فصل اوّل

۱

دایــره

عکس: محمدرضا دومیری گنجی

قلعهٔ فلک الافلاک که از دوره ساسانیان در شهرستان خرم آباد برجای مانده است.

چرا در ساخت بسیاری از قلعه‌ها در کشورمان از شکل دایره استفاده شده است؟

اهداف کلی فصل ۱

۱ آشنایی با وضعیت‌های مختلف خط و دایره نسبت به هم و اثبات برخی قضایای مربوط به آنها؛

۲ آشنایی با زوایای مرکزی، محاطی، ظلی و اثبات قضایایی در خصوص ارتباط بین اندازه زوایای مذکور و اندازه کمان‌های متقابل یا محصور بین آن زوایا؛

۳ آشنایی و اثبات قضایایی درباره روابط طولی در دایره و استفاده از آن روابط در حل مسائل؛

۴ آشنایی با چندضلعی‌ها و دایره‌های محاطی و محیطی و درک ویژگی‌های آنها با تأکید بر مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها و چندضلعی‌های منتظم.

درس اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

اهداف درس

۱ آشنایی با تعریف دایره و مفاهیم کلیدی در دایره نظیر : وتر، کمان، قطر و زاویه مرکزی؛

۲ بیان وضعیت نقطه نسبت به دایره و مشخص کردن نزدیک‌ترین و دورترین نقطه روی دایره نسبت به یک نقطه خاص؛

۳ تشخیص وضعیت خط و دایره نسبت به هم و بیان حالت‌های مختلف آن؛

۴ رسم خط مماس از یک نقطه در روی دایره بر آن؛

۵ آشنایی با زاویه مرکزی، قطاع و پیدا کردن اندازه زاویه مرکزی، طول کمان روبه‌رو و محیط و مساحت قطاع؛

۶ تعریف زاویه محاطی و اثبات اندازه آن و پیدا کردن اندازه زوایای محاطی در دایره؛

۷ تعریف زاویه ظلی و اثبات اندازه آن و پیدا کردن اندازه زوایای ظلی بر دایره؛

۸ پیدا کردن اندازه زاویه بین دو قاطع بر دایره و زاویه بین دو وتر متقاطع در داخل دایره براساس اندازه کمان‌های محصور بین آنها.

چند نکته خطاب به همکاران محترم قبل از تدریس درس اول :

۱ از قبل به دانش‌آموزان گفته شود که خط‌کش و پرگار همراه داشته باشند.

۲ درس اول را می‌توان در ۳ یا ۴ جلسه ۷۵ دقیقه‌ای، با توجه به آمادگی دانش‌آموزان، ارائه داد.

۳ مطالبی که پیشنهاد می‌شود در جلسه اول ارائه شود : مفاهیم اولیه دایره، اوضاع نسبی نقطه نسبت به

دایره، اوضاع نسبی خط و دایره، رسم مماس بر دایره از نقطه روی آن، زاویه مرکزی و پیدا کردن طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی (صفحات ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ تا انتهای «کار در کلاس» صفحه ۱۲).

انجام فعالیت صفحه ۱۳ به عنوان تمرین از دانش‌آموز خواسته شود.

مطالبی که پیشنهاد می‌شود در جلسه دوم ارائه شود :

شروع با انجام فعالیت پایین صفحه ۱۳ کتاب درسی، تعریف زاویه محاطی و اثبات اندازه آن در سال‌های مختلف به همراه حل چند نمونه مثال، تعریف زاویه ظلی به همراه پیدا کردن اندازه آن و حل چند نمونه سؤال ارائه شود. (صفحات ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ تا ابتدای فعالیت پایین صفحه ۱۵).

پیشنهاد می‌شود در جلسه سوم این مطالب بیان شود : زوایای بین دو وتر متقاطع در داخل دایره، زاویه بین دو قاطع بر دایره در خارج آن، رابطه طولی بین وترهای در داخل و خارج دایره (صفحات ۱۵ و ۱۶ و ۱۸) تمرینات صفحه ۱۶ و ۱۷ برای حل در منزل پیشنهاد می‌شود.

در جلسه چهارم، حل تمرین‌های صفحه ۱۶ و ۱۷ و برگزاری آزمون احتمالی پیشنهاد می‌شود.

روش تدریس درس اوّل

می‌توان با استفاده از مفهوم مکان هندسی، وارد مبحث دایره شد؛ یعنی یک نقطه روی تخته رسم می‌کنیم و آن را O می‌نامیم. به کمک خط‌کش، یک نقطه فرضی به فاصله ۱۰cm از O رسم می‌کنیم. سپس نقطه دیگری پیدا می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا چند نقطه به‌دست آید. آن‌گاه دانش‌آموزان خواهند گفت که این نقاط دایره هستند. سپس دایره را تعریف می‌کنیم و نوع نمایش را، مطابق با رسم‌الخط کتاب، بیان می‌کنیم. (لازم به ذکر است که نیازی به ارائه تعریف دایره به‌عنوان مکان هندسی نیست. چون که جزء اهداف کتاب نمی‌باشد).

سپس وارد مباحث وضعیت نقطه نسبت به دایره می‌شویم؛ یعنی چند نقطه روی تخته رسم می‌کنیم و وضعیت آن را نسبت به مرکز دایره مقایسه می‌کنیم. در اینجا بد نیست به تقسیم نقاط صفحه به سه مجموعه اشاره شود و بعد وضعیت نقطه و دایره بیان شود. جای خالی صفحه ۱۰ کتاب را کامل می‌کنیم. حال وارد مبحث وضعیت خط و دایره می‌شویم. قبل از شروع این مبحث، بهتر است ابتدا به «یادآوری» پایین صفحه ۱۰ اشاره و فاصله نقطه تا خط بیان شود و نشان داده شود این اندازه از هر فاصله دیگر نقطه تا خط کوتاه‌تر است. آن‌گاه به وضعیت خط و دایره اشاره و تعاریف بیان شود. سپس جای خالی صفحه ۱۱ را به‌صورت زیر کامل می‌کنیم.

الف) ۲ ب) یک خط بر دایره مماس است. پ) نقطه مشترک ندارند.

فعالیت صفحه ۱۱ انجام می‌شود.

این فعالیت دو هدف دارد :

۱ درک اینکه خط مماس بر دایره، بر شعاع دایره در نقطه تماس، عمود است.

۲ آشنایی با نحوه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی آن.

دقت شود که این ۲ موضوع بعد از حل فعالیت توسط دانش‌آموزان بیان شود.

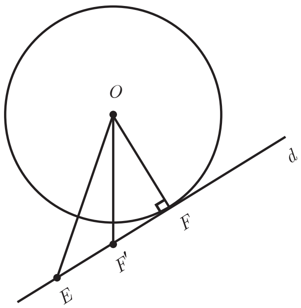
انجام فعالیت صفحه ۱۱ کتاب :

الف) نقطه F نزدیک‌ترین نقطه روی خط نسبت به O است؛ زیرا F تنها نقطه روی خط d است که روی دایره قرار دارد و بقیه نقاط خط d خارج دایره هستند. می‌دانیم که نقاط روی دایره با شعاع دایره برابرند، ولی نقاط خارج دایره، از شعاع بیشترند.

ب) نقطه F نزدیک‌ترین نقطه روی خط نسبت به O است؛ زیرا به خلف فرض می‌کنیم که خط عمود در نقطه دیگری مانند F' خط D را قطع کند. آن‌گاه نقطه‌ای مانند E را روی خط d در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که $FF'=F'E$ در دو مثلث $\overset{\Delta}{OFF'}$ و $\overset{\Delta}{OFE}$ داریم :

$$\overset{\Delta}{OFF'} \cong \overset{\Delta}{OF'E} \begin{cases} OF' = OF' \\ F'_1 = F'_2 = ۹۰ \\ EF' = FF' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض زض}} OF = OE = r$$

یعنی نقطه E نیز روی دایره قرار دارد که این با خط مماس d بر دایره C در تناقض است.



پ) **نتیجه** : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F بر هم عمودند. قسمت پ «فعالیت» طریقه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی آن است. بهتر است این ترسیم مهم جلوه داده شود.

طریقه رسم خط مماس از نقطه F روی دایره

نقطه F روی دایره را در نظر می‌گیریم. از نقطه F به مرکز دایره O وصل می‌کنیم. سپس از نقطه F روی خط OF بر آن عمود می‌کنیم. این خط بر دایره مماس است.

مفاهیم کلی مانند شعاع، وتر، قطر، کمان و زوایای مرکزی، به همراه رسم شکل، تعریف شود. زاویه مرکزی را تعریف و اندازه زاویه مرکزی و کمان روبه‌رو را بیان کنیم. سپس به دنبال پیدا کردن طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی باشیم. حل «کار در کلاس» صفحه ۱۲ به دنبال این موضوع است که دانش‌آموز، با حل آن، اندازه کمان و طول کمان روبه‌رو به یک زاویه مرکزی را یاد می‌گیرد. سپس به کمک آنها محیط و مساحت قطاع بیان می‌شود.

حل «کار در کلاس» صفحه ۱۲ :

۱ در مورد رابطه نوشته شده توضیح داده می‌شود که چگونه به‌دست آمده است.

۲ $\text{طول } \widehat{AB} = \frac{۶۰}{۳۶۰} \times ۲\pi . OA = \frac{\pi}{۳} \times OA \qquad \widehat{AB} = ۶۰^\circ$

$\text{طول } \widehat{A_۱B_۱} = \frac{۶۰}{۳۶۰} \times ۲\pi . OA_۱ = \frac{\pi}{۳} \times OA_۱ \qquad \widehat{A_۱B_۱} = ۶۰^\circ$

۳ $$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{۳۶۰} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{L}{۲\pi R} \Rightarrow L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$$

می‌دانیم یک درجه برابر $\frac{۱}{۳۶۰}$ دایره است. پس مساحت زاویه مرکزی ۱° برابر $\frac{۱}{۳۶۰}$ مساحت دایره است؛ یعنی مساحت قطاع به اندازه زاویه α درجه برابر α برابر مساحت قطاع یک درجه است.

$$S = \alpha \times \frac{۱}{۳۶۰} \times \pi R^۲ = \frac{\pi R^۲}{۳۶۰}\alpha$$

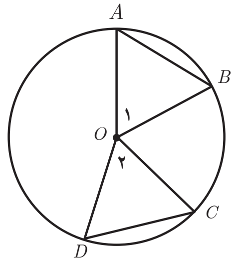
«فعالیت» صفحه ۱۳ چند هدف دارد : در شماره ۱ و ۲ می‌خواهیم بیان کنیم اگر دو وتر مساوی باشند، کمان‌های نظیر آنها برابرند و برعکس. در ۳ و ۴ و ۵ می‌خواهیم بیان کنیم قطر عمود بر وتر، وتر و کمان روبه‌رو به وتر را نصف می‌کند و برعکس. از این هدف نتیجه می‌توان گرفت که عمودمنصف هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد.

فعالیت صفحه ۱۳

۱ زاویه‌های $O_۱$ و $O_۲$ زوایای مرکزی هستند. اندازه هر زاویه مرکزی با کمان روبه‌رو برابر است.

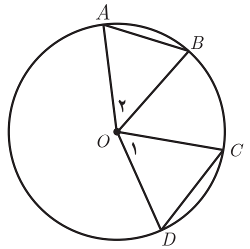
$\hat{O}_۱ = \widehat{AB}$

$\hat{O}_۲ = \widehat{DC} \qquad \widehat{AB} = \widehat{DC} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$



دو مثلث $O\overset{\Delta}{A}B$ ، $O\overset{\Delta}{D}C$ را در نظر می‌گیریم.

$$O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{D}C \begin{cases} OA = OD = r \\ OB = OC = r \\ \hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} AB = DC$$

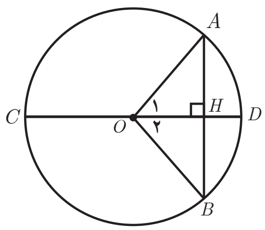


۲ فرض $AB{=}CD$ حکم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

$$O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{C}D \begin{cases} OA = OC = r \\ OB = OD = r \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}$$

$O_{۱}$ و $O_{۲}$ زوایای مرکزی‌اند. $O_{۲} = \overset{\frown}{AB}$ و $O_{۱} = \overset{\frown}{CD}$ در نتیجه
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

۳ $O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{H}B \begin{cases} OA = OB \\ OH = OH \end{cases}$

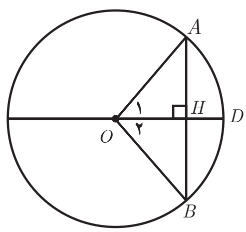


دو مثلث $O\overset{\Delta}{A}H$ و $O\overset{\Delta}{H}B$ بنا به برابری وتر و یک ضلع قائمه، همنهشت هستند.

در نتیجه $AH{=}HB$ و $\hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}$ و $O_{۱}$ و $O_{۲}$ زوایای مرکزی هستند.
$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$

۴ O را به A و B وصل می‌کنیم.

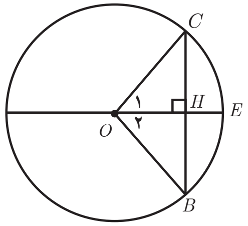
$$O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{H}B \begin{cases} OA = OB \\ OH = OH \\ AH = HB \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \left. \begin{array}{l} O_{۱} = O_{۲} \\ O_{۱} = \overset{\frown}{AD} \\ O_{۲} = \overset{\frown}{DB} \end{array} \right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$$



و از طرفی $\hat{H}_{۱} = \hat{H}_{۲}$ و $\hat{H}_{۱} + \hat{H}_{۲} = ۱۸۰$ در نتیجه $\hat{H}_{۱} = \hat{H}_{۲} = ۹۰$

۵ E وسط کمان $\overset{\frown}{CB}$ است؛ یعنی $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EB}$

$O_۱$ و $O_۲$ زوایای مرکزی هستند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{CE}\\ \hat{O}_۲ = \overset{\frown}{EB}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

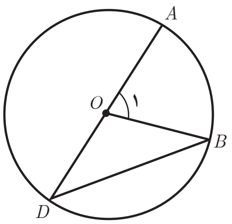
$$O\overset{\Delta}{C}H \cong O\overset{\Delta}{H}B \begin{cases} OC = OB \\ O_۱ = O_۲ \\ OH = OH \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} CH = BH \\ H_۱ = H_۲ \end{array}$$

از طرفی $H_۱ + H_۲ = ۱۸۰ \to H_۱ = H_۲ = ۹۰$

۶ با توجه به فعالیت شماره ۴ و ۵ کافی است وسط کمان را به وسط وتر وصل کنیم و ادامه دهیم تا دایره را قطع کند. این پاره‌خط قطر دایره و عمود بر وتر است.

موضوع «فعالیت» پایین صفحه ۱۳ اندازه زاویه محاطی است. ابتدا زاویه محاطی را تعریف و یک زاویه محاطی رسم کنید. سپس قضیه را ثابت کنید. سه حالت برای قضیه در نظر گرفته شده است.

فعالیت صفحه ۱۳

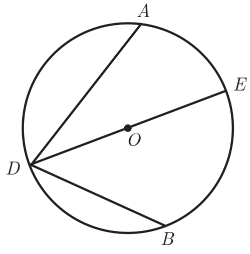


۱ B را به O وصل می‌کنیم. مثلث OBD متساوی‌الساقین است.

$OB = OD \to \hat{D} = \hat{B}$ و $O_۱$ زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین است.

$$\hat{O}_۱ = \hat{D} + \hat{B} = ۲\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = \frac{\hat{O}_۱}{۲}$$

از طرفی $\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AB}$ در نتیجه $\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$



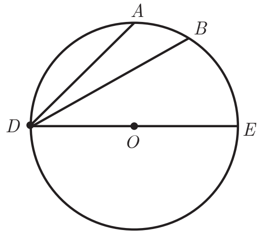
۲ در حالت دوم فرض می‌کنیم O بین اضلاع زاویه محاطی واقع باشد.

D را به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا کمان روبه‌رو را در E قطع کند.

$$A\hat{D}E = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲} \text{ و } E\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{EB}}{۲}$$

$$A\hat{D}B = A\hat{D}E + E\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{EB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۳ در این حالت، مرکز دایره خارج زاویه مرکزی قرار دارد.
از نقطه D به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. آن‌گاه بنا به قسمت الف داریم :



$$A\hat{D}E=\frac{\overset{\frown}{ABE}}{۲} \text{ و } B\hat{D}E=\frac{\overset{\frown}{BE}}{۲}$$

$$A\hat{D}B=A\hat{D}E-B\hat{D}E=\frac{\overset{\frown}{ABE}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{BE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{ABE}-\overset{\frown}{BE}}{۲}$$

$$A\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

در اینجا بهتر است از چند مثال برای یافتن اندازه زاویه محاطی استفاده شود. چند نمونه مثال در ادامه در قسمت مثال‌های فصل اول درس ۱ ارائه شده است.

در انتها، به‌صورت یک قضیه، اندازه زاویه محاطی را بیان می‌کنیم (قضیه صفحه ۱۴). حال، زاویه ظلی را تعریف و چند زاویه ظلی رسم می‌کنیم. به کمک حل فعالیت صفحه ۱۴ اندازه زاویه ظلی به‌دست می‌آید. بعد از حل فعالیت این صفحه، قضیه صفحه ۱۵، که نتیجه فعالیت است، بیان می‌شود. هدف این فعالیت پیدا کردن اندازه ظلی در دایره است.

حل فعالیت صفحه ۱۴ :

الف) $D\hat{A}C=۹۰^\circ$ و بنابراین $D\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ABD}$

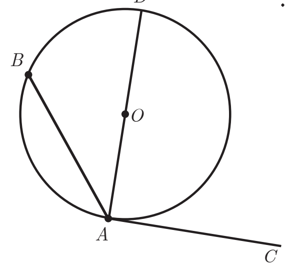
ب) زاویه DAB یک زاویه محاطی است؛ بنابراین : $D\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB}$

پ) از (الف) و (ب) داریم : $D\hat{A}C-D\hat{A}B=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DBA}-\overset{\frown}{DB})$

$$B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$

ت) فرض می‌کنیم زاویه $B\hat{A}C$ منفرجه باشد. نقطه A را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند.

$$D\hat{A}C=۹۰^\circ \rightarrow D\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DA}$$



زاویه DAB یک زاویه محاطی است $D\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\widehat{BD}$

$$B\hat{A}C=B\hat{A}D+D\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\widehat{BD}+\frac{۱}{۲}\widehat{DA}=\frac{۱}{۲}\widehat{BDA}$$

در این قسمت چند مثال بیان کنید تا دانش‌آموزان اندازه زاویه ظلی را یاد بگیرند.

«کار در کلاس» صفحه ۱۵ حل شود. هدف، بیان نتیجه‌ای است که در ادامه آن بیان شده است. از این کار در کلاس برای اثبات فعالیت بعدی کمک گرفته می‌شود؛ بنابراین، بدون انجام دادن کار در کلاس، وارد فعالیت نشوید.

حل کار در کلاس صفحه ۱۵ :

۱ الف) زوایای $B\hat{A}D$ و $A\hat{D}C$ با هم برابرند؛ زیرا :

$$AB \parallel CD \text{ و } AD_{\text{مورب}} \Rightarrow B\hat{A}D=A\hat{D}C$$

ب) کمان‌های $\widehat{BD}$ و $\widehat{AC}$ برابرند زیرا زوایای $B\hat{A}D$ و $A\hat{D}C$ محاطی هستند؛ پس،

$$B\hat{A}D=\frac{۱}{۲}\widehat{BD}$$

$$A\hat{D}C=\frac{۱}{۲}\widehat{AC}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود. $\widehat{AC}=\widehat{BD}$

۲ الف) وترهای EF و GH رسم می‌شود و پاره‌خط EH را رسم می‌کنیم.

ب) زوایای FEH و EHG برابرند؛ زیرا :

$$\left.\begin{array}{l} F\hat{E}H=\frac{۱}{۲}\widehat{FH} \\ E\hat{H}G=\frac{۱}{۲}\widehat{EG} \end{array}\right\} \Rightarrow F\hat{E}H=E\hat{H}G$$

بنا به عکس قضیه خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌شود وتر EF موازی GH است.

می‌خواهیم زوایای بین دو وتر متقاطع در داخل یا امتداد آنها در خارج دایره را پیدا کنیم. با حل فعالیت پایین صفحه ۱۵ و ۱۶ این مقدار به‌دست می‌آید.

هدف این فعالیت؛ پیدا کردن زاویه بین امتداد دو وتر متقاطع در خارج دایره و زاویه بین دو وتر متقاطع در داخل دایره است.

حل فعالیت صفحه ۱۵ :

۱ $AD \| CF$ و AE مورب $\Rightarrow D\hat{A}E = F\hat{C}E$

زاویه FCE یک زاویه محاطی است.

$F\hat{C}E = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}$

۲ $BF \| AD$ و BE مورب $\Rightarrow F\hat{B}E = D\hat{A}E$

زاویه $F\hat{B}E$ یک زاویه محاطی است. $F\hat{B}E = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}$

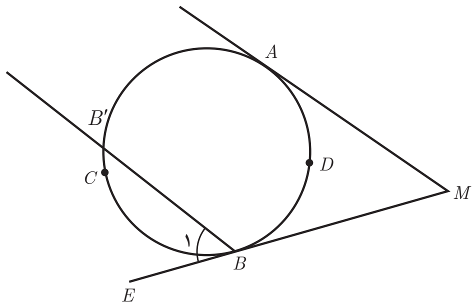
حل تمرین صفحه ۱۶ :

۱ **الف) راه اول** : از نقطه B موازی MA رسم می‌کنیم. $MA \| BB'$ و MB ۱ $\rightarrow \hat{M} = \hat{B}_۱$

$MA \| BB'$ پس $\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{ADB}$

زاویه $B_۱$ یک زاویه ظلی است و اندازه آن برابر است با $\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BB'}}{۲}$

$$\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$$

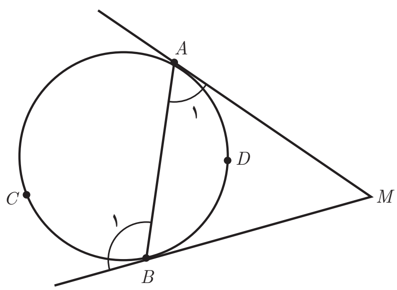


راه دوم : $\hat{B}_۱$ زاویه خارجی مثلث AMB است.

$$\hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{M} \rightarrow \hat{M} = \hat{B}_۱ - \hat{A}_۱$$

زاویه ظلی $\hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲}$ و زاویه ظلی $\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲}$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲}$$



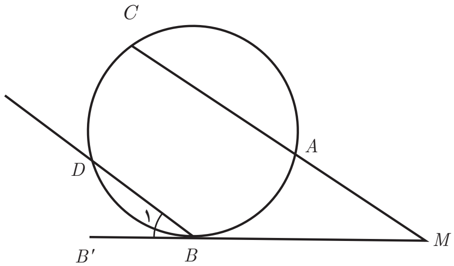
۱۲

ب) راه اول: از B خطی موازی AC رسم می‌کنیم. $MC \parallel BD$ و $MB'\ \backslash \rightarrow \hat{M}=\hat{B}_{۱}$

$B_{۱}=\frac{\overset{\frown}{DB}}{۲}$ زاویه ظلی است.

از طرفی وتر BD موازی AC است؛ بنابراین $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

$$\hat{M}=\hat{B}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{DB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CDB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CDB}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

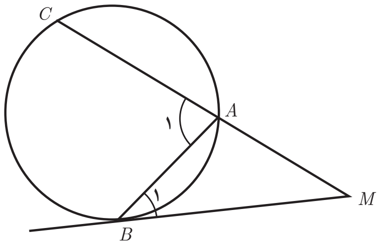


راه دوم: از A به B وصل می‌کنیم. $\hat{A}_{۱}$ زاویه خارجی مثلث MAB است.

$$\hat{A}_{۱}=\hat{B}_{۱}+\hat{M} \Rightarrow \hat{M}=\hat{A}_{۱}-\hat{B}_{۱}$$

$\hat{B}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ زاویه ظلی و $\hat{A}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$ زاویه محاطی

بنابراین داریم $M=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$



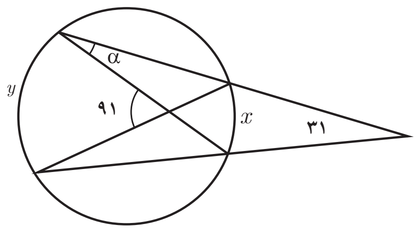
۲

$$۳۱=\frac{y-x}{۲}\rightarrow y-x=۶۲$$

$$۹۱=\frac{y+x}{۲}\rightarrow y+x=۱۸۲$$

$$x=۶۰\ ,\ y=۱۲۲$$

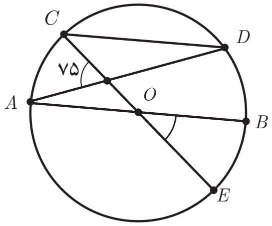
$$\alpha=\frac{x}{۲}=۳۰$$



۳ $\overset{\frown}{MN}=x\ ,\ \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{MQN}-\overset{\frown}{MN}}{۲}=\dfrac{(۳۶۰-x)-x}{۲}=۷۰\Rightarrow x=۱۱۰$

$$\overset{\frown}{QP}=y\ ,\ \hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{QMP}-\overset{\frown}{QP}}{۲}=\dfrac{(۳۶۰-y)-y}{۲}=۸۰\Rightarrow y=۱۰۰$$

$$\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{QM}-\overset{\frown}{PN}}{۲}=\dfrac{۳۶۰-(x+y)}{۲}=\dfrac{۳۶۰-(۱۱۰+۱۰۰)}{۲}=۷۵$$



۴ شعاع CO را ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.

$$CD \parallel AB \rightarrow \overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{DB}$$

$$\underbrace{CD \parallel AB\ ,\ CE}_{\text{مورب}} \rightarrow \hat{C}=\hat{O}$$

زاویه O یک زاویه مرکزی است و اندازه آن چنین است : $\hat{O}=\overset{\frown}{BE}$. C یک زاویه محاطی است و اندازه آن چنین است : $\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{DE}}{۲}$ ؛ بنابراین $\dfrac{\overset{\frown}{DE}}{۲}=\overset{\frown}{BE}$. بنابراین $\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BE}$

$$۷۵=\dfrac{\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{DE}}{۲}=\dfrac{۳\overset{\frown}{CA}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{CA}=۵۰ \text{ و } \overset{\frown}{DB}=۵۰ \text{ و } \overset{\frown}{CD}=۱۸۰-۱۰۰=۸۰$$

۵ AB قطر دایره است؛ بنابراین① $\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{ADB}$. از طرفی $AC \| BD$. پس وترهای محصور به این دو وتر موازی، مساوی هستند؛ یعنی : ② $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$

طرفین رابطه ۱ را از طرفین رابطه ۲ کم می‌کنیم.

$$\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{AD}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}$$

اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر به آن دو کمان برابرند؛ یعنی : $AC=DB$.

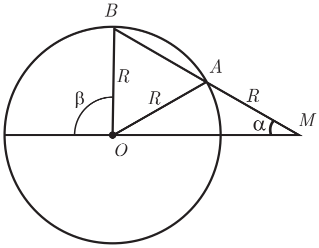
۶ مثلث AMO و ABO متساوی‌الساقین هستند.

$$OA=AM=R\rightarrow A\hat{O}M=\alpha$$

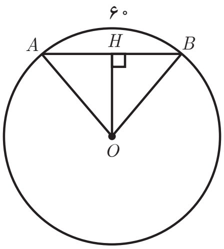
از طرفی $B\hat{A}O$ زاویه خارجی مثلث AOM است؛ پس $B\hat{A}O=A\hat{O}M+\alpha=۲\alpha$

مثلث ABO متساوی‌الساقین است. $BO=AO$ در نتیجه $M\hat{B}O=B\hat{A}O=۲\alpha$

زاویه β زاویه خارجی مثلث BMO است؛ پس $\beta = A\hat{B}O + \hat{\alpha} = ۳\alpha$



۷ **راه اول:** در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{A\hat{B}O}$ ، ارتفاع OH نیمساز و میانه است.



$$\hat{O} = \widehat{AB} = ۶۰$$

$$\hat{O}_۱ = \frac{۱}{۲}\hat{O} = ۳۰$$

$$\overset{\Delta}{O\hat{H}B}: \tan ۳۰ = \frac{HB}{OH} \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۵}{OH} \Rightarrow OH = \frac{۱۵}{\sqrt{۳}} = ۵\sqrt{۳}$$

راه دوم: در مثلث OHB زاویه $\hat{O}_۱ = ۳۰$ پس $HB = \frac{۱}{۲}OB = \frac{۱}{۲}R$ پس $R=۲H=۱۰$

$$OH^۲=OB^۲-HB^۲=۱۰۰-۲۵=۷۵$$

$$OH = ۵\sqrt{۳}$$

راه سوم: مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. $OA=OB=AB=۱۰$

و OH طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع است که برابر است با $OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۰$

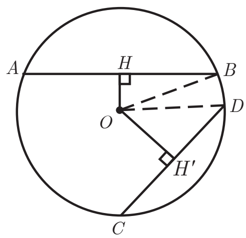
$$OH = ۵\sqrt{۳}$$

۸ از O بر دو وتر عمود می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

$$HB = \frac{۱}{۲}AB \quad , \quad H'D = \frac{۱}{۲}CD$$

$$AB > CD \rightarrow \frac{۱}{۲}AB > \frac{۱}{۲}CD \rightarrow HB > H'D$$

$$\Leftrightarrow HB^۲ > H'O^۲ \leftrightarrow HB^۲ - H'O^۲ > ۰ :①$$



در مثلث‌های قائم‌الزاویه OHB و ODH' بنا به رابطه فیثاغورس داریم :

$$\left.\begin{array}{l} OH^{۲}+HB^{۲}=OB^{۲} \\ OH'^{۲}+H'D^{۲}=OD^{۲} \end{array}\right\} \Leftrightarrow OH^{۲}+HB^{۲}=OH'^{۲}+H'D^{۲}$$

$$\Leftrightarrow HB^{۲}-H'D^{۲}=OH'^{۲}-OH^{۲}$$

بنا به رابطه ۱ سمت چپ تساوی فوق مثبت است پس سمت راست تساوی هم مثبت است یعنی

$$OH'^{۲}-OH^{۲}>۰ \Leftrightarrow OH'^{۲}>OH^{۲} \Leftrightarrow OH'>OH$$

مسائل تکمیلی درس اول

۱ دایره به مرکز $(۰,۰)$. شعاع $\sqrt{۵}$ مفروض است. نقطه $A(m,m-۱)$ خارج دایره قرار ندارد. محدوده m کدام است؟

$$OA \le r \Rightarrow \sqrt{m^{۲}+(m-۱)^{۲}} \le \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow ۲m^{۲}-۲m-۴ \le ۰$$

m		-۱		۲	
$۲m^{۲}-۲m-۴$	$+$		$-$		$+$

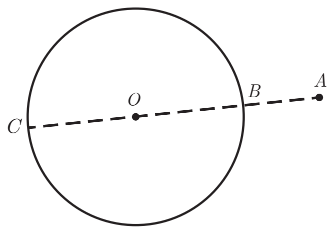
$$m \in [-۱,۲]$$

۲ نزدیک‌ترین فاصله نقطه A به دایره $C(O,R)$ برابر ۲ و دورترین فاصله نقطه A تا دایره برابر ۱۰است. اگر A خارج دایره باشد، شعاع دایره چقدر است؟

از نقطه A بر دایره عمود می‌کنیم؛ یعنی از A به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. AC بر دایره عمود است؛ زیرا بر خط مماس در نقاط A و C عموداند. کمترین فاصله A تا دایره AB و بیشترین فاصله A تا دایره AC است.

$$\left.\begin{array}{l} AB=OA-OB=۲ \\ AC=OA+OB=۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲OA=۱۲ \Rightarrow OA=۶$$

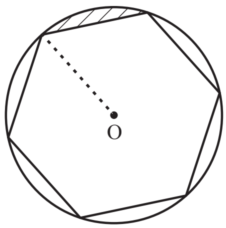
$$۶-OB=۲ \Rightarrow OB=۴$$



۳ در شکل زیر مساحت قسمت هاشور زده را به‌دست آورید. (شعاع دایره ۴ است و شش‌ضلعی منتظم است)

اگر وترها در دایره برابر باشند، کمان‌های نظیر برابرند. شش‌ضلعی منتظم است؛ پس کمان‌های نظیر ضلع‌های شش‌ضلعی برابرند؛ یعنی : $۶x = ۳۶۰ \longrightarrow x = ۶۰$

از طرفی O زاویه مرکزی است.



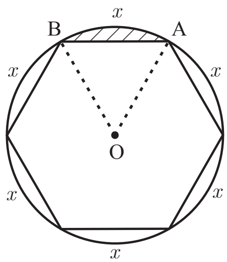
مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است.

$$S_{OAB} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴^{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۶) = \sqrt{۳}$$

از طرفی مساحت قطاع AOB برابر است با

$$\frac{\pi(۴)^{۲}(۶۰)}{۳۶۰} = \frac{۸\pi}{۳}$$

S هاشور = S قطاع − S مثلث = $\frac{۸\pi}{۳} - \sqrt{۳}$



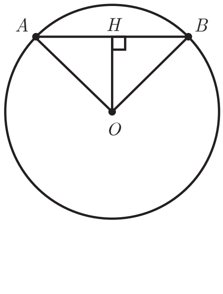
۴ طول وتر AB در دایره $C(O,R)$ برابر ۱۰ سانتی‌متر است. اگر فاصله وتر AB تا مرکز دایره برابر $۵\sqrt{۳}$ باشد. طول کمان AB را به‌دست آورید.

مثلث OAB متساوی‌الساقین است و OH نیمساز و میانه است از طرفی قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

$$OH^{۲} + HB^{۲} = OB^{۲} \Rightarrow (۵\sqrt{۳})^{۲} + (۵)^{۲} = OB^{۲} \Rightarrow OB = ۱۰$$

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و $\hat{O} = ۶۰^{\circ}$، حال طول کمان AB برابر است با

$$\text{طول کمان } AB = \frac{\pi(۱۰)}{۱۸۰} \times ۶۰ = \frac{\pi}{۳}$$



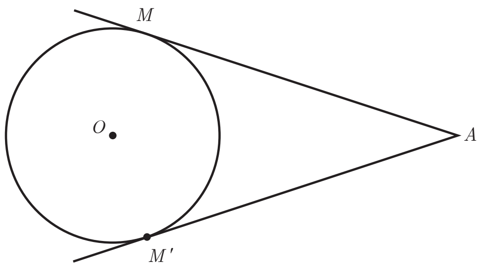
۵ در شکل زیر $\hat{A}=۶۰^\circ$ است و شعاع دایره برابر ۴ سانتی‌متر است. طول کمان MM' و مساحت قطاع OMM' را به‌دست آورید.

از O به M و M' وصل می‌کنیم و $\hat{M}=\hat{M'}=۹۰^\circ$

پس $M\hat{O}M'=۱۲۰$ بنابراین، مساحت قطاع MOM' برابر است با :

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{\pi(۴)^۲\times ۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱۶\pi}{۳}$$

و طول کمان MM' برابر است با $\frac{\pi(۴)}{۱۸۰}\times ۱۲۰=\frac{۸\pi}{۳}$



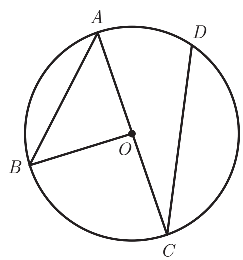
۶ در شکل زیر $\overset{\frown}{AB}=۱۰۰$ و $\overset{\frown}{DC}=۱۵۰$ ، اندازه $\hat{C}$ و $\hat{A}$ و $B\hat{O}C$ را بیابید.

AC قطر دایره است. $\overset{\frown}{BC}=۱۸۰-۱۰۰=۸۰^\circ$ ، زاویه A محاطی است.

$$\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}=۴۰^\circ$$
$$\overset{\frown}{AD}=۱۸۰-\overset{\frown}{DC}=۳۰$$

$\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}=۱۵$ زاویه محاطی است.

زاویه BOC مرکزی است و اندازه آن برابر است با $\overset{\frown}{BC}=۸۰$



۷ در شکل صفحه بعد $B\hat{A}C=\alpha-۱۰$ و $B\hat{O}C=\alpha+۱۵$ است. مقدار α و $B\hat{A}C$ و $B\hat{O}C$ را بیابید.

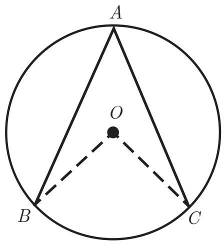
زاویه BAC یک زاویه محاطی است و اندازه آن $B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$

و زاویه O یک زاویه مرکزی است

$$B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود که :

$$B\hat{O}C = ۲B\hat{A}C$$



$$\alpha+۱۵=۲(\alpha-۱۰) \Rightarrow \alpha=۲۵$$

$$B\hat{O}C = ۴۰ \quad , \quad B\hat{A}C = ۱۵$$

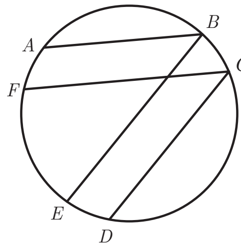
۸ در شکل زیر $AB \parallel FC$ و $CD \parallel BE$ و $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $\overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۱۱۰^\circ$ ، آن‌گاه زاویه $F\hat{C}D$ چند درجه است.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel FC \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} \\ BE \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{BC} \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED} = x$$

$$۳x + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF} = ۳۶۰ \rightarrow ۳x + ۶۰ + ۴۰ + ۱۱۰ = ۳۶۰$$

$$x = ۵۰$$

$$F\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{FD}}{۲} = \frac{۵۰+۱۱۰}{۲} = ۸۰$$



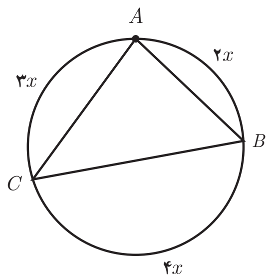
۹ در شکل زیر اندازه x و اندازه زوایای A و B و C را به‌دست آورید.

$$۲x + ۳x + ۴x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۲۰$$

$$\hat{A} = \frac{۱}{۲}(۴x) = ۴۰$$

$$\hat{B} = \frac{۱}{۲}(۳x) = ۳۰$$

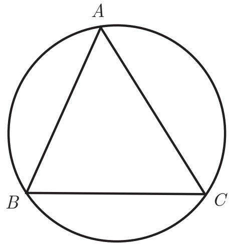
$$\hat{C} = \frac{۱}{۲}(۲x) = ۲۰$$



۱۰ با استفاده از زوایای محاطی ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است.

دایره‌ای رسم می‌کنیم که از سه رأس مثلث بگذرد. زوایای A و B و C محاطی هستند آن‌گاه

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\frac{1}{2}\widehat{BC} \\ \hat{B}=\frac{1}{2}\widehat{AC} \\ \hat{C}=\frac{1}{2}\widehat{AB} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{AC}+\widehat{BC})=180^\circ$$



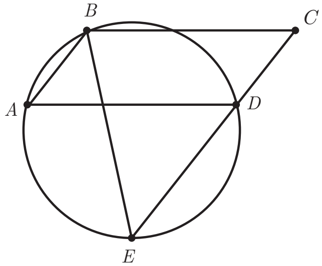
۱۱ در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. ثابت کنید مثلث BCE متساوی‌الساقین است.

چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. $\hat{A}=\hat{C}$ ①

از طرفی E و A زوایای محاطی هستند.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\frac{1}{2}\widehat{BD} \\ \hat{E}=\frac{1}{2}\widehat{BD} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\hat{E} \quad ②$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود $\hat{E}=\hat{C}$ ، مثلث BEC متساوی‌الساقین است.



۱۲ در شکل زیر اندازه x را به‌دست آورید.

زاویه O یک زاویه مرکزی است.

$$\hat{O}=\widehat{BC}=80^\circ$$

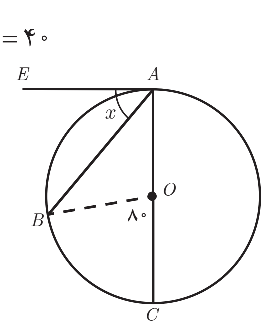
زاویه محاطی $B\hat{A}C=\frac{1}{2}\widehat{BC}=40^\circ$

زاویه EAB یک زاویه ظلی است.

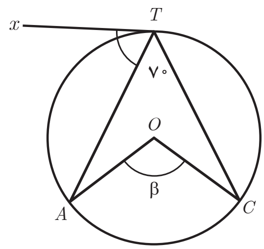
$$E\hat{A}B=x=\frac{1}{2}\widehat{AB}$$

$$\widehat{AB}=180^\circ-\widehat{BC}=100^\circ$$

$$E\hat{A}B=x=\frac{1}{2}(100^\circ)=50^\circ$$



۱۳ اگر در شکل زیر اندازه زاویه ظلی $A\hat{T}x$ برابر $۳\alpha-۱۰$ و اندازه کمان $\widehat{AT}$ برابر $\alpha+۱۲۰$ باشد، α و β زاویه ATx را بیابید.



$$A\hat{T}C=\frac{۱}{۲}\widehat{AC}\Rightarrow \widehat{AC}=۱۴۰$$

$$\hat{\beta}=\widehat{BC}=۱۴۰$$

$$A\hat{T}x=\frac{۱}{۲}\widehat{AT}\Rightarrow ۳\alpha-۱۰=\frac{۱}{۲}(\alpha+۱۲۰)$$

$$\alpha=\frac{۱۴۰}{۵}=۲۸$$

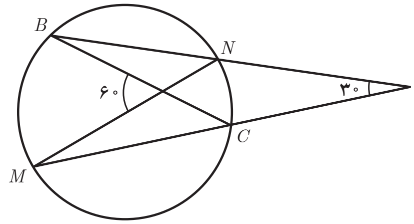
$$A\hat{T}x=۳(۲۸)-۱۰=۷۴$$

۱۴ در شکل زیر اندازه $\widehat{BM}$ و $\widehat{NC}$ را بیابید.

$$۶۰=\frac{\widehat{BM}+\widehat{NC}}{۲}\Rightarrow \widehat{BM}+\widehat{NC}=۱۲۰$$

$$۳۰=\frac{\widehat{BM}-\widehat{NC}}{۲}\Rightarrow \widehat{BM}-\widehat{NC}=۶۰$$

از حل دستگاه $\widehat{BM}=۹۰$ و $\widehat{NC}=۳۰$ به‌دست می‌آید.



۱۵ در شکل صفحه بعد اندازه $\widehat{DC}$ و $\widehat{BE}$ را بیابید.

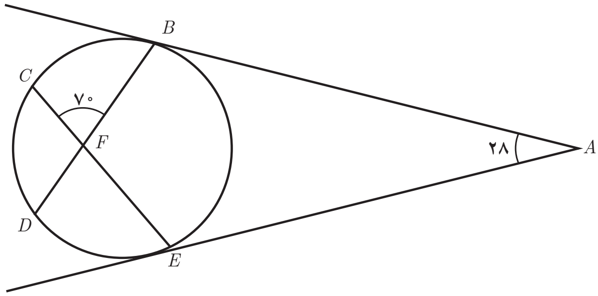
$$۷۰=\frac{\widehat{BC}+\widehat{DE}}{۲}\Rightarrow \widehat{BC}+\widehat{DE}=۱۴۰$$

$$۲۸=\frac{(\widehat{BC}+\widehat{DE}+\widehat{CD})-(\widehat{BE})}{۲}=\frac{۱۴۰+\widehat{CD}-\widehat{BE}}{۲}$$

$$\widehat{CD}-\widehat{BE}=-۸۴$$

$$\frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BE}}{۲}=۱۱۰\Rightarrow \overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BE}=۲۲۰$$

$$\overset{\frown}{CD}=۱۵۲ \quad , \quad \overset{\frown}{BE}=۶۸$$



۱۶ در شکل زیر M وسط کمان EF است. نشان دهید $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$

نقطه M وسط $\overset{\frown}{EF}$ است. $\overset{\frown}{EM}=\overset{\frown}{MF}$

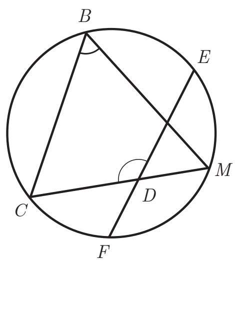
دو وتر FE و CM در داخل دایره متقاطع هستند.

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{CBE}+\overset{\frown}{FM}}{۲} \quad ①$$

زاویه محاطی $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CM}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{FM}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{EM}}{۲} \quad ②$

روابط ۱ و ۲ را با هم جمع می‌کنیم.

$$\hat{D}+\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CBE}+\overset{\frown}{FM}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{EM}}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰$$

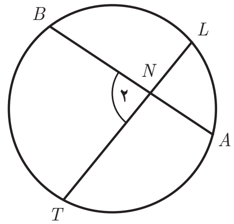


۱۷ در شکل زیر مقدار x و اندازه زاویه $N_{۱}$ را به‌دست آورید.

$$\widehat{AL} = ۱۰x - ۱۰ \quad , \quad \widehat{BT} = ۹x + ۱۷ \quad , \quad \hat{N}_{۲} = ۶x + ۲۸$$

$$\hat{N}_{۲} = \frac{\widehat{BT} + \widehat{AL}}{۲} \Rightarrow ۶x + ۲۸ = \frac{(۱۰x - ۱۰) + (۹x + ۱۷)}{۲}$$

$$x = ۷ \Rightarrow N = ۷۰$$



۱۸ در شکل زیر؛ الف) اگر $\hat{M} = ۴۵$ و $\hat{C} = ۱۲۰$ باشد کمان a و b را بیابید.

$$۱۲۰ + a + b = ۳۶۰ \Rightarrow a + b = ۲۴۰$$

$$\frac{a-b}{۲} = \hat{M} \Rightarrow a - b = ۲(\hat{M}) = ۴۵$$

$$a = ۱۴۲/۵ \ , \ b = ۹۷/۵$$

ب) اگر $\frac{a}{۶} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۵}$ اندازه زاویه M را بیابید.

$$a = ۶x$$
$$b = ۴x \quad \Rightarrow a + b + c = ۱۵x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۲۴ \Rightarrow \begin{matrix} a = ۱۴۴ \\ b = ۹۶ \end{matrix}$$
$$c = ۵x$$

$$\hat{M} = \frac{a-b}{۲} = \frac{۱۴۴ - ۹۶}{۲} = ۲۴$$