فصل ۱

احتمال

یادآوری

در مطالعهٔ رویدادها ممکن است شاهد اتفاق‌های گوناگون باشیم، ما مایلیم قبل از آن‌که روند رویدادی کامل شود نتیجهٔ آن را پیش‌بینی کنیم. یا به صورت روشن‌تر، می‌خواهیم **درجهٔ اطمینانی** را که به وقوع هریک از نتایج رویداد داریم مشخص کنیم. این درجهٔ اطمینان به وسیلهٔ احتمال سنجیده می‌شود که موضوع مورد بحث ماست.

مثال : در تولید ابریشم طبیعی، از کرم ابریشم استفاده می‌شود. این کرم‌ها مدتی از برگ توت تغذیه می‌کنند و بعد از آن پیلهٔ ابریشم را به دور خود می‌تنند و سرانجام با سوراخ کردن پیله به‌صورت پروانه از آن خارج می‌شوند. روند طبیعی و معمولی پرورش کرم ابریشم به همین صورت است که بیان شد. ولی در عمل دیده می‌شود که بعضی از کرم‌ها قبل از آن‌که پیله ببندند می‌میرند و برخی دیگر در حین پیله بستن از بین می‌روند. می‌خواهیم بدانیم که چه نسبتی از کرم‌ها به پروانه تبدیل می‌شوند؟ این نسبت نه‌تنها در مطالعهٔ مراحل زندگی کرم ابریشم مهم است بلکه از لحاظ اقتصادی نیز مسأله قابل‌توجهی است.

اولین قدم در مطالعهٔ اغلب آزمایش‌ها تعیین فهرستی از نتایج ممکن برای آزمایش است. چنین فهرستی را فضای نمونه‌ای می‌گوییم.

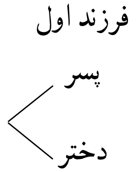
تعریف فضای نمونه‌ای : فضای نمونه‌ای یک آزمایش، مجموعه‌ای است مانند S به قسمی که نتایج آزمایش عضوی از این مجموعه باشند.

تذکر : فضای نمونه‌ای ممکن است دارای تعداد نامتناهی عضو باشد. ما در ادامهٔ بحث فقط آزمایش‌هایی را درنظر می‌گیریم که فضای نمونه‌ای آن‌ها متناهی است یعنی تعداد اعضای S، عددی طبیعی مانند n است.

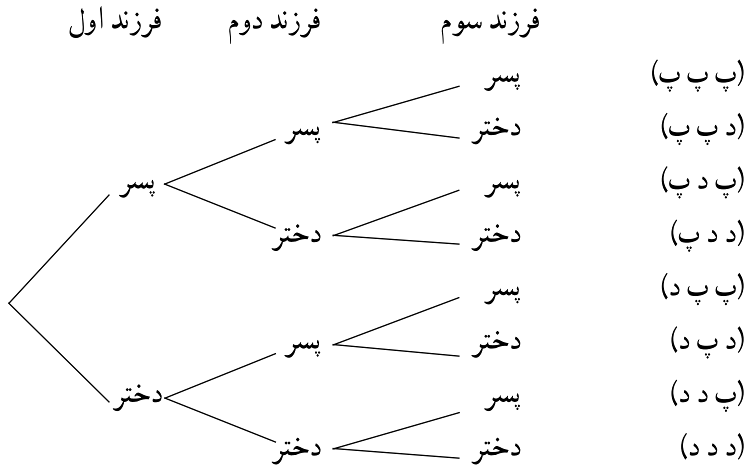
مثال ۱ : خانواده‌ای دارای سه فرزند است. فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

برای فرزند اول دو حالت وجود دارد، پسر یا دختر. این دو حالت را می‌توان به‌صورت صفحهٔ بعد

نشان داد.



برای هر حالتِ فرزند اول دو حالت برای فرزند دوم وجود دارد. همچنین برای هر حالت فرزند دوم، دوحالت برای فرزند سوم وجود دارد. تمام این حالت‌ها را می‌توان در نمودار زیر خلاصه کرد : (د برای دختر و پ برای پسر آمده است)



بنابراین فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده عبارت است :

{د د د ، پ د د ، دپ د ، پ پ د ، د د پ ، پ د پ ، د پ پ ، پ پ پ} = S

تذکر : فضای نمونه‌ای را به گونه‌ای می‌نویسیم که شانس وقوع اعضای آن با هم برابر باشند. مثلاً اگر خانواده‌ای ۲ فرزند داشته باشد، فضای نمونه‌ای آن را به صورت {دد، پ د، د پ، پ پ} می‌نویسیم نه به صورت {دد، د پ، پ پ}، زیرا شانس یک پسر و یک دختر بیش از شانس دو پسر و هم‌چنین بیش از شانس دو دختر است.

پیشامد

هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای را **پیشامد** می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با نماد A و B و C و... نشان می‌دهیم.

مثال ۲ : در مثال ۱

$A = \{\text{پ پ پ}\}$

$B = \{\text{د د پ، د پ د، پ د د ، د د د}\}$

دو زیرمجموعهٔ S هستند پس پیشامدهایی از این فضای نمونه‌ای‌اند. A و B را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

هر سه فرزند پسر = A

حداقل دو فرزند دختر = B

تعریف احتمال

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال A را که با P(A) نشان می‌دهیم بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}$$

اعضای A را معمولاً صورت‌های مساعد (برای پیشامد A) و اعضای S را صورت‌های ممکن می‌گویند. بنابراین احتمال A را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد صورت‌های مساعد}}{\text{تعداد صورت‌های ممکن}}$$

اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A را با نماد n(A) نشان دهیم، دستور محاسبهٔ احتمال به صورت زیر بیان خواهد شد :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۳ : در مثال ۱ مطلوب است احتمال آن‌که

الف ــ هرسه فرزند پسر باشند.

ب ــ حداکثر یکی از آن‌ها پسر باشد.

حل : اگر پیشامد الف را با A و پیشامد ب را با B نشان دهیم، خواهیم داشت

$A = \{\text{پ پ پ}\}$ $\qquad B = \{\text{د د پ، د پ د، پ د د ، د د د}\}$

قبلاً دیدیم که فضای نمونه‌ای این آزمایش ۸ عضو دارد. بنابر این

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۸} \quad , \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

مسئله : خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوبست :

الف ــ فضای نمونه‌ای مربوط به جنسیت فرزندان این خانواده

ب ــ احتمال آن‌که این خانواده ۲ پسر و ۲ دختر داشته باشد.

ج ــ احتمال آن‌که تعداد پسرها بیش از تعداد دخترها باشد.

ترکیب پیشامدها

از آنجایی که پیشامدها زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای هستند، می‌توانیم با اعمال عمل بر مجموعه‌ها، پیشامدهای جدیدی به دست آوریم :

متمم یک پیشامد

اگر A یک پیشامد باشد، متمم آن پیشامدی است که وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد. متمم پیشامد A را با نماد A' نشان می‌دهیم.

مثال ۴ : اگر A پیشامد پسر بودن هرسه فرزند در مثال ۱ باشد آن‌گاه A' عبارت است از پسر نبودن هرسه فرزند، پس

A' = {د د د، د د پ، د پ د ، پ د د، پ پ د ، پ د پ ، د پ پ}

این پیشامد را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد :

A' = حداقل یک فرزند دختر باشد

مثال ۵ : فرض کنیم $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A = \{۲,۳,۴\}$ و $B = \{۴,۵,۶\}$، در این صورت $A \cup B = \{۲,۳,۴,۵,۶\}$. می‌توانیم $P(A \cup B)$ را مستقیماً با استفاده از تعریف حساب کنیم :

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

$$= \frac{۵}{۶}$$

اشتراک دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد باشند، $A \cap B$ پیشامدی است که وقتی رخ می‌دهد که هر دوپیشامدهای A و B رخ دهند.

مثال ۶ : فرض کنید S و A و B همان پیشامدهای مثال ۵ باشند. در این صورت

$A \cap B = \{۴\}$

بنابراین
$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۶}$$

با توجه به مطالب سال قبل و مثال‌های ۵ و ۶ دیده می‌شود که بین $P(A \cup B)$، $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cap B)$ رابطهٔ زیر برقرار است :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

این دستور در حالت کلی نیز برقرار است و به‌کمک آن می‌توانیم احتمال پیشامد $P(A \cup B)$ را در صورت معلوم بودن سایر احتمال‌ها حساب کنیم.

مثال ۷ : فرض کنید در جامعه‌ای درصد نوع خون به شرح زیر باشد :

نوع A ٪۴۱	نوع AB ٪۴
نوع B ٪۹	نوع O ٪۴۶

فرض کنید مجروحی را به بخش اورژانس بیمارستانی آورده‌اند. احتمال این‌که گروه خونی این بیمار از نوع A یا B باشد چقدر است؟

حل : اگر فرض کنیم

E = گروه خونی بیمار A است

F = گروه خونی بیمار B است

می‌خواهیم $P(E \cup F)$ را حساب کنیم. چون امکان ندارد که شخصی هم دارای گروه خونی A و هم گروه خونی B باشد، پس $E \cap F$ عضوی نمی‌تواند داشته باشد، پس احتمال آن صفر است، بنابراین

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$
$$= ۰/۴۱ + ۰/۰۹ = ۰/۵۰$$

مسئله : در مسئله قبل مطلوب است احتمال آن‌که فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد.

پیشامد غیر ممکن

اگر در آزمایشی، پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد، آن پیشامد را **پیشامد غیرممکن** می‌گوییم و با نماد $\varnothing$ (نماد مجموعهٔ تهی) نشان می‌دهیم. چون مجموعهٔ تهی هیچ عضوی ندارد پس

$$P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{0}{n(S)}=0$$

مثال ۸ : در مثال ۱ اگر A و B را به صورت زیر تعریف کنیم

A = هرسه فرزند پسر باشند

B = یکی از فرزندان دختر باشد

در این صورت پیشامد $A\cap B$ غیر ممکن است، زیرا این امکان ندارد که هر سه فرزند پسر باشند و در ضمن یکی از آن‌ها دختر باشد. پس $A\cap B=\varnothing$. البته اگر سعی می‌کردیم A و B را به‌صورت اعضا مشخص کنیم، معلوم می‌شد که B و A هیچ عضو مشترکی ندارند (انجام دهید). پس

$$P(A\cap B)=0$$

تعریف : اگر دو پیشامد A و B نتوانند با هم رخ دهند آن دو پیشامد را **ناسازگار** می‌گوییم. پس A و B دو پیشامد ناسازگارند اگر داشته باشیم :

$$A\cap B=\varnothing$$

از این تعریف معلوم می‌شود که اگر A و B ناسازگار باشند، آنگاه $P(A\cap B)=0$ و در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

تعمیم

اگر A_1، A_2، . . . ، A_n پیشامدهایی باشند که دو به‌دو با هم نتوانند رخ دهند، در این صورت می‌گوییم این پیشامدها **دو به دو ناسازگارند** و در این صورت داریم

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

مثال ۹ : در مثال ۷ احتمال آن‌که شخص مجروح از یکی از سه گروه‌های خونی A، B یا ABباشد چقدر است؟

حل : اگر علاوه بر E و F که در مثال ۷ تعریف شدند G را به صورت زیر تعریف کنیم :

G : گروه خونی بیمار AB است

در این صورت می‌خواهیم $P(E\cup F\cup G)$ را حساب کنیم کـه بنابر ناسازگاری پیشامدهای E، F و G داریم :

$$P(E\cup F\cup G)=P(E)+P(F)+P(G)$$
$$=0/41+0/09+0/04=0/54$$

پیشامدهای مستقل

اگر دو پیشامد به قسمی باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد، آن‌دو پیشامد را مستقل می‌گوییم.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند برابری زیر برقرار است :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

مثال ۱۰ : مادری صاحب سه فرزند است. احتمال آن‌که دو فرزند اول پسر باشند چقدر است؟

حل : چون جنسیت نوزادان دو پیشامد مستقل است پس

P (دو فرزند اول پسر) = P (فرزند دوم پسر و فرزند اول پسر)

= P (فرزند اول پسر) P (فرزند دوم پسر)

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

مسئله : در مثال بالا مطلوب است احتمال آن‌که **فقط** دو فرزند اول پسر باشند.

مثال ۱۱ : مطالعات ژنتیکی نشان داده است که ۴۰٪ ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی‌اند. مطلوب است احتمال آن‌که فردی دارای RH منفی باشد.

حل : می‌دانیم برای آن‌که فردی دارای RH منفی باشد لازم است که دو ژن منفی داشته باشد. و چون این ژن‌ها را از هر یک از والدین خود به ارث می‌برد می‌توانیم منفی بودن هر یک از این ژن‌ها را مستقل فرض کنیم بنابراین

P (RH منفی) = P (هر دو ژن منفی) = P (یک ژن منفی) P (یک ژن منفی)

$$= (۰/۴)\,(۰/۴) = ۰/۱۶$$

مثال۱۲ : احتمال آن‌که در خانواده‌ای اولین فرزند با RH منفی فرزند سوم خانواده باشد چقدر است؟

حل :

$$(۱ - ۰/۱۶)\,(۱ - ۰/۱۶)\,(۰/۱۶)$$

مسائل

۱ــ اگر ۴۰٪ ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن‌که RH خون فردی منفی نباشد.

۲ــ با مفروضات مسئله بالا مطلوب است احتمال آن‌که در خانواده‌ای دو فرزنداز **لحاظ** خونی دارای یک نوع RH باشند.

۳ـ اگر فرزند اول خانواده‌ای دارای RH مثبت باشد احتمال آن‌که فرزند دوم دارای RH منفی باشد چقدر است؟ (RHخون فرزندان را مستقل فرض کنید.)

۴ـ خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوب است احتمال آن‌که RH خون هر سه فرزند یکی نباشد.

۵ـ خانواده‌ای دارای چهار فرزند است، مطلوب است احتمال آن‌که فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم و چهارم دختر باشد.

احتمال شرطی

تا به حال برای پیشامدی مانند A، P(A) را با استفاده از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌کردیم و منظور از این احتمال آن بود که ما هیچ اطلاعی دربارهٔ پیشامد A نداریم. امّا در بعضی مواقع ممکن است که به ما اطلاعاتی داده باشند که این اطلاعات در احتمال وقوع A مؤثر باشد.

مثال : فرض کنید از ظرفی که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است، مهره‌ای به تصادف خارج کرده‌ایم، احتمال آن که این مهره سفید باشد چقدر است؟

حل : در این مثال فضای نمونه‌ای ۹ عضو دارد که ۵ عضو آن برای پیشامد مورد نظر مساعد است پس احتمال آمدن سفید برابر $\frac{۵}{۹}$ است.

این احتمال به طور مطلق حساب شد و از هیچ اطلاع اضافی استفاده نشد. حال مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال : از جعبهٔ مثال بالا مهره‌ای خارج می‌کنیم ملاحظه می‌شود که رنگ آن سیاه است. این مهره را کنار گذاشته و مهرهٔ دوم را به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که این مهره سفید باشد.

حل : در این مثال پس از کشیدن مهرهٔ اول و با توجه به اطلاعات داده شده (سیاه بودن مهرهٔ خارج شده) شرایط به هنگام استخراج مهرهٔ دوم عبارت است از وجود ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه در جعبه، پس احتمال آمدن یک مهرهٔ سفید از این جعبه $\frac{۵}{۸}$ است.

همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود اگر چه در دو مثال بالا احتمال آمدن مهرهٔ سفید را حساب کردیم ولی جواب‌ها یکسان نیستند. زیرا در مثال دوم اطلاعاتی داریم که احتمال آمدن مهرهٔ سفید را تغییر می‌دهد.

تعریف : فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > ۰$، در این صورت اگر B رخ داده باشد احتمال وقوع A را که با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی A به شرط وقوع B می‌گوییم، بنابر دستور زیر محاسبه می‌شود :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تذکر : از آنجایی که در دستور بالا $P(B)$ در مخرج کسر قرار می‌گیرد شرط $P(B) > ۰$ ضروری است.

مثال : اگر $P(A\cap B) = ۰/۲$ و $P(B) = ۰/۶$، $P(A|B)$ را حساب کنید.

حل : بنابر تعریف احتمال شرطی داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{۰/۲}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

مثال : در آزمایشگاهی ۳ موش سیاه و ۲ موش سفید داریم، قبلاً یک موش سفید را برای آزمایشی انتخاب کرده‌ایم. حال می‌خواهیم همان آزمایش را روی موش دیگری انجام دهیم. برای این منظور موشی را از بین موش‌هایی که روی آن‌ها آزمایش انجام نشده است انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که این موش نیز سفید باشد.

حل : با توجه به شرایط مسأله، در واقع موشی از بین ۳ موش سیاه و یک موش سفید انتخاب می‌شود. پس احتمال سفید بودن این موش عبارت است از $\frac{۱}{۴}$.

مسئله : کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن‌که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

		جنسیت	
		زن	مرد
تحصیلات	دانشگاهی	۱۰	۱۵
	کمتر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

احتمال شرطی و استقلال پیشامدها

به نظر می‌رسد که اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند وقوع یکی از این پیشامدها در احتمال وقوع دیگری نباید تأثیر بگذارد. این واقعیت را می‌توانیم به صورت زیر ثابت کنیم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{(بنابر تعریف احتمال شرطی)}$$

$$=\frac{P(A)P(B)}{P(B)} \quad \text{(بنابر فرض استقلال A و B)}$$

$$=P(A)$$

پس اگر A و B مستقل باشند آنگاه :

$$P(A|B)=P(A)$$

مثال : خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. می‌دانیم فرزند اول پسر است. مطلوب است احتمال آن‌که سه فرزند دیگر این خانواده دختر باشند.

حل : پیشامد پسر بودن فرزند اول را با B و پیشامد دختر بودن سه فرزند بعدی را با A نشان می‌دهیم. بنابراین می‌خواهیم P(A|B) را حساب کنیم. می‌دانیم که

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

A∩B، یعنی خانواده‌ای چهار فرزند دارد و می‌خواهیم فرزند اول پسر و سه فرزند بعدی دختر باشند، پس بنابر استقلال جنسیت فرزندان داریم : (پ برای پسر و د برای دختر)

$$P(A\cap B)=P\,(\text{د د د پ})$$

$$=P\,(\text{پ})\,P\,(\text{د})\,P\,(\text{د})\,P\,(\text{د})$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

امّا $P(B)=\frac{۱}{۲}$ ، بنابراین

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۸}$$

که این احتمال برابر احتمال آن است که سه فرزند بعدی دختر باشند. دیده می‌شود که وقوع B تغییری

در احتمال وقوع A نمی‌دهد.

دستور محاسبه احتمال شرطی معمولاً به صورتی که بیان شد مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. بلکه از احتمال شرطی برای محاسبه $P(A\cap B)$ استفاده می‌شود. از تعریف احتمال شرطی برابری زیر نتیجه می‌شود:

$$P(A\cap B) = P(B)\,P(A|B)$$
$$= P(A)\,P(B|A)$$

از این دستورها می‌توانیم احتمال اشتراک دو پیشامد را حساب کنیم.

مثال: دو مهره، متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه‌ای که شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهرهٔ اول سفید و مهرهٔ دوم سیاه باشد.

حل: اگر سفید بودن مهرهٔ اول را با A و سیاه بودن مهرهٔ دوم را با B نشان دهیم، می‌خواهیم $P(A\cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم:

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

امّا $P(A) = \frac{۴}{۱۰}$ و برای محاسبهٔ $P(B|A)$ باید فرض کنیم A رخ داده است یعنی مهره‌ای سفید از جعبه خارج شده است. بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهرهٔ دوم عبارت است از وجود ۶ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید در جعبه، بنابراین

$$P(B|A) = \frac{۶}{۹}$$

لذا

$$P(A\cap B) = \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۹} = \frac{۲۴}{۹۰}$$

با استفاده از احتمال شرطی می‌توانیم به دستورهای مفیدی که در محاسبهٔ احتمال پیشامدها بسیار مؤثرند برسیم.

قانون احتمال کل

فرض کنید $E_۱, \ldots, E_n$ پیشامدهایی باشند که حتماً یکی از آن‌ها رخ می‌دهد، یعنی $\bigcup E_i = S$ همچنین فرض کنید فقط یکی از E_iها بتواند رخ دهد، یعنی این پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند، یعنی به‌ازای هر $i\neq j$، $E_i\cap E_j=\varnothing$. با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه E دستور مفید زیر را داریم:

$$P(E) = \sum_i P(E_i)P(E|E_i)$$

مثال : فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آن‌که این فرزند سالم باشد.

حل : فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را با $E_۱$ و دختر بودن آن را با $E_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه $E_۱$ و $E_۲$ ناسازگارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با E نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(E)$ را حساب کنیم.

$$P(E) = P(E_۱)\, P(E|E_۱) + P(E_۲)\, P(E|E_۲)$$

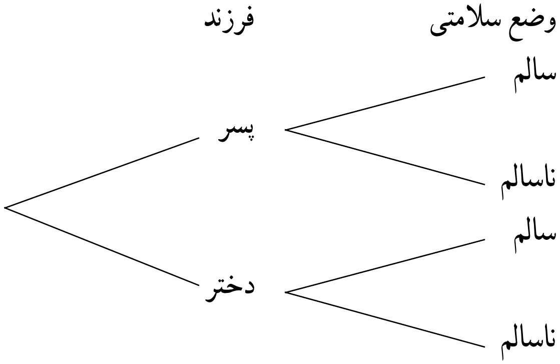
$$= \frac{۱}{۲} \times (۱ - ۰/۱۲) + \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۰۹)$$

$$= ۰/۴۴ + ۰/۴۵۵ = ۰/۸۹۵$$

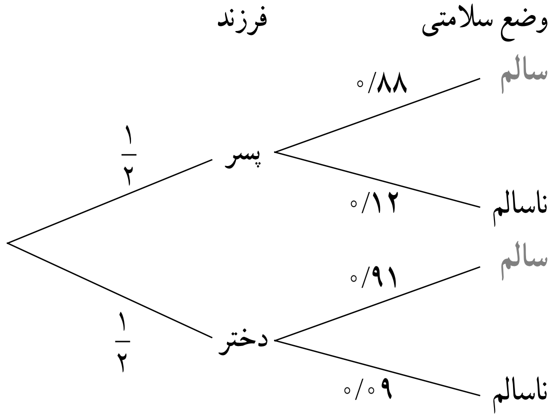
حدود ۰/۹ احتمال آن است که فرزندی که به دنیا می‌آید سالم باشد.

توجه : اگر می‌دانستیم که این فرزند پسر خواهد بود احتمال سالم بودن آن ۰/۸۸ و اگر می‌دانستیم دختر است این احتمال برابر ۰/۹۱ بود. امّا چون از جنسیت فرزندی که به دنیا خواهد آمد اطلاعی نداریم بنابر دستور بالا این احتمال برابر ۰/۸۹۵ محاسبه شد.

برای این مسأله اگر سعی می‌کردیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم به نموداری به‌صورت زیر دست می‌یافتیم.



اگر روی هر یک از پاره‌خط‌های نمودار بالا احتمال پیشامد نظیر آن خط را بنویسیم خواهیم داشت :

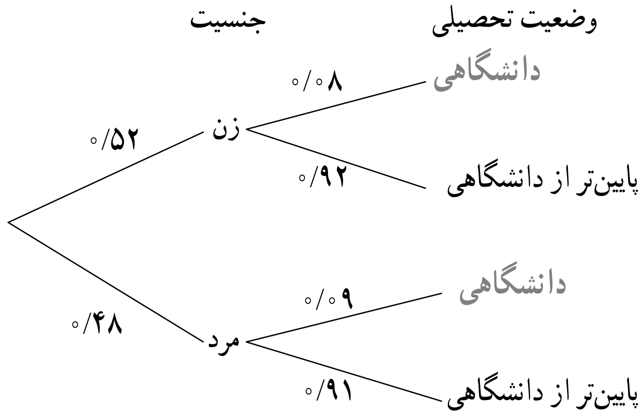


حال اگر شاخه‌هایی را که به وضعیت سالم ختم می‌شوند مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم خواهیم داشت :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times 0/88}_{\text{شاخه اول}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times 0/91}_{\text{شاخه دوم}}=0/895$$

که همان جوابی است که با استفاده از دستور جمع احتمال‌ها به دست آمد. این روش بسیار ساده و مفید است با مثال دیگری با نحوهٔ استفاده از آن بیشتر آشنا خواهید شد.

مثال : ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۸ درصد زنان و ۹ درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.



حل :

پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$0/52\times 0/08+0/48\times 0/09=0/0848$$

با این اطلاعات حدود ۸/۵ درصد جمعیت کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.

مسئله : ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ مردان باسواد باشند، چند درصد افراد این جامعه باسوادند؟

متغیرهای تصادفی

قبلاً به‌طور مختصر متغیر تصادفی را به عنوان جزئی از یک مسألهٔ آماری تعریف کردیم. اگر در آزمایشی، عددی به هر نتیجهٔ آزمایش نسبت دهیم این عدد را **متغیر تصادفی** می‌نامیم. متغیرهای تصادفی را معمولاً با حروف بزرگ X و Y، ... نشان می‌دهیم.

مثال : در آزمایشگاهی موشی را تحت رژیم غذایی خاصی قرار می‌دهیم. می‌خواهیم وزن این موش را پس از یک هفته مطالعه کنیم. این وزن متغیری است تصادفی.

مثال : تعداد نوزادان یک موش در یک وضع حمل، متغیری است تصادفی.

مثال : تعداد تخم‌هایی که یک کرم ابریشم می‌گذارد، متغیری است تصادفی.

توزیع احتمال

موضوع را با یک مثال ساده شروع می‌کنیم. فرض کنید در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۴ موش سیاه داریم. می‌خواهیم ۳ موش از بین آن‌ها انتخاب کنیم. فرض کنید X تعداد موش‌های سفید انتخاب شده باشند، در این صورت X متغیری است تصادفی که مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ را می‌تواند انتخاب کند. حال احتمال آن‌که X برابر ۰ شود چقدر است. این احتمال را با نماد $P(X=0)$ نشان می‌دهیم. برای آن‌که $X=0$ شود، لازم است تمام موش‌های انتخاب شده از بین موش‌های سیاه باشند، پس احتمال مورد نظر عبارت است از

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{21}$$

به همین ترتیب می‌توانیم سایر احتمال‌ها را نیز به شرح زیر حساب کنیم :

$$P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{5}{14}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{10}{21}$$

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۵}{۴۲}$$

این احتمال‌ها را می‌توانیم در جدولی به صورت زیر بنویسیم :

X	۰	۱	۲	۳
P(X)	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۵}{۱۴}$	$\frac{۱۰}{۲۱}$	$\frac{۵}{۴۲}$

منظور از توزیع احتمال آن است که تعیین کنیم احتمال چگونه روی مقادیری توزیع شده است. مثلاً در جدول بالا توزیع احتمال روی مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ به ترتیب به صورت $\frac{۱}{۲۱}$، $\frac{۵}{۱۴}$، $\frac{۱۰}{۲۱}$، $\frac{۵}{۴۲}$ است. برخی از توزیع‌ها به علت کاربردهای فراوانی که دارند از اهمیت زیادی برخوردارند. یکی از مهم‌ترین توزیع‌ها، توزیع دو جمله‌ای است.

مسئله : جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه دارد، از این جعبه چهار مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. اگر X تعداد مهره‌های سفید خارج شده باشد جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

توزیع دوجمله‌ای

فرض کنید در خانواده‌ای سه فرزند به دنیا آمده باشد. می‌خواهیم توزیع احتمال تعداد پسران این خانواده را به دست آوریم. اگر X را برابر تعداد فرزندان پسر خانواده تعریف کنیم، آن‌گاه X، مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را می‌تواند اختیار کند. برای تعیین احتمال نظیر هر یک از این مقادیر به فضای نمونه‌ای مربوط به این آزمایش که در مثال ۱ به دست آمد مراجعه می‌کنیم.

بنابراین فضای نمونه‌ای عبارت است از

{ددد، پدد، دپد، پپد، ددپ، پدپ، دپپ، پپپ}

همان‌طور که دیده می‌شود فضای نمونه‌ای ۸ عضو دارد. (آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا این مجموعه باید ۸ عضو داشته باشد؟) حال برای محاسبه $P(X=۰)$ می‌بینیم که پیشامد $X=۰$ یعنی مجموعهٔ {د د د}، پس احتمال آن برابر $\frac{۱}{۸}$ است. پیشامد $X=۱$ یعنی مجموعهٔ {پدد و دپد و ددپ}. بنابراین احتمال آن برابر $\frac{۳}{۸}$ است. به همین ترتیب می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم :

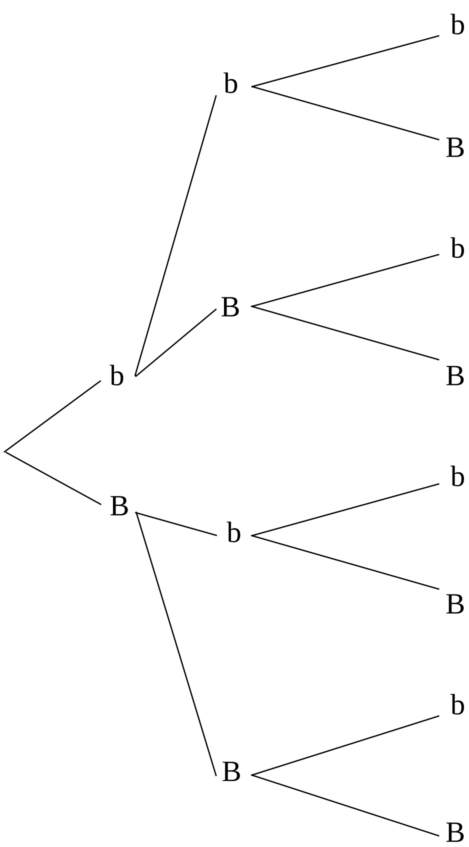
X	۰	۱	۲	۳
P(X)	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

تذکر : اگر احتمال پسر یا دختر بودن نوزاد برابر $\frac{۱}{۲}$ نباشد، اعضای این فضای نمونه‌ای هم‌شانس نخواهند بود و در نتیجه نمی‌توانستیم از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه احتمال استفاده کنیم. در مثال بعدی با چنین شرایطی مواجه هستیم.

مثال : فرض کنید پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) باشند. اگر این پدر و مادر صاحب سه فرزند باشند توزیع تعداد رنگ چشم‌های مغلوب را به دست آورید.

مجدداً می‌توانیم نمودار زیر را رسم کنیم :

احتمال　　فضای نمونه‌ای　　فرزند سوم　　فرزند دوم　فرزند اول



فضای نمونه‌ای	احتمال
bbb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۰}$
bbB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
bBb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
bBB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
Bbb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
BbB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
BBb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
BBB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۰}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}$

از اینجا می‌توانیم احتمال‌های تعداد فرزندان با رنگ چشم مغلوب را به دست آوریم، مثلاً

$$P(X=۱)=P\{bBB, BbB, BBb\}$$

در این مثال چون اعضای فضای نمونه‌ای هم‌شانس نیستند نمی‌توانیم از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کنیم. برای محاسبهٔ احتمال از قوانین احتمال استفاده می‌کنیم. پیشامد $\{bBB, BbB, BBb\}$ در واقع اجتماع سه پیشامد ناسازگار $\{BBb\}$ و $\{BbB\}$ و $\{bBB\}$ است پس بنابر قانون جمع احتمال‌ها داریم:

$$P(X=۱)=P\{bBB\}+P\{BbB\}+P\{BBb\}$$

$$=(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^۲+(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^۲+(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^۲$$

$$=۳(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^۲$$

به همین ترتیب می‌توانیم سایر مقادیر را محاسبه و جدول زیر را تشکیل دهیم:

X	۰	۱	۲	۳
	$۱\left(\frac{۱}{۴}\right)^۰\left(\frac{۳}{۴}\right)^۳$	$۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^۱\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲$	$۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲\left(\frac{۳}{۴}\right)^۱$	$۱\left(\frac{۱}{۴}\right)^۳\left(\frac{۳}{۴}\right)^۰$

در این جدول می‌بینیم که احتمال‌ها از دستور زیر پیروی می‌کنند:

$$P(X=k)=\binom{۳}{k}(\frac{۱}{۴})^k(\frac{۳}{۴})^{۳-k} \qquad k=۰,۱,۲,۳$$

اگر به جای k به ترتیب مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را قرار دهیم همان احتمال‌های نوشته شده در جدول بالا به دست خواهند آمد. این دستور برای حالت‌های کلی نیز برقرار است.

مسئله: مثال بالا را برای خانواده‌ای که ۴ فرزند دارد و X برابر تعداد فرزندان با رنگ چشم مغلوب است تکرار کنید. تحقیق کنید که احتمال‌ها از دستور

$$P(X=k)=\binom{۴}{k}(\frac{۱}{۴})^k(\frac{۳}{۴})^{۴-k}$$

پیروی می‌کنند.

این مثال‌ها دارای نکات مشترک زیراند:

الف: آزمایشی که فقط دو نتیجه دارد. در مثال اول جنسیت فرزند و در مثال دوم رنگ چشم.

ب : این آزمایش به تعداد دفعات معلومی تکرار می‌شود. در مثال اول و دوم ۳ بار و در مسئله قبل ۴ بار تکرار شده است.

ج : نتیجهٔ هر آزمایش مستقل از نتیجهٔ سایر آزمایش‌ها است. پسر یا دختر بودن فرزندی به پسر یا دختر بودن فرزند در دفعات قبل یا بعد بستگی ندارد. همین‌طور رنگ چشم فرزندان. به همین دلیل احتمال پسر بودن فرزندی برابر $\frac{۱}{۲}$ و یا مغلوب بودن رنگ چشم فرزند برابر $\frac{۱}{۴}$ برای هر فرزند ثابت باقی ماند.

د : تعداد حالت‌های مورد نظر در این آزمایش‌ها، در مثال اول تعداد فرزندان پسر، و در مثال دوم تعداد فرزندان با رنگ چشمان مغلوب.

هر متغیر تصادفی که به صورت بالا معرفی می‌شود دارای توزیعی است که آن توزیع را **توزیع دوجمله‌ای** می‌نامیم. توزیع دوجمله‌ای را می‌توانیم در حالت کلی به صورت زیر معرفی کنیم.

الف : آزمایشی با دو نتیجه را در نظر بگیرید. نتیجه‌ای از این آزمایش که مورد نظر است «پیروزی» و دیگری را «شکست» بنامید در مثال اول دختر بودن فرزند و در مثال دوم مغلوب بودن رنگ چشم را پیروزی در نظر گرفته‌ایم.

ب : این آزمایش را n بار تکرار می‌کنیم در مثال اول و دوم $n = ۳$.

ج : آزمایش‌ها به صورت مستقل تکرار می‌شود. بنابراین اگر p احتمال آمدن پیروزی در انجام یک بار آزمایش باشد، آن گاه p در طول آزمایش ثابت است و از آزمایشی به آزمایش دیگر عوض نمی‌شود. در مثال اول $p = \frac{۱}{۲}$ و در مثال دوم $p = \frac{۱}{۴}$.

د : تعداد پیروزی‌ها در n بار تکرار آزمایش‌ها.

اگر این متغیر تصادفی را با X نشان دهیم آن‌گاه X مقادیر ۰، ۱، ۲، ...، n را با احتمال‌های زیر اختیار می‌کند :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (۱ - p)^{n-k}$$

مثال : اگر ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن‌که در یک کلاس ۳۰ نفری ۸ نفر دارای خونی با RH منفی باشند.

$$P(X = ۸) = \binom{۳۰}{۸} (۰/۱۶)^۸ (۱ - ۰/۱۶)^{۲۲}$$

مثال : فرض کنید احتمال انتقال نوعی بیماری مسری از فرد بیمار به افراد مستعد برابر ۰/۱

باشد. اگر ۱۰ نفر مستعد با فردی که حامل بیماری است ملاقات کنند، توزیع تعداد افرادی را که به‌این بیماری مبتلا می‌شوند به دست آورید.

حل: در این مثال آزمایش عبارت است از ملاقات یک فرد مستعد با یک فرد بیمار که درنتیجه مبتلا شدن فرد سالم (پیروزی) و یا مبتلا نشدن (شکست) او را به همراه دارد. این آزمایش $n = ۱۰$ بار تکرار شده است و این تکرارها را می‌توان مستقل فرض کرد. احتمال پیروزی در هر تکرار برابر $p = ۰/۱$ است. تعداد پیروزی‌ها در این آزمایش برابر تعداد افرادی است که به بیماری مبتلا شده‌اند. اگر این تعداد را با X نشان دهیم ملاحظه می‌شود که تمام شرایط توزیع دوجمله‌ای برقرار است. پس

$$P(X = k) = \binom{۱۰}{k}(۰/۱)^k(۰/۹)^{۱۰-k}$$

مسائل

۱ــ نوعی بذر ذرت تهیه شده است که ادعا می‌شود ۹۰٪ بذرها جوانه خواهند زد. اگر ۲۰ دانه از این ذرت‌ها را در شرایط مناسب و یکسان بکاریم، مطلوب است تعیین توزیع تعداد بذرهایی که جوانه می‌زنند و محاسبه احتمال آن‌که فقط ۱۸ دانه جوانه بزند (جواب را ساده نکنید).

۲ــ به دانش‌آموزی ۱۰ سؤال تستی چهارگزینه‌ای داده‌ایم. اگر او به سؤال‌ها به تصادف جواب بدهد، احتمال آن‌که

الف ــ به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

ب ــ حداقل به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

۳ــ در خانواده‌ای با چهار فرزند، احتمال آن‌که RH خون فرزندان یک در میان مثبت باشد چقدر است؟

۴ــ احتمال آن‌که حسن دیر به مدرسه برسد ۰/۰۲ است، احتمال آن‌که در یک هفته دو روز دیر برسد چقدر است؟