن دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - bc$ منفی بین را فراموش می‌کنند و با هم جمع می‌کنند. $ad + bc$ را محاسبه می‌کنند.

۷ در محاسبه دترمینان 3×3 به کمک بسط (-1) را به توان i نمی‌رسانند و اشتباه، از این نمونه زیاد هست.

۸ در ویژگی دترمینان دانش‌آموزان احساس می‌کنند چون $|AB| = |A||B|$ پس دترمینان $|A \pm B| = |A| \pm |B|$

۹ در محاسبه دترمینان $|KA|$ دانش‌آموزان $|K||A|$ را محاسبه می‌کنند.

۱۰ در شیوه ساروس:

$$\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & g & g & h \end{array}$$

درایه‌ها را اشتباهی در هم ضرب می‌کنند و کنار هم درست قرار نمی‌دهند و عددها اشتباه حساب می‌شود و یا برعکس حساب می‌کنند یعنی.

$$(ceg + afh + bdg) - (aeg + bfg + cdh)$$

نمونه سؤال‌های ارزشیابی (۱)

۱ مقدار a را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر باشد.

۲ اگر ماتریس‌های A و B وارون پذیر نباشند حاصل $A \times B$ کدام است.

$$A = \begin{bmatrix} a+2 & 3 \\ a & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1-b & 2 \\ -b & 3 \end{bmatrix}$$

۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد. حاصل $A - A^{-1}$ را به دست آورید.

۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد نشان دهید $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

۵ ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $A \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد.

۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$ باشد. حاصل $|A^{-1}|$ را به دست آورید.

۷ اگر دترمینان ماتریس A با دترمینان ماتریس وارون A برابر باشد. نشان دهید که دترمینان A برابر مثبت یا منفی یک است.

۸ برای ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و عدد حقیقی ۴ نشان دهید.

$$(4A)^{-1} = \frac{1}{4} A^{-1}$$

۹ اگر $A = [z^2 - 2]$ و ماتریس 2×2 باشد. آیا A^{-1} وجود دارد؟ چرا؟ در صورت وجود وارون، وارون آن را بیابید.

۱۰ برای ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ نشان دهید $(A^{-1})^{-1} = A$

۱۱ اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ 3 & |A| \end{bmatrix}$ باشد.

الف) ماتریس A را مشخص کنید که مجموعه درایه‌های آن ۷ باشد.

ب) از بین ماتریس A ، ماتریس قطری A را بیابید.

۱۲ دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$ را به کمک وارون ماتریس حل کنید.

۱۳ اگر دستگاه $\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ a^2x + (a+2)y = 5 \end{cases}$ جواب نداشته باشد مقدار a را بیابید.

۱۴ اگر در حل دستگاه $\begin{cases} ax+by=4 \\ cx+dy=-5 \end{cases}$ به کمک وارون ماتریس، $\begin{bmatrix} 12 \\ 47 \end{bmatrix}$ ماتریس وارون ضرایب باشد. مقدار $x+y$ را به دست آورید.

۱۵ اگر A و B از مرتبه ۲ و وارون پذیر باشند. نشان دهید $A \times B$ وارون پذیر است.

۱۶ با یک مثال نقض نشان دهید. برای دو ماتریس مربعی A و B و هم مرتبه $|A+B| = |A| + |B|$ برقرار نیست.

۱۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ باشد. حاصل دترمینان $2A^2$ کدام است.

۱۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد. سطر اول ماتریس A را در ۲ ضرب می کنیم و B می نامیم و ستون سوم ماتریس A را در ۲ ضرب می کنیم و C می نامیم. نشان دهید دترمینان B و C با هم برابرند و ۲ برابر دترمینان A هستند.

۱۹ اگر A یک ماتریس قطری از مرتبه ۳ باشد که هر درایه آن به صورت $a_{ij} = [i-2j]$ آنگاه حاصل $|A^2|$ کدام است.

۲۰ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد. دترمینان $A \times B$ کدام است.

۲۱ اگر A یک ماتریس اسکالر به صورت $3I$ و 3×3 باشد. حاصل دترمینان $|A|$ را به دست آورید.

۲۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ d & e & f \end{bmatrix}$ نشان دهید دترمینان ماتریس A صفر است. چه نتیجه ای می گیرید. آن را بیان کنید.

۲۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ باشد و ماتریس A وارون پذیر باشد. آنگاه $(|A|^2 - 2)$ چقدر است؟

حل تمرین های صفحه ۲۰

$$\text{۳ ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ آنگاه}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{۴ ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 33 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 33 & 12 \end{bmatrix}$$

$A \times B = A \times C$ اما ماتریس های B و C برابر نیستند.

۵

$$A^r = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{2r} = A^r \times A = I \times A = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^y = A^r \times A = (A^r)^r \times A = I^r \times A = I \times A = A$$

۸

$$B = [b_{ij}]_{r \times r} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_1 b_{12} & r_1 b_{13} \\ r_2 b_{21} & r_2 b_{22} & r_2 b_{23} \\ r_3 b_{31} & r_3 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر یک ماتریس قطری، در یک ماتریس هم مرتبه خودش ضرب شود آنگاه درایه a_{11} ماتریس قطری در تمام درایه‌های سطر اول b_{1j} ماتریس B ضرب می‌شود و به همین ترتیب درایه a_{22} در تمام درایه‌های سطر دوم ماتریس B یعنی b_{2j} ضرب می‌شود.

$$\text{آنگاه } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{۹ الف}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} kb_{11} & kb_{12} & kb_{13} \\ kb_{21} & kb_{22} & kb_{23} \\ kb_{31} & kb_{32} & kb_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = (kI)B = k(IB) = kB$$

$$A \times B = (kI)B = k(IB) = kB$$

$$B \times A = B \times kI = k(BI) = kB$$

ب) $A \times B = B \times A$ بله

۱۰

$$(A+B)^T = (A+B) \times (A+B) = A^T + AB + BA + B^T \quad \underline{AB = BA} \quad A^T + 2AB + B^T$$

حل تمرین‌های صفحه ۳۰ کتاب

۳

$$|A| = 5 |A| \times 4 |A|^T - 5 |A| \Rightarrow 20 |A|^T - 6 |A| = 0$$

$$\Rightarrow 2 |A| (10 |A|^T - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \rightarrow |A|^T - 2 = -2 \\ |A| = \pm \frac{\sqrt{30}}{10} \rightarrow |A|^T - 2 = \begin{cases} \frac{3\sqrt{30} - 200}{100} \\ \frac{-3\sqrt{30} - 200}{100} \end{cases} \end{cases}$$

$$|A| = d \times (-1)^{r+1} \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} + e(-1)^{r+2} \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f(-1)^{r+3} \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

۴

اگر دو سطر ماتریس برابر باشد. دترمینان ماتریس صفر است.

الف ۸

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ka & kb \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = (kaei + kbf g + kcdh) - (kceg + kafh + kbdi)$$

$$|B| = k((aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)) = k|A|$$

نتیجه می‌گیریم.

اگر یک سطر یک ماتریس در عدد k ضرب شود دترمینان آن ماتریس در همان عدد ضرب می‌شود.

۹

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad - bc, |B| = k^2 ad - k^2 cb = k^2(ad - bc) = k^2|A|$$

نتیجه می‌گیریم اگر همه درایه‌های یک ماتریس 2×2 را در یک عدد k ضرب کنیم آنگاه دترمینان آن

ماتریس در k^2 ضرب می‌شود.

$$\|A\| = |A|^2 \times |A| = |A|^3 = 5^3 = 125$$

۱۰

۱۲ شرط جواب منحصر به فرد این است که دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} k & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = -2k - 3 \neq 0 \Rightarrow k \neq -\frac{3}{2}$$

۱۳ الف) دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه را به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 + 10 = 13 \neq 0$$

دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد که آن جواب به صورت زیر است.

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 39 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -6 + 6 = 0 \quad (\text{ب})$$

دستگاه جواب منحصر به فرد ندارد. اما برای مشخص کردن اینکه جواب ندارد یا بی شمار جواب دارد می توان به صورت هندسی بررسی کرد یعنی:

$$\frac{1}{-2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{5}{1}$$

پس دستگاه جواب ندارد زیرا خطوط فقط موازی اند.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 12 - 12 = 0 \quad (\text{پ})$$

دستگاه جواب منحصر به فرد ندارد یا جواب ندارد یا بی شمار جواب دارد برای مشخص کردن به صورت

هندسی عمل می کنیم یعنی:

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$$

پس دو خط منطبق هستند یعنی دستگاه بی شمار جواب دارد.

نمونه سؤال های ارزشیابی (۲)

۱ اگر $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & b \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -1 \\ d & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $a + b + c + d$ کدام است؟

الف) ۲- ب) ۱- پ) ۳ ت) ۵

۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix}$ باشد، m را بیابید؟

۳ اگر $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = A \times B = [C_{ij}]$ آنگاه

حاصل C_{33} کدام است؟

الف) صفر ب) ۱۶ پ) ۲۲ ت) ۲۴

۴ جواب‌های معادله $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ را بیابید؟

۵ اگر $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $x + y$ کدام است؟

(الف) ۵ (ب) ۴ (پ) ۴ (ت) ۵

۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7 - A^4$ را به دست آورید؟

۷ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ دوتایی (α, β) کدام است؟

(الف) (۱۱, ۲) (ب) (۲, ۱۳) (پ) (۴, ۱۱) (ت) (۴, ۱۳)

۸ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^2 - A$ را بیابید؟

۹ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(الف) $B^T \times A = A \times B$ (ب) $B \times A = I$ (پ) $B \times A = A \times B$ (ت) $B^T \times A = I$

۱۰ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ماتریس $(A - I)^2$ را بیابید؟

۱۱ در ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل $(A + B)^2$ برابر است با:

(الف) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۱۲ در ماتریس‌های $A = B + C$ حاصل $A^2 + B^2 - AB - BA$ را به دست آورید؟

۱۳ در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۱۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^n \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$ در این صورت n را بیابید:

۱۵ در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل جمع درایه‌های $A + A^2 + A^3 + A^4$ کدام است؟

الف) ۴ (ب) ۳ (پ) ۱۲ (ت) ۶

۱۶ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^5 را به دست آورید.

۱۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ در ماتریس A^4 حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی کدام است؟

الف) ۳۲ (ب) ۶۴ (پ) ۱۲۸ (ت) ۲۵۶

۱۸ چند ماتریس مانند $A_{2 \times 2}$ وجود دارد که $A \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ باشد؟

۱۹ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های $A^2 + A + I$ کدام است؟

الف) ۲۷ (ب) ۲۶ (پ) ۲۵ (ت) ۲۴

۲۰ به ازای کدام مقدار k معادله دترمینان $= 0$ فقط یک ریشه دارد؟

$$\begin{vmatrix} x & 0 & k \\ 1 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix}$$

۲۱ اگر a, b دو عدد حقیقی و i و j شماره سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A = [a_i + b_j]_{3 \times 3}$ کدام است؟

الف) صفر ب) $a + b$ پ) $a \times b$ ت) $ab(a + b)$

۲۲ با توجه به معادله $= 8$

$$\begin{vmatrix} x & -2x & -1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

مقدار x را بیابید؟

۲۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $\frac{1}{4}A^3$ کدام است؟

الف) ۳۲ ب) -۶۴ پ) ۱۶ ت) -۱۲۸

۲۴ اگر $A = [(i - j)]_{3 \times 3}$ ، دترمینان ماتریس $\frac{1}{4}A$ را بیابید؟

۲۵ اگر حاصل دترمینان روبه‌رو ۶ باشد، a کدام است؟

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}$$

الف) -۳ ب) -۲ پ) ۲ ت) ۳

۲۶ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|AB| + 2|A + B|$ را بیابید؟

۲۷ دو سطر یک ماتریس مربع را در عدد ۳ و سه ستون آن را در -۲ ضرب کرده‌ایم. دترمینان ماتریس حاصل چند برابر دترمینان ماتریس اولیه است؟

الف) ۷۲ ب) ۶۴ پ) -۶۴ ت) -۷۲

۲۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ مقدار دترمینان $|A|$ را بیابید؟

۲۹ ماتریس A از مرتبه ۳ است. اگر مقدار دترمینان A برابر ۳ باشد، دترمینان ماتریس $3A$ کدام است؟

- الف) ۶ ب) ۹ پ) ۲۷ ت) ۸۱

۳۰ حاصل $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۳۱ با فرض آنکه $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = a + x \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ مقدار a کدام است؟

- الف) -۸ ب) ۸ پ) ۴ ت) -۴

۳۲ اگر A یک ماتریس 2×2 باشد، که $2A + I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس A را به دست آورید؟

۳۳ اگر بدانیم $A^{-1} + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل دترمینان ماتریس $A + I$ کدام است؟

- الف) ۱ ب) $\frac{7}{3}$ پ) $\frac{3}{7}$ ت) -۱

۳۴ مجموع ریشه‌های معادله $\begin{vmatrix} x & 1 & 5 \\ x & x & 2 \\ x & x & x \end{vmatrix} = 0$ را به دست آورید؟

۳۵ اگر $AA^{-1} = A$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ کدام ماتریس است؟

- الف) صفر ب) همانی پ) $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ ت) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

۳۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه جواب معادله $AX = B$ را به دست آورید؟

۳۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

۳۸ اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A را بیابید؟

۳۹ اگر $A^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ دترمینان $3A^2$ را بیابید؟

۴۰ هرگاه $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مقدار دترمینان ماتریس $A^2 \times |A|$ را بیابید؟

۴۱ هرگاه $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(2A)^{-1}$ را بیابید؟

الف) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{18}$ (پ) $\frac{1}{6}$ (ت) $\frac{1}{12}$

۴۲ در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهول به صورت $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ است. اگر $x = 1$ ، مقدار y کدام است؟

۴۳ از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A کدام است؟

الف) $[-17 \quad -12]$ (ب) $[-21 \quad 30]$ (پ) $[-17 \quad 30]$ (ت) $[12 \quad -21]$

۴۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $\frac{1}{3}A^2 + A^{-1}$ را بیابید؟

۴۵ اگر A یک ماتریس 2×2 معکوس پذیر باشد و در رابطه $A^2 = 3A + I$ صدق کند، دترمینان ماتریس $A - A^{-1}$ را به دست آورید؟

۴۶ در کدام گزینه $A = A^{-1}$ است؟

الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ پ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ت) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

۴۷ کدام نادرست است؟ (A مربع مرتبه ۲)

الف) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ ب) $(\det A)^2 = \det A^2$

پ) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ ت) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

۴۸ به ازای کدام مقدار a ، دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = a \times (x - 2) \end{cases}$ بی نهایت جواب دارد؟

۴۹ اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ (m-1)x + y = 3 \end{cases}$ جواب نداشته باشد، m کدام است؟

الف) $-1, -2$ ب) $1, -2$ پ) $-1, 2$ ت) $1, 2$

۵۰ مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} (2m-1)x - 2y = 0 \\ -5x + (m-1)y = 0 \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد؟

۵۱ اگر دستگاه $\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 6x - 3my = n \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟

الف) -11 ب) -13 پ) 22 ت) $\frac{17}{3}$

۵۲ در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ ، وارون ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است. $x + y$ را

بیابید؟

4	3	2	1		4	3	2	1	
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-27	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-1
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-28	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-2
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-29	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-3
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-30	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-4
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-31	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-5
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-32	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-6
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-33	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-34	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-8
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-35	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-9
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-36	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-10
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-37	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-11
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-38	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-12
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-39	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-13
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-40	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-14
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-41	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-15
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-42	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-16
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-43	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-17
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-44	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-18
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-45	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-19
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-46	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-20
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-47	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-21
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-48	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-22
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-49	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-23
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-50	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-24
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-51	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-25
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-52	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	-26