فصل

۷ آمار و احتمال

رامسر، استان مازندران

امروزه نقش روزافزون آمار و احتمال در حل مسائل زندگی بر کسی پوشیده نیست. یکی از کاربردهای مهم آمار و احتمال، پیش‌بینی وضع هواست. با پیشرفت روش‌های علمی، احتمال پیش‌بینی درست آب‌وهوا به‌طور چشمگیری افزایش یافته است.

درس اول

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

در سال‌های قبل با مفاهیم زیر از احتمال آشنا شدید.

یادآوری

۱ــ پدیدهٔ تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه‌ای : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها

فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A\text{-}B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ یعنی $A\cap B=\varnothing$

۶ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۷ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

احتمال شرطی

فرض کنیم در یک قرعه‌کشی اعداد ۱ تا ۲۰ به بیست نفر اختصاص داده شده‌اند و قرار است یک شماره به تصادف انتخاب و به عنوان برنده اعلام شود. اگر شمارهٔ ۸ به‌دست شما افتاده باشد، با چه احتمالی شما برنده خواهید شد؟

اگر بدانید که یک شمارهٔ یک رقمی انتخاب خواهد شد، با چه احتمالی برنده خواهید شد؟

گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامدی دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال برنده شدن شما با دانستن اینکه شمارهٔ انتخابی، یک رقمی است، متفاوت خواهد بود از حالتی که این موضوع را ندانیم. در واقع احتمال اول را احتمال برنده شدن شما و احتمال دوم را احتمال برنده شدن شما به شرطی که شمارهٔ انتخاب شده یک رقمی باشد، می‌خوانیم.

منظور از "احتمال A به شرط B" که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

می‌دانیم که :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

حال با توجه به اینکه در $P(A|B)$ پیش فرض رخ دادن پیشامد B در نظر گرفته شده است، در صورت و مخرج کسر بالا خواهیم داشت[1] :

۱ــ حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی است که A رخ دهد، در حالی که B رخ داده است؛ یعنی همهٔ حالت‌هایی که هم A و هم B رخ دهد، یا به عبارتی این تعداد برابر است با $n(A\cap B)$.

۲ــ همهٔ حالت‌های ممکن در اینجا برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آنها B رخ داده باشد. به عبارتی این تعداد برابر با $n(B)$ است.

بنابراین داریم :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

که با تقسیم صورت و مخرج این عبارت به $n(S)$ این رابطه به‌صورت زیر بیان می‌شود :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (۱)$$

توجه : شرط محاسبهٔ احتمال پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B آن است که $P(B)\neq ۰$. بنابراین اگر $P(B)=۰$ ، آنگاه $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

کار در کلاس

در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل :

A: پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B: احتمال رسیدن به خط پایان

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A)=\dots\dots\dots \\ P(A\cap B)=\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dots\dots\dots$$

۱ــ آنچه در اینجا گفته شد صرفاً نوعی توضیح منطقی و شهودی برای رابطهٔ $P(A|B)$ است و به عنوان اثبات دقیق ریاضی مدنظر نیست.

مثال : اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. اما اعداد زوج چهار تا و اعداد فرد پنج تا هستند.

A: پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشند.

B: پیشامد اینکه مجموع اعداد سه کارت زوج باشند.

لذا تعداد حالت‌هایی که هر سه عدد زوج باشند برابر است با $\binom{۴}{۳}=۴$ و تعداد حالت‌هایی که دو عدد فرد و یکی زوج باشند، برابر است با $\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۲}=۴۰$. بنابراین ۴۴ حالت هست که مجموع سه عدد زوج باشند و در ۴ حالت آن هر سه عدد زوج‌اند. پس :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۴۴}=\frac{۱}{۱۱}$$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{۱}{۶}$ باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{۱}{۳}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقِ «قهرمان شدن» یا «بردن اصلی‌ترین رقیب» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

A: پیشامد قهرمان شدن

B: پیشامد برد اصلی‌ترین رقیب

$P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ و

حل : هدف محاسبهٔ $P(A\cup B)$ است و برای آن داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

حال با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{۱}{۱۸}$$

و با جای‌گذاری مقادیر داریم :

$$P(A\cup B)=\frac{۱۳}{۳۶}$$

پیشامدهای مستقل

در مثال‌های قبل دیدیم که برخی پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارند، ولی برخی پیشامدها بر احتمال وقوع یکدیگر تأثیری ندارند.

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد.

به عبارتی در این صورت وقوع B، احتمال وقوع A را کم یا زیاد نمی‌کند. در واقع احتمال وقوع **A با شرط رخ دادن B** و **بدون این شرط** یکسان است. یعنی پیشامد A از B مستقل است، هرگاه $P(A|B)=P(A)$ $(P(B)\neq 0)$. اما از آنجا که داریم $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$، پس:

مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ *

از این رابطه به وضوح نتیجه می‌شود که اگر A نسبت به B مستقل باشد، B نیز نسبت به A مستقل است. لذا می‌توان گفت:

دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا استقلال یا عدم استقلال دو پیشامد را همیشه می‌توان به‌طور شهودی تشخیص داد یا اینکه چه وقت باید از رابطهٔ * برای تشخیص استقلال دو پیشامد استفاده کرد.

(۱) با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ احتمال، یعنی: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

اگر پیشامدی مانند B با وقوع پیشامد A هیچ ارتباطی نداشته باشد، می‌توان به سادگی نشان داد که وقوع پیشامد B، احتمال وقوع پیشامد A را تغییر نمی‌دهد؛ بنابراین دو پیشامد مذکور از هم مستقل‌اند.

مثال: یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. این احتمال را که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید، محاسبه کنید.

حل: فرض کنیم

A: پیشامد رو شدن عددی زوج در پرتاب تاس

B: پیشامد پشت آمدن سکه

طبق آنچه گفته شد به سادگی دیده می‌شود که وقوع پیشامد B بر $P(A)$ تأثیر نمی‌گذارد. بنابراین پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند و داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال : خانواده‌ای دارای دو فرزند است. مطلوب است احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

حل : جنسیت فرزندان پیشامدهایی از هم مستقل‌اند، بنابراین می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد.

A : پیشامد پسر بودن فرزند اول

B : پیشامد پسر بودن فرزند دوم

احتمال پسر بودن هر دو $= P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

مثال : فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۸ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان خواهد شد؟

حل :

A: پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران $\rightarrow P(A)=۰/۵$

B: پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال ایران $\rightarrow P(B)=۰/۸$

به وضوح دیده می‌شود که A و B از هم مستقل‌اند، پس $P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=۰/۴$

اما با توجه به نحوهٔ انتخاب A و B، پیشامد قهرمانی حداقل یکی از آنها به صورت $A\cup B$ است و داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۵+۰/۸-۰/۴=۰/۹$$

در مثال‌های قبل استقلالِ دو پیشامد به سادگی تشخیص داده شد و از آن در حل مسئله استفاده شد. اما آیا همیشه تشخیص مستقل یا وابسته بودن دو پیشامد به همین آسانی است؟

(۲) اگر در ظاهر A و B پیشامدهایی باشند که وقوعشان با هم در ارتباط است، نمی‌توان به‌طور قطع گفت که A و B مستقل نیستند.

برای توضیح بیشتر به دو مثال بعد توجه کنید.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود.

ب) مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود.

پ) مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ شود.

حل : با توجه به اصل ضرب می‌دانیم که در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت وجود دارد. $(n(S)=۳۶)$

الف) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده ۵ شود به صورت زیر است :

{(۳,۲) و (۲,۳) و (۴,۱) و (۱,۴)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود، برابر است با : $\frac{۱}{۹}=\frac{۴}{۳۶}$.

ب) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، به‌صورت زیر است :

{(۴,۳) و (۳,۴) و (۵,۲) و (۲,۵) و (۶,۱) و (۱,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، برابر است با : $\frac{۱}{۶}=\frac{۶}{۳۶}$.

پ) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ می‌شود، به صورت زیر است :

{(۵,۵) و (۶,۴) و (۴,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود برابر است با : $\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۳۶}$.

اگر پیشامد B را رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول در نظر بگیریم، بررسی می‌کنیم که این پیشامد نسبت به هر یک از پیشامدهای مطرح شده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (پ) از مثال قبل مستقل است یا نه.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم.

الف) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۵ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد A پیشامد B

ب) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۷ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد A پیشامد B

پ) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد A پیشامد B

حل : در این مثال از آنجا که پیش‌فرض رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول مفروض است، تمام حالات ممکن به‌صورت زیر خواهد بود و ۶ عضو دارد.

$B=$ {(۲,۱) و (۲,۲) و (۲,۳) و(۲,۴) و (۲,۵) و (۲,۶)}

حال در هر حالت می‌خواهیم صحت رابطهٔ $P(A|B)=P(A)$ را بررسی کنیم. برای هر سه قسمت، $P(A)$ را در اولین مثال این درس محاسبه کردیم. کافی است $P(A|B)$ را در هر سه قسمت به‌دست آوریم.

الف) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۵ است، حالت (۲,۳) است. پس احتمال اینکه مجموع ۵ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{۱}{۹}$ به $\frac{۱}{۶}$ **افزایش می‌دهد**. لذا در این حالت A و B مستقل نیستند.

ب) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۷ است، حالت (۲,۵) است. پس احتمال اینکه مجموع ۷ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین

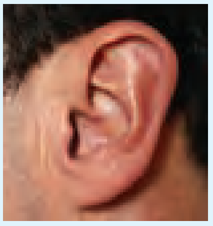
وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را **تغییر نداده است**. بنابراین در این حالت A و B مستقل از یکدیگرند.

پ) در صورتی که عدد رو شده در تاس اول ۲ باشد، در هیچ حالتی مجموع دو تاس ۱۰ نمی‌شود. بنابراین در این حالت احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود، صفر است. لذا در این حالت وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{۱}{۱۲}$ به صفر **کاهش داده است**.

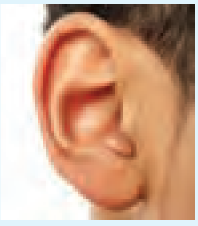
پس در این حالت A و B مستقل نیستند.

خواندنی

عوامل ژنتیک در شکل‌گیری صفات انسان نقش دارند و از والدین به فرزندان منتقل می‌شوند.
آیا تاکنون دقت کرده‌اید که نرمهٔ گوش انسان می‌تواند دو حالت داشته باشد، یکی پیوسته و یکی آزاد؟ با توجه به این موضوع سؤالاتی از این قبیل می‌توانند مطرح باشند:
اگر مردی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که فرزند آنها چه نوع نرمهٔ گوشی خواهد داشت؟
در ادامه به کمک علم احتمال به مسئلهٔ بالا می‌پردازیم.



نرمه گوش پیوسته



نرمه گوش آزاد

مثال: در علم ژنتیک برای ایجاد برخی صفات در فرزندان دو عامل را مؤثر می‌دانند که یکی از پدر و یکی از مادر به ارث می‌رسد. فرض کنیم این دو عامل را که در تعیین شکل نرمهٔ گوش فرزند مؤثرند با A و a نمایش دهیم که در آن:

A : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش آزاد

a : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش پیوسته

بنابراین هر فرد به یکی از حالت‌های AA یا aa یا Aa می‌تواند باشد که با احتمال $\frac{۱}{۲}$ هر یک از آنها را به فرزند خود می‌تواند انتقال دهد و تأثیر آن بر نرمهٔ گوش فرزند به صورت زیر است:

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت AA باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است.

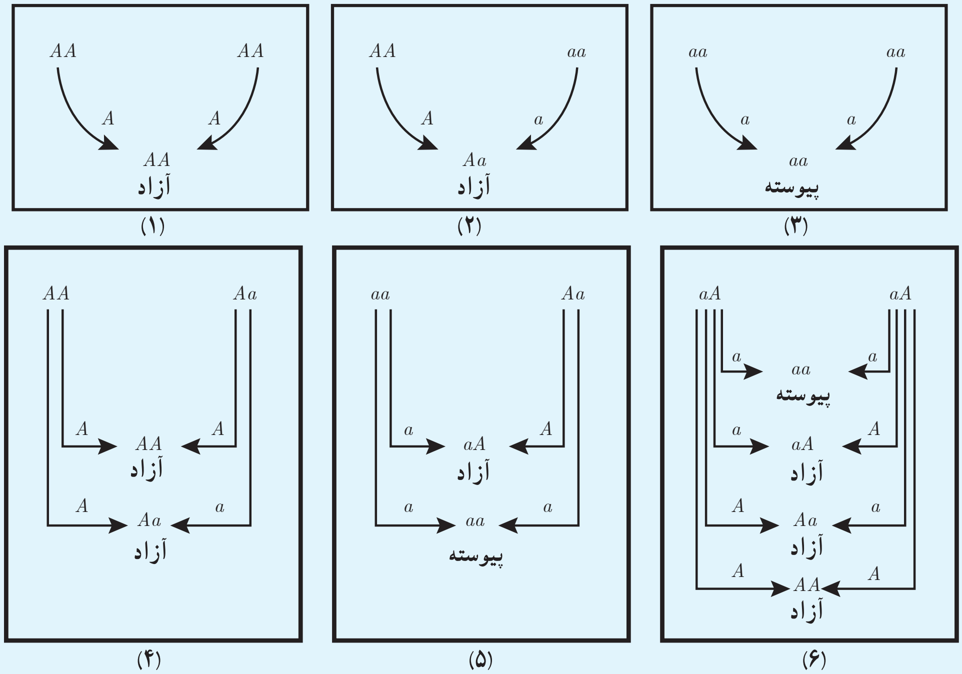
ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش پیوسته است.

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت Aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است، به همین دلیل عامل A را غالب و عامل a را مغلوب می‌نامند. به‌طور خلاصه داریم:

عامل‌های شخص	AA	Aa یا aA	aa
نوع نرمهٔ گوش شخص	آزاد	آزاد	پیوسته

ــ به حالت‌های AA و aa خالص و به حالت Aa ناخالص می‌گوییم.

در شکل‌های صفحهٔ بعد حالت‌های مختلف انتقال عوامل از پدر و مادر به فرزند نمایش داده شده‌اند.



فرض کنیم احتمال هر یک از دو عاملِ هر فرد به فرزندش $\frac{1}{2}$ باشد. اگر از میان افراد یک جامعهٔ آماری که نرمهٔ گوش آزاد دارند، ۵۰ درصدشان خالص و ۵۰ درصدشان ناخالص باشند، هر یک از احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

اگر علی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، و آنها یک فرزند با نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشند، با چه احتمالی نرمهٔ گوش فرزند دوم آنها پیوسته خواهد بود؟

حل : از آنجا که پدر، نرمهٔ گوش آزاد دارد، عامل‌های او به صورت AA یا Aa است. اما اگر عامل‌های پدر به صورت AA باشد، نرمهٔ گوش فرزندان آنها به صورت آزاد خواهد بود. بنابراین عامل‌های پدر به صورت Aa است. از طرفی از آنجا که مادر نرمهٔ گوش پیوسته دارد، لذا عامل‌های او به صورت aa خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل ۵ به احتمال $\frac{1}{2}$ فرزند دوم آنها نرمهٔ گوش پیوسته خواهد داشت.

تمرین

۱ در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۲ یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به‌دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

۳ فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل‌اند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

۴ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۵ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰/۶۲۵ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۷ ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

درس دوم

آمار توصیفی

مقدمه

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب **معیارهای گرایش به مرکز** و **معیارهای پراکندگی** که در ادامه با آنها آشنا خواهید شد، می‌پردازد. آمارتوصیفی اطلاعاتی از چگونگی داده‌های جمع‌آوری شده فراهم می‌آورد که بسیار مفید است.

معیارهای گرایش به مرکز

معمولاً سعی می شود، دانسته‌های نهفته در داده‌ها را به‌صورت یک یا چند عدد شاخص درآورد، تا بتوان هم اندیشهٔ کلی دربارهٔ ویژگی مورد مطالعه به‌دست آورد و هم نتیجه مطالعات را به‌سادگی گزارش کرد. میانگین و میانه به عنوان معیارهای گرایش به مرکز در این کتاب معرفی می‌شوند.

میانگین

میانگین ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز است که در پایهٔ هشتم با آن آشنا شده‌اید.

میانگین متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست که آن را با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم و برابر است با :

$$\bar{X}=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_N}{N}$$

که در آن x_i داده‌ها و N برابر با تعداد کل داده‌ها است.

فعالیت

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد :

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۶۲

نحوهٔ محاسبه میانگین

۱ محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد :

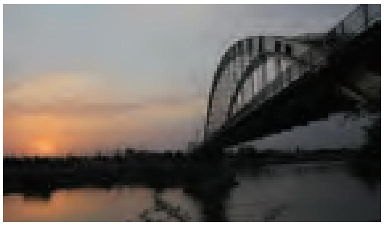
۲ سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد :

میانگین جرم دوستان محمد برابر است با ....

ویژگی‌های میانگین

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آنها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد. چرا؟
اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آنها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

کار در کلاس



۱ در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، میانگین دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت است؟ (راهنمایی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$)

میانه

پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است میانه می‌نامیم و آن را با $Q_۲$ نمایش می‌دهیم.

مثال : در فعالیت قبل، میانهٔ داده‌ها کدام است؟

محمد برای پاسخ به این سؤال :

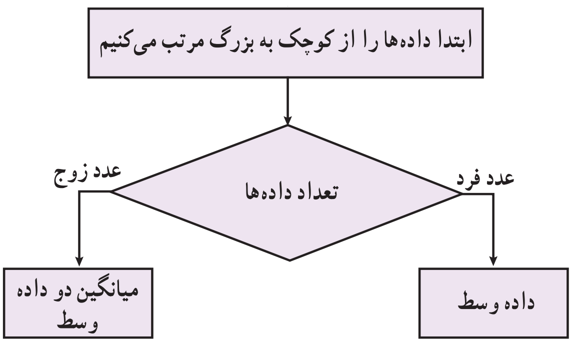
الف) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد :

۵۵ ۵۵ ۵۷ ۶۱ ۶۲

ب) جرم رضا و احمد از سام کمتر است. در حالی‌که جرم علی و نیما از سام بیشتر است.

در مثال فوق، عدد ۵۷ را میانهٔ داده‌ها می‌نامند، زیرا پس از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ، در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد.

روش محاسبهٔ میانه :



مثال : اعداد زیر نمره‌های درس ریاضی سمیرا در طول یک سال است.

ـ میانگین و میانهٔ نمره‌های او را حساب کنید.

۱۹   ۱۷   ۱۸   ۱۸   ۲۰   ۵

الف) محاسبهٔ میانگین

$$\overline{X}=\frac{۱۹+۱۷+۱۸+۱۸+۲۰+۵}{۶}\simeq ۱۶/۱۷$$

ب) محاسبهٔ میانه

۵ ,۱۷ ,۱۸,۱۸ ,۱۹ ,۲۰

$$Q_{۲}=\frac{۱۸+۱۸}{۲}=۱۸$$

پ) به نظر شما کدام معیار توانایی دانش‌آموز در این درس را بهتر ارزیابی می‌کند؟ چرا؟

میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک که در آمار به آنها داده‌های دورافتاده می‌گوییم، قرار می‌گیرد. درصورتی که میانهٔ داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دور افتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین درصورت وجود دادهٔ دورافتاده، از میانه استفاده می‌کنیم در غیراین صورت از میانگین استفاده خواهیم کرد.

کار در کلاس

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، قبل از یک مسابقهٔ دو است.

۱۰۰   ۹۱   ۸۲   ۷۵   ۱۰۵   ۹۸   ۹۸   ۱۰۱   ۸۹   ۹۲   ۹۷   ۸۶

ـ میانهٔ داده‌ها را مشخص کنید.

ـ میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

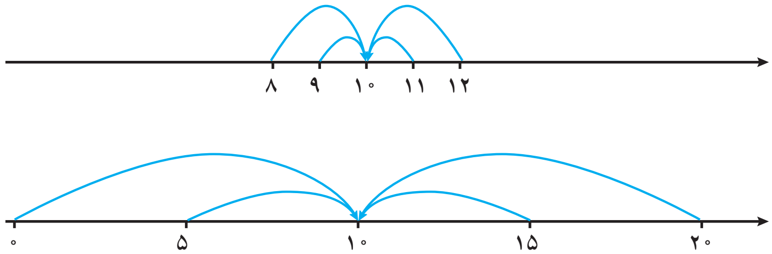
معیارهای پراکندگی

میانه و میانگین اطلاعاتی پیرامون مرکز داده‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند. گاه در توصیف داده‌ها لازم است از چگونگی پراکندگی آنها نیز اطلاعی داشته باشیم. در این درس با دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم به‌عنوان معیارهای پراکندگی آشنا خواهیم شد.

فعالیت

نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است :

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰



الف) میانهٔ نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

ب) میانگین نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

پ) به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

همان‌طور که در فعالیت می‌بینید، تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی‌تواند اطلاعات کاملی از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد و لازم است به چگونگی پراکندگی داده‌ها نیز توجه شود.

دامنهٔ تغییرات

دامنهٔ تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را نشان می‌دهد و آن را با نماد R نمایش می‌دهیم.

مثال : در فعالیت بالا برای محاسبهٔ دامنهٔ تغییرات نمره ریاضی کلاس A و کلاس B به‌صورت زیر عمل کنید :

	کلاس B	کلاس A
کوچک‌ترین داده	۰	۸
بزرگ‌ترین داده	۲۰	۱۲
دامنه تغییرات	۲۰ − ۰=۲۰	۱۲ −۸ =۴

در فعالیت بالا دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس A، ۴ نمره و دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس B، ۲۰ نمره است. ملاحظه می‌شود که در کلاس A پراکندگی داده‌ها کمتر از کلاس B است.

کار در کلاس

معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند، گزارش کنند.

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

۱۵   ۸   ۹   ۱۲   ۱۴   ۴   ۱

ب) دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعدادکتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنهٔ تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

پ) از مقایسهٔ پاسخ الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

همان طور که می‌بینید، دامنهٔ تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

واریانس

می‌خواهیم شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها پیدا کنیم. از آنجا که میانگین، معیاری برای مرکز داده‌ها است، شاخصی که بیانگر اختلاف داده‌ها از میانگین باشد و معایب وارد بر دامنه تغییرات را برطرف سازد، می‌تواند شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها باشد.

فعالیت

الف) در ادامهٔ فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های زیر محاسبه کنید.

کلاس B	
y_i	$(y_i - \overline{Y})$
۰	
۵	
۱۰	
۱۵	
۲۰	

کلاس A	
x_i	$(x_i - \overline{X})$
۸	
۹	
۱۰	
۱۱	
۱۲	

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

در هر دو کلاس، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌ها صفر شد. با مراجعه به تعریف میانگین، بدیهی است این نتیجه اتفاقی نبوده است.

همواره برای هرمجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر خواهد شد.

بنابراین برای ساختن شاخصی که پراکندگی حول میانگین را نشان دهد، باید از قدرمطلق اختلاف داده‌ها از میانگین یا از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین استفاده کرد. استفاده از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین متداول‌تر است.

الف) مجذور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه کنید.

کلاس B		
y_i	$(y_i - \overline{Y})$	$(y_i - \overline{Y})^۲$
۰		
۵		
۱۰		
۱۵		
۲۰		

کلاس A		
x_i	$(x_i - \overline{X})$	$(x_i - \overline{X})^۲$
۸		
۹		
۱۰		
۱۱		
۱۲		

ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$(۸-۱۰)^۲ + ... + (۱۲-۱۰)^۲ =$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$(۰-۱۰)^۲ + ... + (۲۰-۱۰)^۲ =$

پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$\frac{(۸-۱۰)^۲+\cdots+(۱۲-۱۰)^۲}{۵} =$
میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$\frac{(۰-۱۰)^۲+\cdots+(۲۰-۱۰)^۲}{۵} =$

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آنها را واریانس می نامند و از نماد $\sigma^۲$ برای نمایش آن استفاده می‌شود:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \overline{X})^۲ + \cdots + (x_N - \overline{X})^۲}{N}$$

تذکر: واحد واریانس برابر با توان دوم واحد دادهٔ مورد نظر است.

همان‌طور که در فعالیت قبل دیده می‌شود، واریانس بزرگ (کلاس B) نشان دهندهٔ دور بودن داده‌ها از میانگین آنها و واریانس کوچک (کلاس A) نشان دهندهٔ نزدیکی داده‌ها به میانگین آنهاست. چنانچه همه داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس آنها صفر خواهد بود. بنابراین واریانس معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده‌ها نسبت به میانگین است.

کار در کلاس

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در «کاردرکلاس» قبل، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

واریانس	دامنه تغییرات	تعداد کتاب‌های مطالعه شده توسط هر دانش‌آموز
	۱۴	۱ ۴ ۱۴ ۱۲ ۸ ۸ ۱۵
	۱۴	۱۱ ۵ ۱ ۴ ۱۴ ۱۲ ۸ ۸ ۱۵

همان‌طور که در این «کاردرکلاس»، دیده می‌شود، واریانس برخلاف دامنهٔ تغییرات با تغییر تعداد و مقادیر داده‌ها تغییر می‌کند.

ویژگی‌های واریانس

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد. چرا؟

اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

کار در کلاس

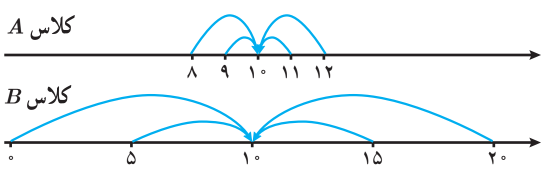
۱ در اولین فعالیت، واریانس جرم دوستان محمد چند گرم به توان دو است؟

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر واریانس دمای هوا ۶ درجه سانتی‌گراد به توان دو باشد، واریانس دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت به توان دو است؟ (راهنمایی $F=\frac{9}{5}C+32$)

انحراف معیار

معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی فعالیت قبل در جدول زیر آمده است.

جذر واریانس	واریانس	دامنه تغییرات	میانه	میانگین	
۱/۶	۲/۵	۴	۱۰	۱۰	کلاس A
۷/۹	۶۲/۵	۲۰	۱۰	۱۰	کلاس B



همان‌طور که در جدول و نمودار بالا دیده می‌شود، واریانس پراکندگی حول میانگین را بیشتر از حدانتظار نشان می‌دهد؛ زیرا در محاسبهٔ واریانس از میانگین **مجذور** اختلاف از میانگین داده‌ها استفاده می‌شود. درحالی‌که جذر واریانس شاخص بهتری برای پراکندگی حول میانگین داده‌ها است.

جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند و آن‌را با نماد σ نمایش می‌دهند :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (x_N - \overline{X})^2}{N}}$$

برای گزارش پراکندگی کدام شاخص را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟

مجدداً این سؤال را مطرح می‌کنیم که در این فعالیت، به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات که با cv نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف معیار به میانگین ($cv = \frac{\sigma}{\overline{X}}$) است و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود. مزیت این ضریب آن است که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد. بنابراین اگر داده‌های مربوط به یک کمیت در دو جامعه با واحدهای متفاوت بیان شده باشد و یا با واحدهایی که نمی‌شناسیم بیان شده باشند می‌توان برای مقایسهٔ پراکندگی داده‌ها در دو جامعه از این ضریب استفاده کرد.

مثال : ضریب تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس A و کلاس B در فعالیت قبل محاسبه شد.

ضریب تغییرات	انحراف معیار	میانگین	
$\frac{1/6}{10} = 0/16$ یا ٪۱۶	۱/۶	۱۰	کلاس A
$\frac{7/9}{10} = 0/79$ یا ٪۷۹	۷/۹	۱۰	کلاس B

معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کلاس A، که ضریب تغییرات کمتری دارد، تدریس کند.

کار در کلاس

دمای هوای یک هفتهٔ اسفند مشهد وکیش، به ترتیب به فارنهایت و سانتی‌گراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کدام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است (ضریب تغییرات کمتری دارد)؟

جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	
۳۷	۳۷	۳۹	۴۱	۴۹	۵۳	۵۰	مشهد (فارنهایت)
۲۱	۲۲	۲۲	۲۳	۲۴	۲۶	۲۷	کیش (سانتی‌گراد)

چارک‌ها

چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. بدیهی است چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با $Q_۱$ و چارک سوم را با $Q_۳$ نمایش می‌دهند.

۹۵	۹۳	۸۷	۸۰	۷۵	۷۰	۶۰	۵۱	۴۸	۲۴	۲۲
		چارک سوم			میانه			چارک اول		

می‌بینید که ۲۵ درصد داده‌ها از ۴۸ (چارک اول)، ۵۰ درصد داده‌ها از ۷۰ (میانه) و ۷۵ درصد داده‌ها از ۸۷ (چارک سوم) کمتر است.

محاسبهٔ چارک‌ها :

ابتدا میانه داده‌ها را به‌دست آورید

↓

برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک اول بنامید.

↓

برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک سوم بنامید.

مثال : تعداد تصادف‌های اتومبیل‌ها در ۱۵ روز اول تابستان در شهری به‌صورت زیر گزارش شده است.

۱۹ ۳۱ ۲۵ ۱۸ ۳۲ ۴۱ ۴۳ ۳۴ ۱۶ ۲۷ ۱۴ ۲۳ ۱۵ ۱۰ ۱۲

چارک‌ها را مشخص کنید :

۴۳	۴۱	۳۴	۳۲	۳۱	۲۷	۲۵	۲۳	۱۹	۱۸	۱۶	۱۵	۱۴	۱۲	۱۰
			چارک سوم				میانه				چارک اول			

توجه به این نکته نیز ضروری است که با توجه به تعداد داده‌ها، ممکن است چارک‌ها دقیقاً خود داده‌ها نباشند و در فاصلهٔ بین دو دادهٔ متوالی قرار گیرند.

کار در کلاس

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد کند. وی از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید، در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

۴۵	۹۰	۶۰	۲۰۰	۱۵	۱۸۰	۴۵	۸۰	۳۰	۱۲۰
۷۵	۹۰	۹۰	۶۰	۲۰	۱۲۰	۱۱۵	۶۰	۳۰	۲۰
۴۵	۴۵	۶۰	۶۰	۶۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۲۰۰	۲۵
					۱۵	۳۰	۱۸۰	۱۰۰	۱۲۰

چارک اول، میانه و چارک سوم مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان این کلاس را مشخص کنید.

تمرین

۱ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

ـ اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازهٔ $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد.

ـ اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود.

ـ اگر مقدار ثابت $\frac{1}{c}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می‌شود.

ـ اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

۲ کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

۳ جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد. الف) میانگین و میانهٔ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	مینا
۳۵	۳۰	۲۵	۲۰	۱۵	مریم

خواندنی

علاوه بر چارک، از دهک و صدک نیز استفاده می‌شود. دهک‌ها (دهک اول، دهک دوم ،... و دهک نهم) مقادیر نه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دهک پنجم همان میانه است.

به نقل از روزنامه همشهری ۹۲/۱۱/۹، شناسایی سه دهک پایین درآمدی باید در دستور کار دولت قرار گیرد. با توجه به این جمله چه افرادی باید شناسایی شوند؟

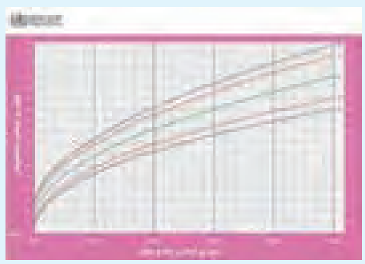
اگر دولت بخواهد یارانهٔ افرادی را که درآمد آنها بیشتر از دهک هشتم است، حذف کند و به یارانهٔ افرادی که درآمد آنها از دهک سوم کمتر است، ۵۰درصد اضافه کند، آیا برای دولت مقرون به‌صرفه است؟

صدک‌ها (صدک اول، صدک دوم ،... و صدک نود و نهم) مقادیر نود و نه داده‌اند که داده‌های مرتب شده را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. صدک دهم همان دهک اول و صدک بیست‌وپنجم همان چارک اول است.

کودکانی که زیر صدک سوم قد رشد می‌کنند، فارغ از اندازهٔ قد باید ارزیابی شوند.

ـ منظور از صدک سوم قد چیست؟

ـ بر اساس جملهٔ فوق چه کودکانی باید مورد ارزیابی قرار گیرند؟



۴ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های ۹۴ــ۸۴ را بر اساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹

۵ در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد دیده می‌شود.

(راهنمایی : $۱m = ۳/۲۸۱\, ft$، ft : فوت ، m : متر)

	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

خواندنی

شاخص تورم (شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی) معیار سنجش تغییرات قیمت کالاها و خدماتی است که توسط خانوارها در یک جامعه به مصرف می‌رسد. این شاخص به عنوان وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سطح عمومی قیمت کالاها و خدمات مورد مصرف خانوارها، یکی از بهترین معیارهای سنجش تغییر قدرت خرید پول داخل کشور به‌شمار می‌رود. برای محاسبهٔ شاخص تورم، سال ۱۳۹۰ به عنوان سال پایه، ۲۹۴ قلم کالا و ۹۱ قلم خدمت با توجه به اهمیت آنها به طریق علمی انتخاب شده است. برای محاسبهٔ شاخص تورم از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود :

$$I_t = \frac{P_t^i Q_t^i + \cdots + P_t^{۳۸۵} Q_t^{۳۸۵}}{P_۰^i Q_۰^i + \cdots + P_۰^{۳۸۵} Q_۰^{۳۸۵}} \times ۱۰۰$$

که در آن

I_t : شاخص تورم در زمان t

P_t^i : قیمت کالا یا خدمت iام در زمان t

$P_۰^i$: قیمت کالا یا خدمت iام در زمان پایه

Q_t^i : مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان t

$Q_۰^i$: مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان پایه

برای محاسبهٔ نرخ تورم (Inf_t) از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود :

$$Inf_t = \frac{I_t - I_{t-۱}}{I_{t-۱}} \times ۱۰۰$$

I_t شاخص تورم در سال موردنظر و $I_{t-۱}$ شاخص تورم در سال قبل از آن است.

نرخ تورم	شاخص تورم	سال
۱۰/۴	۳۹/۸۰	۱۳۸۴
۱۱/۹	۴۴/۵۳	۱۳۸۵
۱۸/۴	۵۲/۷۴	۱۳۸۶
۲۵/۴	۶۶/۱۲	۱۳۸۷
۱۰/۸	۷۳/۲۳	۱۳۸۸
۱۲/۴	۸۲/۳۱	۱۳۸۹
۲۱/۵	۱۰۰/۰۰	۱۳۹۰
۳۰/۵	۱۳۰/۵۴	۱۳۹۱
۳۴/۷	۱۷۵/۸۸	۱۳۹۲
۱۵/۶	۲۰۳/۲۴	۱۳۹۳
۱۱/۹	۲۲۷/۴۶	۱۳۹۴

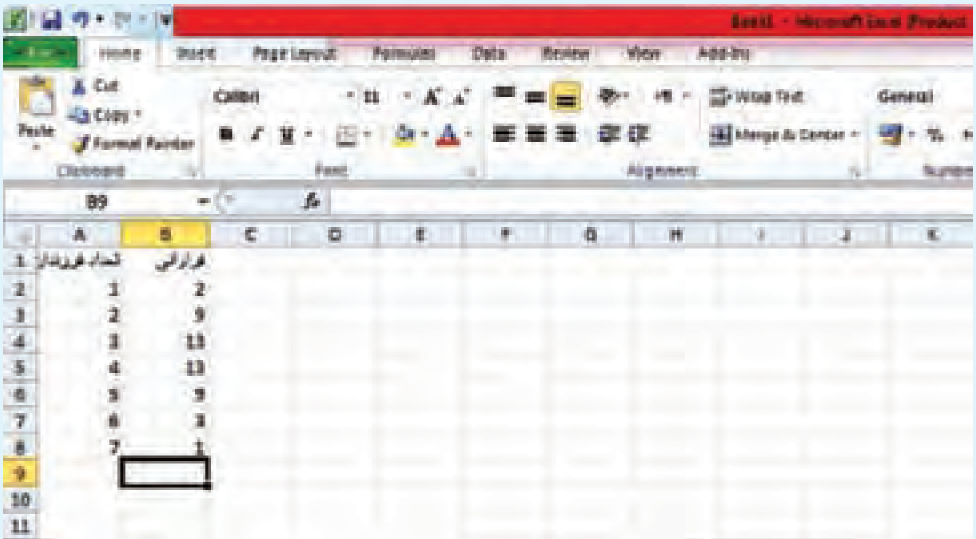
خواندنی

در بسیاری از پژوهش‌ها برای بیان بهتر نتایج و انتقال ساده‌تر مفاهیم، از جدول‌ها و نمودارها استفاده می‌کنند. نرم‌افزارهای گوناگونی برای ترسیم نمودارها به‌کار گرفته می‌شوند. پرکاربردترین، ساده‌ترین و فراگیرترین نرم‌افزار موجود، برنامهٔ اکسل از مجموعهٔ مایکروسافت‌آفیس است.

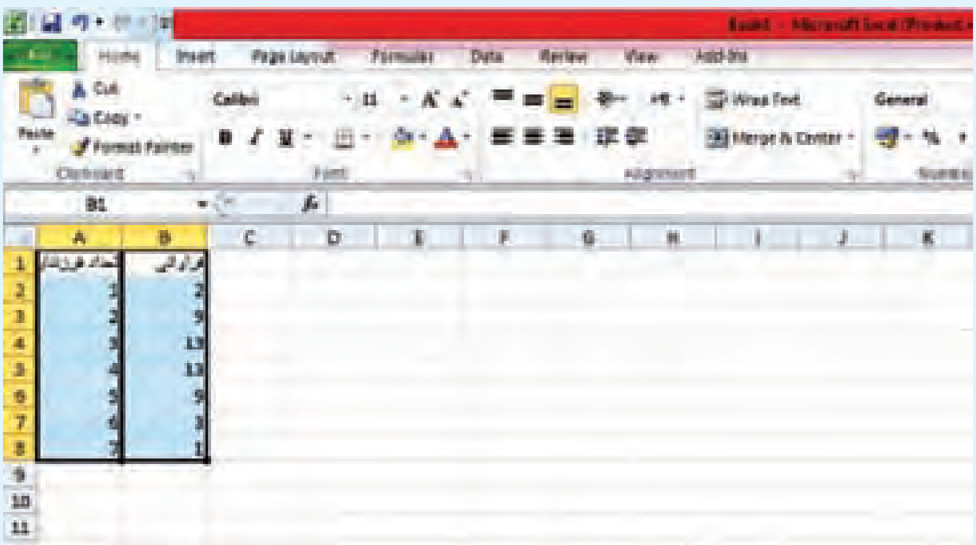
نخستین مرحله از رسم نمودار، وارد کردن داده‌ها در یک **کاربرگ** (**worksheet**) از برنامهٔ اکسل است. نام متغیرها را بالای ستون مربوط به آن بنویسید. معمولاً متغیر در ستون اول و فراوانی یا مقدار هر گروه یا متغیر را در ستون بعد روبه‌روی آن وارد می‌کنند. برنامهٔ اکسل متغیر را به‌صورت خودکار، روی محور افقی و فراوانی یا مقادیر را روی محور عمودی نشان می‌دهد. انواع نمودارهای پیش‌فرض که در پایه‌های پیشین با آنها آشنا شده‌اید، در برنامهٔ اکسل وجود دارد.

نمودار میله‌ای :

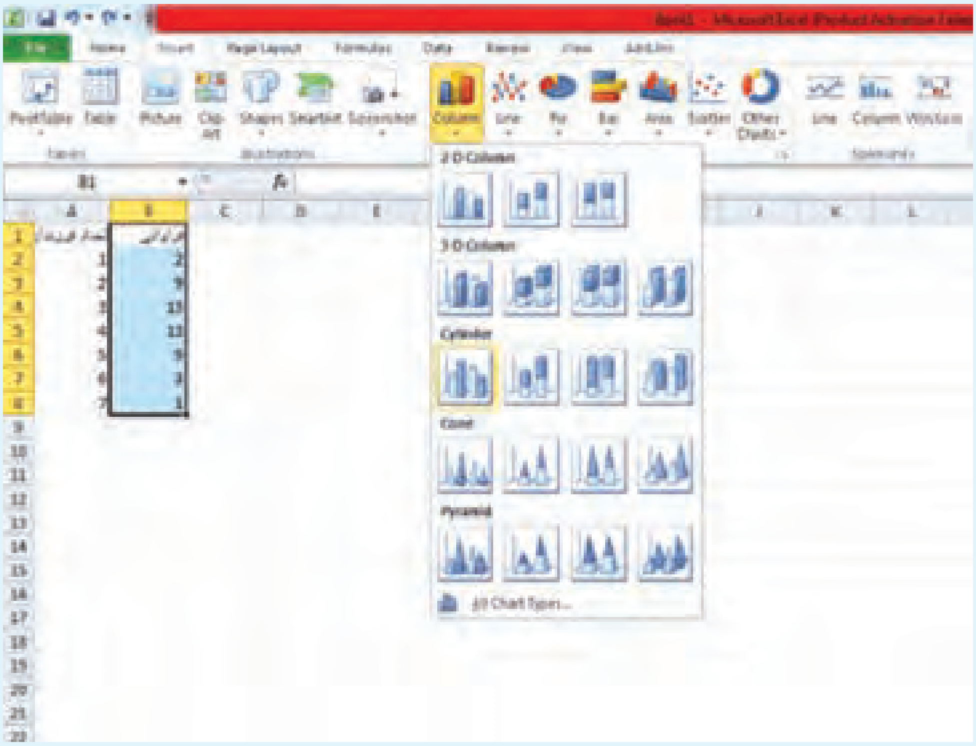
برای نمایش فراوانی یا درصد متغیرهای اسمی، گسسته یا گروه‌بندی شده از نمودار میله‌ای استفاده می‌شود. برای مثال تعداد فرزندان خانواده، دادهٔ گسسته است. برای رسم نمودار در اکسل داده‌ها را وارد کنید :



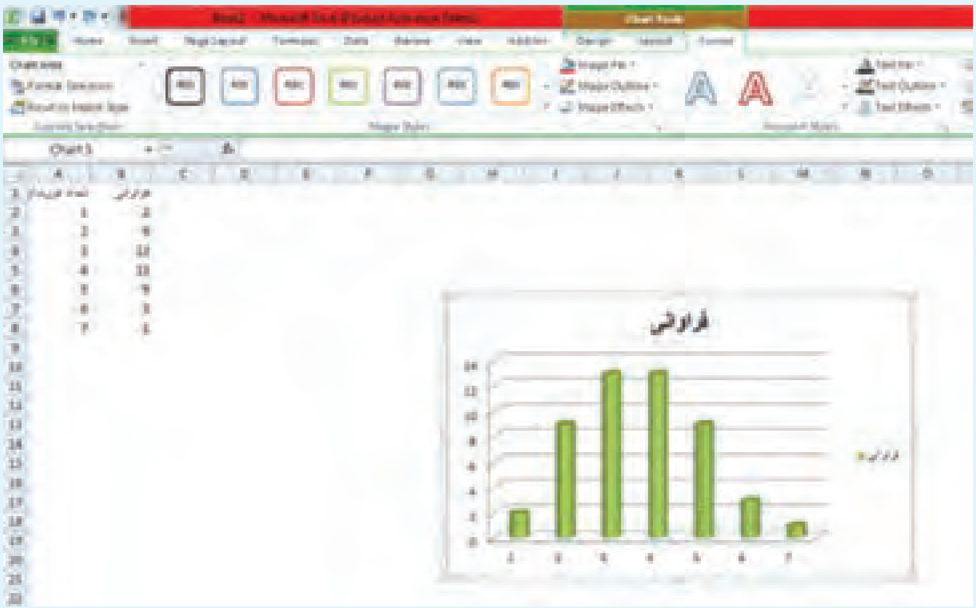
سپس دو ستون را انتخاب کنید.



سپس از منوی صفحهٔ قبل سربرگ Insert را انتخاب کنید. انواع نمودار را در آنجا می‌بینید. برای رسم نمودار میله‌ای، از الگوی Column یا Bar استفاده کنید.

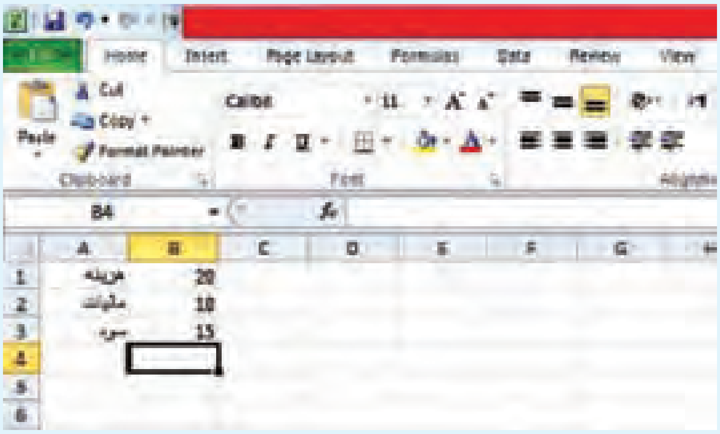


بنا به کارایی نمودار مورد نظر و سلیقهٔ خودتان می‌توانید هر یک از این پنج نمونه نمودار را به‌عنوان نمودار میله‌ای انتخاب کنید. با انتخاب نمودار موردنظر، نمودار میله‌ای شامل مقادیر مورد نظر شما رسم می‌شود و به صورت یک شیءِ جداگانه روی کاربرگ شما نشان داده می‌شود. با کلیک و راست‌کلیک بر روی بخش‌های گوناگون نمودارتان، می‌توانید گزینه‌های آن از قبیل رنگ، نام نمودار، برچسب‌ها، سه‌بعدی بودن، پس‌زمینهٔ نمودار و ... را به اشکال مختلف تغییر دهید. با گرفتن و کشیدن نمودار می‌توانید محل آن را در کاربرگتان جابه‌جا کنید.



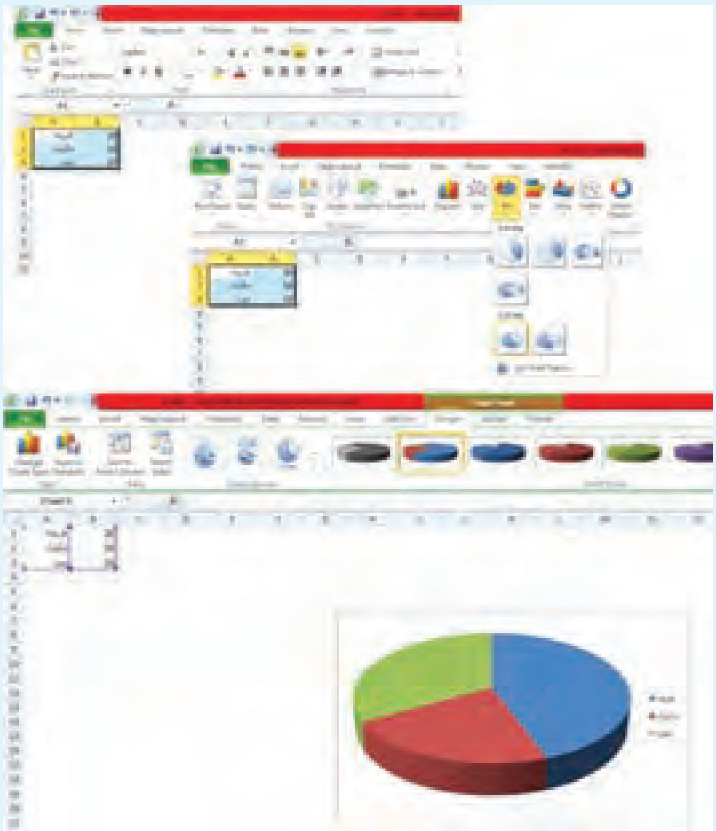
نمودار دایره‌ای :

نمودار دایره‌ای، بهتر است برای متغیر اسمی استفاده شود. هنگامی که یک موضوع را به بخش‌هایی تفکیک کنیم، نمودار دایره‌ای بسیار مناسب است؛ مثلاً درآمد یک شرکت به بخش‌های مختلف تعلق می‌گیرد. می‌توان آن را با نمودار دایره‌ای نمایش داد.



برای رسم نمودار در اکسل ابتدا داده‌ها را وارد کنید :

با رفتن به قسمت Insert و انتخاب Pie نمودار دایره‌ای مورد نظرتان را انتخاب کنید. با فشار دادن روی آن، نمودار دایره‌ای رسم می‌شود.



دیدید که برای رسم سایر نمودارها هم می‌توان به همین ترتیب عمل کرد، فقط کافی است از منوی بالا سربرگ Insert را انتخاب کنید و نمودار مورد نظر خود را، پس از ورود داده‌ها انتخاب نمایید.

منابع فارسی :

۱ــ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید (۱۳۹۲). ریاضیات ۲ سال دوم آموزش متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۲ــ اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمد تقی و عالمیان، وحید (۱۳۹۵). حسابان سال سوم متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۳ــ بخشعلی زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ دهقانی ابیانه، زین‌العابدین؛ دیده‌ور، فرزاد؛ طاهری تنجانی، محمدتقی (۱۳۹۲). ریاضیات (۱). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۴ــ امیری، حمیدرضا، بیژن‌زاده، محمدحسن؛ بهرامی سامانی، احسان؛ حیدری، رضا؛ داورزنی، محمود؛ ریحانی، ابراهیم؛ سیدصالحی، محمدرضا؛ قربانی آرانی، مجتبی. (۱۳۹۵)، ریاضی (۱)، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۵ــ امیری، حمیدرضا؛ ایرانمنش، علی؛ داودی، خسرو؛ دلشاد، کبری؛ ریحانی، ابراهیم؛ سیدصالحی، محمدرضا؛ شرقی، هوشنگ؛ صدر، میرشهرام. (۱۳۹۴)، ریاضی نهم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۶ــ بیژن‌زاده، محمدحسن؛ پاشا، عین‌اللّه؛ یوحنایی، که‌کو. (۱۳۹۰). ریاضی عمومی. دوره پیش دانشگاهی، رشته تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۷ــ رستمی، محمدهاشم؛ عطوفی، عبدالحمید؛ گودرزی، محمد؛ امیری، حمیدرضا (۱۳۹۵). ریاضیات ۳، سال سوم علوم تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۸ــ گویا، زهرا؛ گویا، مریم؛ ظهوری زنگنه، بیژن؛ حاجی بابایی، جواد؛ جهانی‌پور، روح‌اللّه؛ (۱۳۸۸). ریاضی پایه، دوره پیش دانشگاهی، رشته علوم انسانی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۹ــ قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۷۱) حساب و جبر. سال دوم آموزش متوسطه رشته ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۱۰ــ بهبودیان، جواد. (۱۳۸۴) آمار و احتمال مقدماتی. مشهد : انتشارات آستان قدس رضوی

۱۱ــ رحیمی، زهرا، سیدصالحی، محمدرضا، شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۵). هندسه (۱). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۱۲ــ جانسون، ریچارد.ا و باتاچاریا، گوری.ک. (۱۹۹۶). آمار : اصول و روش‌ها. ترجمه : فتاح میکائیلی. (۱۳۸۰) اصفهان : انتشارات ارکان.

۱۳ــ ووناکات، تامس. اچ و ووناکات، رانلد. جی. (۱۹۳۵). آمار مقدماتی. ترجمه : محمدرضا مشکانی (۱۳۸۴) تهران : مرکز نشر.

۱۴ــ آشفته، افشین. (۱۳۹۵). ترفندها و سواد آماری در مطالعات اقتصادی و اجتماعی. تهران : مرکز آمار ایران، اصفهان : خانهٔ آمار اصفهان.

منابع انگلیسی :

15_Beecher, A., Penna., & Bittinger, L. (2012). Precalculus, A Right Triangle Approach. Addison_Wesley.

16_Lial, M., Greenwell, R., & Ritchey., N. (2017). Calculus with Applications. Pearson Education.

17_Bittinger, M. L., Ellenboge., D. J., & Surgent S. A., (2012). Calculus and its applications. 10th ed. Adison_Wesley.

18_Briggs, W., Cochran, L., Gillett, B., & Schulz, E.,(2015). Calculus. Early transcendentals. Second edition. Pearson.

19_Aufmann, R. N., Barker V.C. & Nation, R.D. (2011). College Algebra and Trigonometry. Seventh edition, Brooks/Cole.

20_Cohen D., Lee T. & Sklar D. (2010). Precalculus: A Problems_Oriented Approach. Sixth Edition, Brooks/Cole.

21_Faires J. D. & DeFranza J. (2012). Precalculus. Fifth edition, Brooks/Cole.

22_Sullivan, M. (2015). Precalculus: Concepts Through Functions A Unit Circle Approach To Trigonometry. Third edition, Pearson Education.

23_Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. Eighth edition, Pearson Prentice Hall.

24_Young, C. (2013). Algebra and Trigonometry. Third edition, John Wiley & Sons.

25_Young, C. (2014). Precalculus. Second edition, John Wiley & Sons.

26_Berchie Holliday (2008). California Algebra 2. Concepts, Skills, and Problem Solving. Glencoe/McGraw_Hill.

27_Gary K. Rockswold (2010). COLLEGE ALGEBRA with Modeling & Visualization. 4th edition. Pearson Education.

28_Ron Larson, David C. Falvo. (2011). Precalculus with Limits. Second Edition. Charlie VanWagner

29_https: //www.wikipedia.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی ۲ ـ کد ۱۱۱۲۱۱

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	زهرا ملکی	قزوین	۲۲	زهره محمدی	چهارمحال وبختیاری
۲	شهره چوپانی	چهارمحال وبختیاری	۲۳	مجید قادری	هرمزگان
۳	پروین طالب حسامی آذر	کردستان	۲۴	مریم عالی	کرمان
۴	شهین قلی زاده	سیستان وبلوچستان	۲۵	پروانه وزیری	هرمزگان
۵	قاسم علی پور	آذربایجان شرقی	۲۶	سمیرا کشاورز	البرز
۶	معصومه صبوحی	قزوین	۲۷	سید محسن حسینی	کردستان
۷	الهه یمینی	کرمانشاه	۲۸	دینا گل خندان	گیلان
۸	آزاده حاجی هاشمی	خوزستان	۲۹	محمد امیدی	ایلام
۹	جمال نوین	یزد	۳۰	غلامرضا باصری	فارس
۱۰	نرگس ملایی نژاد	سیستان وبلوچستان	۳۱	محمد جوراک	کرمانشاه
۱۱	حمید قره گزلو	شهرستانهای تهران	۳۲	علی رضا زمانی	آذربایجان شرقی
۱۲	وجیهه فاتحی	خراسان جنوبی	۳۳	حسین امیر آبادی زاده	خراسان جنوبی
۱۳	سمیه قربانی راد	خراسان شمالی	۳۴	احمد زرودی	مازندران
۱۴	زهره دادسنج	همدان	۳۵	مهری غضنفریان	زنجان
۱۵	علی اصغر بسطامی	ایلام	۳۶	محمدهادی اقتصادی فر	فارس
۱۶	محبوبه رمضانی	شهرستانهای تهران	۳۷	حسن زارع	گلستان
۱۷	عاطفه حسین پور	مازندران	۳۸	مریم نیلفروش همدانی	اصفهان
۱۸	جعفر خزائیان	همدان	۳۹	مریم ضرغام پور	سمنان
۱۹	مهین ابراهیمیان	خراسان شمالی	۴۰	مریم سادات بهنام	شهرتهران
۲۰	الناز رابری	آذربایجان غربی	۴۱	فرخ حسن زاده	کهگیلویه وبویراحمد
۲۱	فرانک فرشادی فر	لرستان	۴۲	سعید مدیر خراسانی	شهر تهران