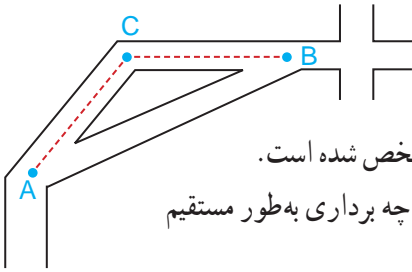




شتاب حرکت هر جسم در هر لحظه، همواره در جهت بردار برآیند نیروهای وارد بر آن است؛ برای مثال وقتی یک موشک شلیک می‌شود، نیروهای وارد بر آن عبارت‌اند از، نیروی وزن، نیروی بیشران، نیروی مقاوم هوا در راستای حرکت موشک (پسار) و نیروی برآر (عمود بر راستای حرکت) به طوری که برآیند این نیروها باعث حرکت موشک می‌شود.

جمع بردارها

فعالیت

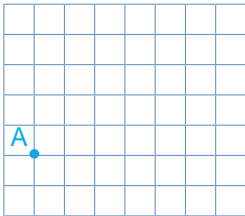


۱- شخصی در نقطه A ایستاده است.

مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطه B در شکل مشخص شده است.

این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به طور مستقیم به نقطه B می‌رسد؟ آن را رسم کنید.

۲- روباتی فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می‌کند.

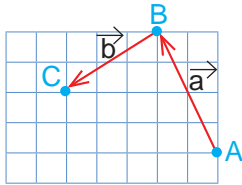


این روبات اکنون روی نقطه A است. با فرمان $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ۴

واحد به سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می‌کند. نقطه جدید را B نام گذاری کنید.

روبات ما با فرمان $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ از B به نقطه C می‌رسد.

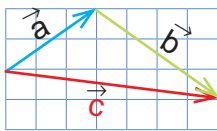
با چه فرمانی به طور مستقیم از نقطه A به C می‌رسد؟



۳- نقطه A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه B و سپس با بردار انتقال

b به نقطه C منتقل شده است. نقطه A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه C منتقل می‌شود؟

نام آن را بردار c بگذارید. آیا می‌توانیم بگوییم بردار c کار دو بردار انتقال a و b را انجام می‌دهد؟ به بردار c بردار **برایند** یا **حاصل جمع** می‌گویند.



۴- مختصات بردارهای a, b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع

دو بردار a و b برابر است؟ به ابتدا و انتهای بردارهای a و b توجه کنید. برداری که از ابتدای \vec{a} به انتهای \vec{b} رسم می‌شود (بردار c) برابر است با.....

در فعالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجه جمع دو بردار a و b، بردار c است؛ بنابراین، می‌توان یک

تساوی برداری به صورت $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ را نوشت.

با توجه به تساوی $c = a + b$ می‌توان مختصات بردار c را از **تساوی مختصاتی** زیر به دست

$$\begin{bmatrix} \vec{a} \\ x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{b} \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a+b} \\ x+z \\ y+t \end{bmatrix}$$

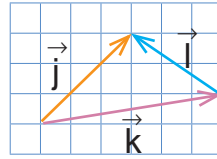
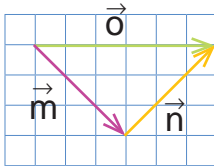
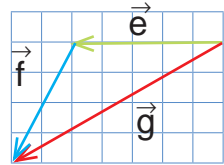
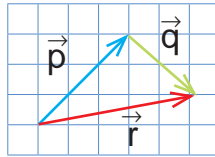
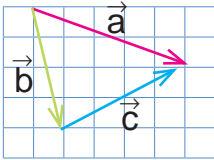
آورد:

کار در کلاس

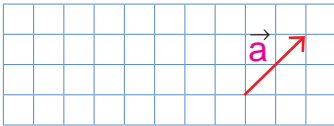


در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد برای رسم حاصل جمع یا برابند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم.

ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است؛ سپس برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



فعالیت

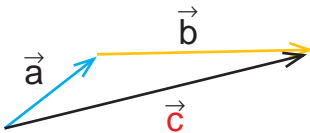


۱- چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همه بردارها را بنویسید.



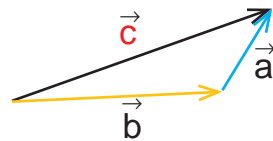
۲- با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردارهای a و b را رسم کنیم.

راه‌حل‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.



امیر

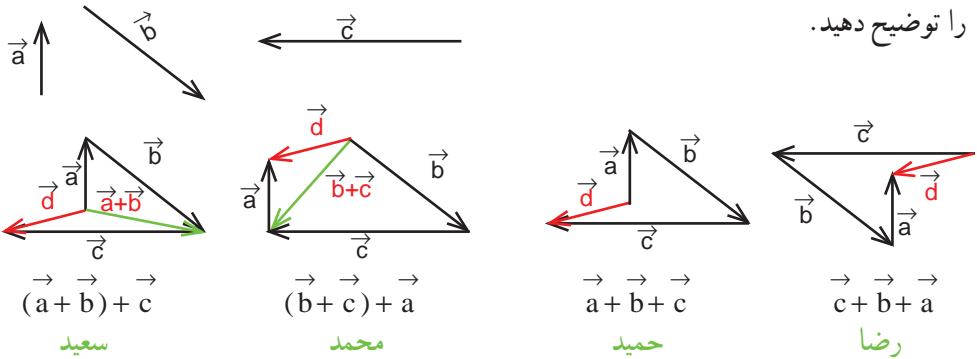
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



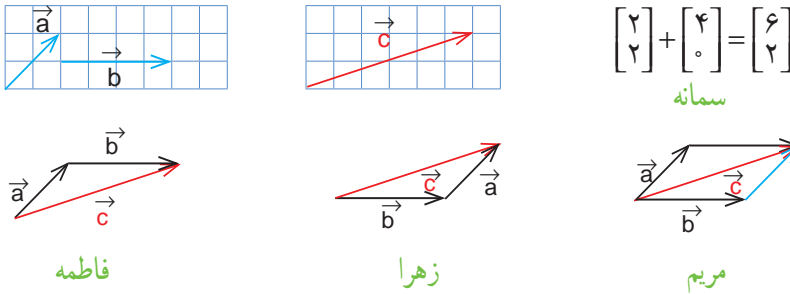
رضا

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

۳- دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار، راه‌حل‌های زیر را ارائه کرده‌اند. هر کدام را توضیح دهید.

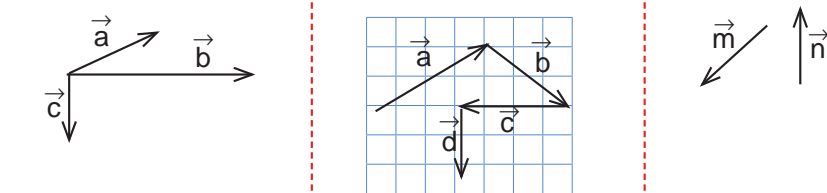


۴- راه‌حل‌های دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار a و b را مشاهده و مقایسه کنید.

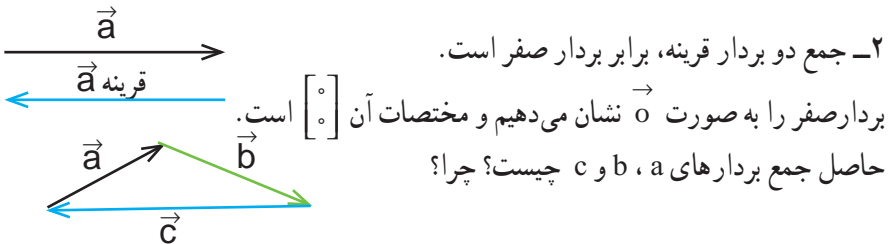


کار در کلاس

۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



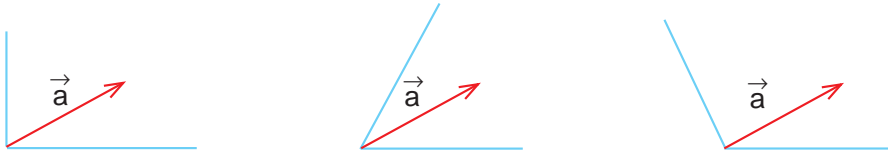
۲- جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.



فعالیت



۱- دو بردار در راستاهای آبی رنگ رسم کنید که جمع آنها بردار a باشد. به این کار تجزیه بردار می‌گویند. چند پاسخ مختلف می‌توان به دست آورد؟ چرا؟

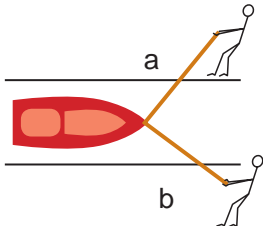


۲- مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، بنویسید.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

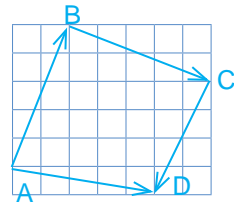
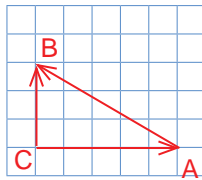
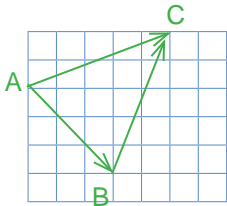
تمرین



۱- دو نفر در کنار رودخانه با دو طناب، قایقی را در خلاف جهت آب می‌کشند. الف قایق به کدام سمت حرکت می‌کند؟

ب) اگر نیروی a بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متمایل می‌شود؟

۲- در هر شکل یکی از بردارها، حاصل جمع بردارهای دیگر است. برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



۳- در هر تساوی، x و y را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

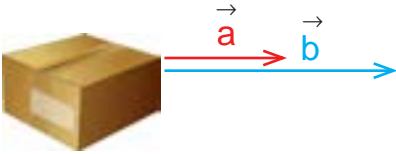


فعالیت



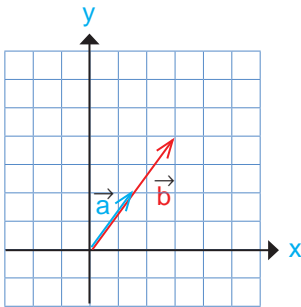
۱- در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده

رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کند، بردار حرکت جدید را رسم کنید.



۲- دو نفر سعی می کنند جعبه روبه‌رو را بکشند و به جای دیگری ببرند. نیرویی که نفر اول وارد می کند با بردار a و نیروی نفر دوم با بردار b نمایش داده شده است. با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول است؟ چرا؟

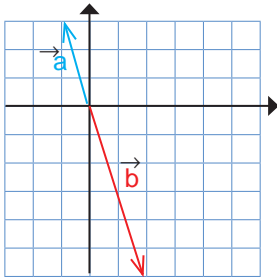
۳- در فعالیت‌های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه آن، چه نکاتی را رعایت کردید؟



۴- در هر شکل، مختصات بردارهای a و b را بنویسید. رابطه دو بردار a و b را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.

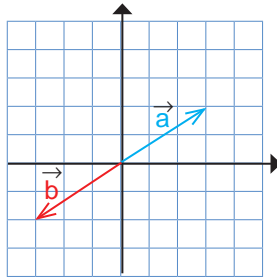
$$\vec{b} = 2\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$



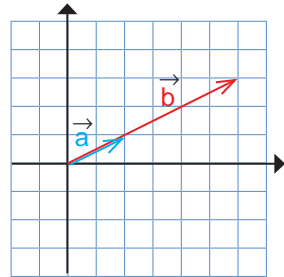
$$\vec{b} = -2\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$



$$\vec{b} =$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$



$$\vec{b} =$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.
بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

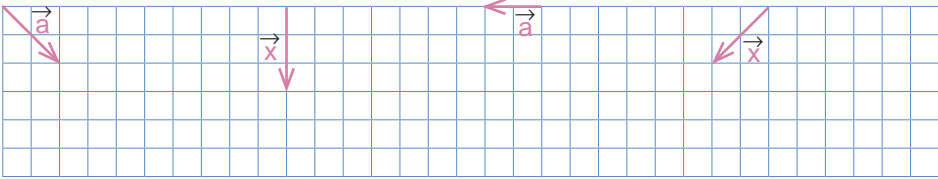
اگر بردار b قرینه بردار a باشد، می‌نویسیم: $\vec{b} = -\vec{a}$ یا $\vec{b} = (-1)\vec{a}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

کار در کلاس



با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



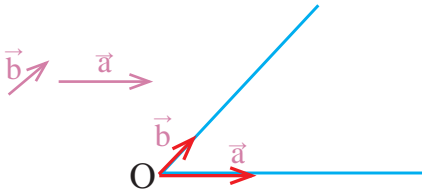
$$\vec{b} = 3\vec{a}$$

$$\vec{y} = -2\vec{x}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{a}$$

$$\vec{y} = -\frac{3}{4}\vec{x}$$

فعالیت



۱- بردارهای a و b مفروض‌اند.

بردار $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ را رسم کنید.

از نقطه دلخواه O بردارهای $2a$ و $3b$ را رسم کنید؛ سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

$$\vec{a} \quad \vec{b}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{a} + (-3\vec{b})$$

۲- بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

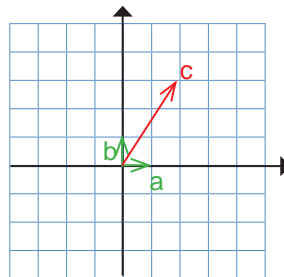
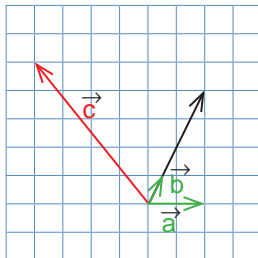
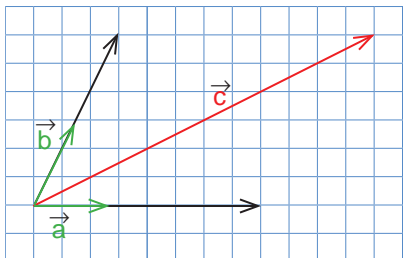
$$\vec{x} \quad \vec{y}$$

$$\vec{z} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$$

کار در کلاس



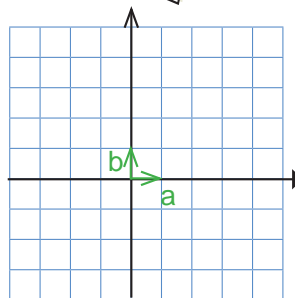
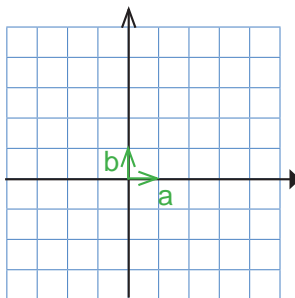
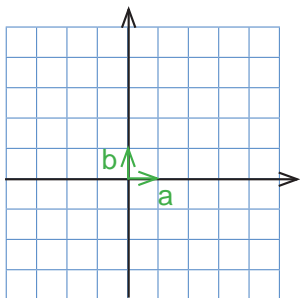
در هر شکل، بردار c را برحسب بردارهای a و b بنویسید.



تمرین



۱- با توجه به بردارهای a و b ، بردارهای c و d را رسم کنید.



$$\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = (-2)\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{d} = -4\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$(-4) \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

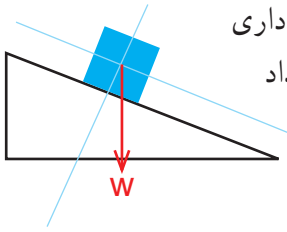
۳- معادله‌های مختصات زیر را حل کنید.

$$4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$-3x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$



۴- در شکل روبه‌رو، نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب‌داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید.

۵- با توجه به بردارهای a و b ، مختصات بردار c را به دست آورید.

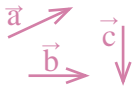
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$$

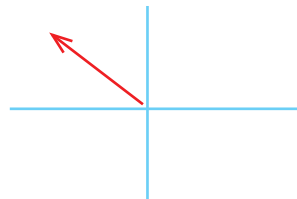
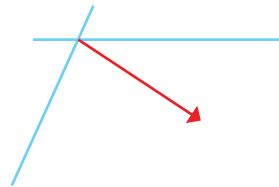
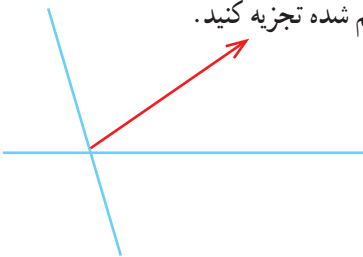
۶- با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$

۷- بردارهای داده‌شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.



فعالیت



۱- برای اندازه‌گیری هر یک از مقدارهای زیر از چه واحدی استفاده می‌کنیم؟



زمان:



زاویه:



دما:



جرم:

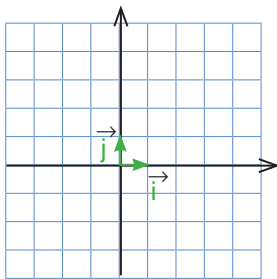


طول:

۲- در محور زیر، واحد را نشان داده‌ایم. عددهای ۱ و ۲- را روی محور مشخص کنید.



۳- همان‌طور که ملاحظه کردید برای اندازه‌گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم.



برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه مختصات با دو محور نمایش داده می‌شود به واحد روی هر دو محور نیاز داریم. در شکل روبه‌رو، بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده‌اند.

● مختصات بردارهای واحد را بنویسید. $\vec{i} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

● بردار $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ را رسم کنید.

● مختصات بردار a را بنویسید.

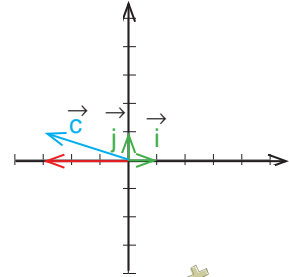
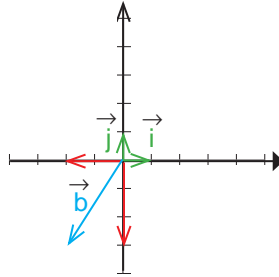
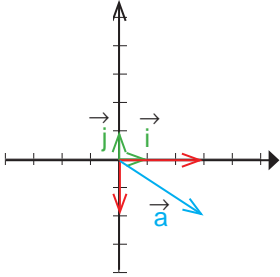
● مختصات بردار a را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 4 \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} =$$

کار در کلاس



در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب \vec{i} و \vec{j} و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.



فعالیت



۱- طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} =$$

$$2\vec{i} - 3\vec{j} =$$

$$3\vec{i} =$$

۲- دو دانش آموز، معادله برداری زیر را حل کرده اند. مراحل راه حل آنها را با هم مقایسه کنید.

راه حل حمید

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j}$$

$$2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{i} - \vec{j}$$

$$2\vec{x} = -8\vec{i}$$

$$\vec{x} = -4\vec{i}$$

راه حل سعید

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳- معادله‌های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$$

کار در کلاس



اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای x و y را به دست آورید.

$$\vec{x} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$$

تمرین



۱- طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} -5 \\ \quad \end{bmatrix} =$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -2\vec{j}$$

۲- دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

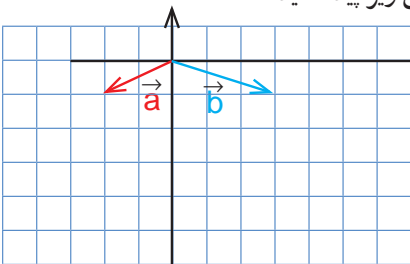
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۳- با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.



الف) رسم شکل و نوشتن مختصات \vec{c} از روی شکل

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب) پیدا کردن مختصات \vec{a} و \vec{b} و قرار دادن آنها در


تساوی زیر.

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3 \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های هر روش را بیان کنید.

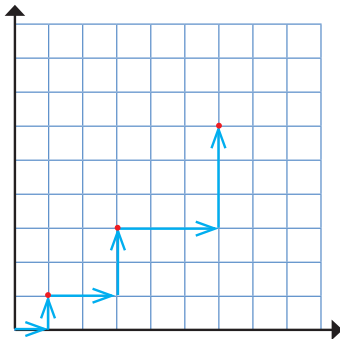
کدام روش برای رایانه‌ای شدن مناسب‌تر است؟ چرا؟

۴- با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

طول	+	-	+	-
عرض	+	+	-	-
شکل تقریبی				

۵- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، بردار x را از معادله زیر پیدا کنید.

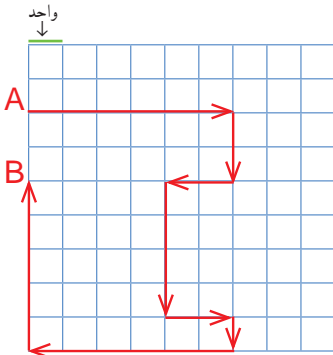
$$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$$



۶- یک روبوت برنامه‌ریزی شده به صورت زیر از مبدأ مختصات حرکت می‌کند.

با مشاهده سه حرکت اول این روبوت، الگویی برای حرکت آن کشف کنید و توضیح دهید. روبوت پس از حرکت پنجم به کدام نقطه می‌رسد؟

۷- حمیده با خود فکر می‌کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل جمع از همه آنها بزرگ‌تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید.



۸- در صفحه شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطه A مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است تا به نقطه B برسد؛ در کل به اندازه چند واحد حرکت کرده است؟
خودرو از نقطه A به B در راستای عمودی چند واحد جا به جا شده است؟

●●●●● مرور فصل ۵ ●●●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هر یک مثالی بزنید.

- جمع (برایند) بردارها
- تجزیه بردار
- ضرب عدد در بردار
- بردارهای واحد مختصات

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای از درس را بنویسید.

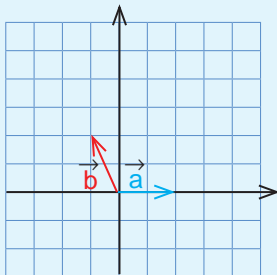
- پیدا کردن جمع دو بردار
- پیدا کردن بردار که ابتدای آنها یک نقطه باشد
- نوشتن جمع برداری و جمع مختصاتی
- ضرب یک عدد در بردار
- رسم بردارهای ترکیبی که شامل حاصل جمع مضرب‌های دو بردارند.
- پیدا کردن مختصات بردارهای ترکیبی
- تجزیه یک بردار روی دو امتداد
- نوشتن مختصات بردار با بردارهای واحد مختصات
- نمایش بردارهای واحد مختصات به صورت مختصاتی
- حل کردن معادله‌های شامل بردار

کاربرد

موضوعات این فصل در درس‌های علوم (فیزیک - مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد؛ ضمن اینکه در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر خطی و فضای برداری» نیز مطرح می‌شود و به کمک آن می‌توانید مسائل مختلف ریاضی و فیزیک را حل کنید.

تمرین‌های ترکیبی

- ۱- با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید. $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$
- ۲- اگر $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار x را پیدا کنید.



$$2\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{x}$$

- ۳- با توجه به شکل، مختصات بردار c را پیدا کنید.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$$