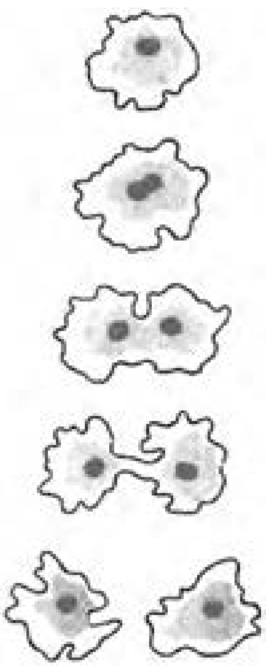
فصل ۳

لگاریتم

اختراع لگاریتم در دنیا، یک شگفتی کامل بود. هیچ‌یک از کارهای قبلی به اختراع آن کمک نکرده بود و هیچ‌یک از آن‌ها ورودش را پیش بینی نکرده بودند. لگاریتم به‌تنهایی افکار انسان را ناگهان متوجه خود کرد بدون آن‌که از کارهای دیگر اندیشمندان بهره بگیرد و یا آن که مسیرهای شناخته شده‌ی تفکر ریاضی را دنبال کند.

لورد مولتون[۱]، ۱۹۱۵

۳ ــ ۱ــ پیدایش



روش تکثیر آمیب‌ها بسیار جالب است. زمانی که یک سلول آمیب به اندازه‌ی مشخصی می‌رسد، به دو نیم تقسیم می‌شود، سپس حدوداً یک روز طول می‌کشد تا دو آمیب به‌وجود آمده به اندازه‌ای رشد کنند که باز تقسیم شوند و تبدیل به چهار آمیب گردند و به همین ترتیب تعداد آن‌ها مرتّب افزایش می‌یابد.

این نحوه‌ی افزایش از این جهت جالب است که آمیب‌ها با نصف شدن تکثیر می‌شوند! تعداد آمیب‌ها در پایان هفته از جدول (۱) به‌دست می‌آید که بستگی به زمان دارد. با دقت در این جدول می‌بینیم که سطر دوم (تعداد آمیب‌ها) یک دنباله‌ی توانی است، یعنی یک دنباله‌ی هندسی که هر جمله‌ی آن دو برابر جمله‌ی قبلی است. با این حال، سطر اوّل (زمان) یک دنباله‌ی حسابی است که در آن هر جمله یکی بیشتر از جمله‌ی قبلی است. نکته‌ی جالبی به‌وسیله‌ی جان‌نپِر ریاضیدان اسکاتلندی در اوایل قرن هفدهم در

۱ــ Lord Moulton

جدول (۱)

روز زمان	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
تعداد آمیب‌ها	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	...

مورد این دو دنباله مطرح شد. اگر دو عدد ۴ و ۱۶ از سطر پایین را درنظر بگیریم، حاصل‌ضرب آن‌ها جمله‌ی دیگری از دنباله‌ی هندسی سطر دوّم خواهد بود، یعنی

۴ . ۱۶ = ۶۴

که جمله‌های متناظر این اعداد در دنباله‌ی حسابی سطر اوّل به ترتیب ۲، ۴ و ۶ هستند و این همان نکته‌ی جالب است.

جدول (۲)

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	...

یعنی حاصل‌ضرب اعداد دنباله‌ی هندسی با حاصل‌جمع اعداد دنباله‌ی حسابی متناظر است. حال حاصل‌ضرب چند عدد دیگر را درنظر می‌گیریم و نتیجه را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۱: برای پیدا کردن حاصل‌ضرب ۱۲۸ . ۸، اعداد متناظر ۸ و ۱۲۸ را در سطر اوّل پیدا می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، ۳ متناظر با ۸ و ۷ متناظر با ۱۲۸ است و

۸ . ۱۲۸ = ۱۰۲۴

که ۱۰۲۴ با عدد ۱۰ در دنباله‌ی اوّلی متناظر است. دقّت کنید که ۱۰ همان ۷+۳ است. حال نتایج به‌دست آمده را کلّی‌تر بیان می‌کنیم.

ضرب در دنباله‌ی دوّم با جمع در دنباله‌ی اوّل متناظر است.

با توجه به آنچه گذشت، می‌بینیم که اگر نخواهیم **ضرب** کنیم، می‌توانیم به جای آن با استفاده از دنباله‌ی سطر اوّل **جمع** کنیم. اعداد دنباله‌ی حسابی ردیف اوّل، **لگاریتم** اعداد نظیرشان در دنباله‌ی ردیف دوم هستند.

جدول (۳)

لگاریتم: x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
اعداد: y	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	...

اعداد دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت توان‌هایی از ۲ بنویسیم :

لگاریتم: x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
اعداد : y	$۲^{۰}$	$۲^{۱}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$	$۲^{۴}$	$۲^{۵}$	$۲^{۶}$	$۲^{۷}$	$۲^{۸}$	$۲^{۹}$	$۲^{۱۰}$	

در واقع اعداد دنباله‌ی هندسی بالا، برابر با ۲ به توان‌های اعداد دنباله‌ی حسابی فوق هستند، یعنی

$$\boxed{y = ۲^{x} \; . \quad x = \log_{۲} y}$$

و یا به بیانی دیگر، جمله‌های دنباله‌ی حسابی، **لگاریتم** جمله‌های متناظر خود در دنباله‌ی توان‌های دو (هندسی) هستند. یعنی y نماینده‌ی عدد در دنباله‌ی هندسی و x معرف لگاریتم آن در مبنای ۲ است.

مثال ۲ :

اعداد	۱۶	×	۳۲	=	۵۱۲
	۲×۲×۲×۲	×	۲×۲×۲×۲×۲	=	۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲
لگاریتم	۴	+	۵	=	۹

فعالیت ۳ــ۱

با استفاده از ماشین حساب، جدول لگاریتم در مبنای ۲ را تا $۲^{۲۶}$ ادامه دهید. سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید :

حاصل‌ضرب‌های زیر را با مراجعه به جدول پیدا کنید. یک **رابطه‌ی جمع** نشان دهید که حاصل را بدون ضرب کردن به‌دست دهد.

الف) ۱۲۸×۲۵۶ ؛

ب) ۱۰۲۴×۲۰۴۸ ؛

پ) ۳۲×۱۳۱۰۷۲ ؛

ت) $۱۶ \times ۵۱۲ \times ۴۰۹۶$ ؛

از لگاریتم‌ها می‌توان برای به توان رساندن اعداد نیز استفاده کرد.

مثال ۳: باز هم دنباله‌ی توان‌های ۲ را درنظر بگیرید و به نمونه زیر توجّه کنید :

اعداد : $۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ = (۳۲)^{۴} = ۱۰۴۸۵۷۶$

. . . . . .

لگاریتم : $۵ + ۵ + ۵ + ۵ = ۴ \times ۵ = ۲۰$

تمرین ۱: با استفاده از روش فوق و جدولی که خود تهیه کرده‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $(۲۵۶)^{۳}$ ؛

ب) $(۶۴)^{۵}$ ؛

پ) (۱۰۲۴) ؛

لگاریتم y در پایه‌ی ۲ عددی است که باید ۲ را به آن توان برسانیم تا y حاصل شود. یعنی تساوی یا معادله‌ی توانی را می‌توان به کمک لگاریتم تغییر شکل داد.

مثال ۴ : اگر $۳۲ = ۲^{x}$، مقدار x را با توجه به تعریف لگاریتم پیدا کنید.

حل: با توجه به تعریف لگاریتم،

$$۲^{x} = ۳۲ . \quad x = \log_{۲} ۳۲$$

با مراجعه به جدول (۳)، مقدار x برابر با ۵ است. در واقع،

$$۲^{x} = ۲^{۵}$$

و چون پایه‌ها مساوی هستند پس نماها باهم برابرند یعنی $x = ۵$.

جدول (۳) را می‌توان برای توان‌های هر عدد دیگری تهیه کرد و لگاریتم اعداد را در مبناها (پایه‌های) مختلف حساب نمود. جدول (۴) لگاریتم اعداد در مبنای ۵ را نشان می‌دهد :

جدول (۴)

x :لگاریتم	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
y : اعداد	۱	۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵	۳۱۲۵	...

اعداد دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت توان‌هایی از ۵ بنویسیم :

x :لگاریتم	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
y : اعداد	$۵^{۰}$	$۵^{۱}$	$۵^{۲}$	$۵^{۳}$	$۵^{۴}$	$۵^{۵}$	...

که اعداد دنباله‌ی هندسی بالا، برابر با ۵ به توان‌های اعداد دنباله‌ی حسابی فوق هستند یعنی

$\boxed{y = ۵^{x} \; . \quad x = \log_{۵} y}$

مثال ۵: با توجّه به جدول (۴)، $۵^{۳} = ۱۲۵$ که معادل است با :

$\log_{۵} ۱۲۵ = ۳$

به طور کلّی، لگاریتم y در پایه‌ی b ، عددی است که b باید به توان آن عدد برسد تا y حاصل شود :

$log_b y = x \; . \quad b^{x} = y \quad ; \quad y > ۰ \quad , \quad b > ۰ \quad , \quad b \quad ۱$

تمرین

۱ــ تساوی‌های نمایی (توانی) را با استفاده از تعریف لگاریتم تغییر شکل دهید.

الف) $۱۱^{۲} = ۱۲۱$ ب) $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

پ) $۵^{x} = ۶۲۵$ ت) $۰/۵^{y} = ۰/۲۵$

ث) $۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۱$ ج) $a^{y} = ۱۰۰۰$

چ) $p^{r} = q$ ح) $۷^{۳} = ۳۴۳$

خ) $۸^{x} = ۴۰۹۶$

۲ــ تساوی‌های زیر را به شکل نمایی (توانی) تبدیل کنید.

الف) $۳ = \log_{۶} ۲۱۶$ ب) $۰ = \log_{۹} ۱$

پ) $-۲ = \log_{۱۰} ۰/۰۱$ ت) $y = \log_{۲} ۸$

ث) $۵ = \log_{۵} ۳۱۲۵$ ج) $y = \log_{b} a$

۳ ــ پایه‌ی (مبنا) لگاریتم‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $\log_{\square} ۸ = ۳$ ب) $\log_{\square} ۳۶ = ۲$

پ) $\log_{\square} ۰/۱ = -۱$ ت) $\log_{\square} ۰/۲۵ = -۲$

ث) $\log_{\square} ۱۰ = ۱$ ج) $\log_{\square} ۱ = ۰$

۴ــ عددی را که لگاریتم آن داده شده است، پیدا کنید.

الف) $\log_{۱۶} \square = ۲$ ب) $\log_{۴} \square = ۴$

پ) $\log_{۳} \square = -۱$ ت) $\log_{۱۰} \square = ۹$

ث) $\log_{۱۱} \square = ۳$ ج) $\log_{۵} \square = ۴$

۵ــ تساوی نمایی معادله‌های زیر را بنویسید و سپس مقدار y را تعیین کنید.

الف) $y = \log_{۲} ۶۴$ ب) $y = \log_{۲۵} ۶۲۵$

پ) $y = \log_{۱۰} ۱۰۰۰۰$ ت) $y = \log_{۳} ۸۱$

۶ــ هریک از لگاریتم‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\log_{۲} ۲۵۶ = \square$ ب) $\log_{۱۳} ۱۶۹ = \square$

پ) $\log_{۱۰} ۱ = \square$ ت) $\log_{۹} ۵۹۰۴۹ = \square$

ث) $\log_{۷} ۳۴۳ = \square$ ج) $\log_{۳} ۲۴۳ = \square$

۳ــ۲ــ لگاریتم اعشاری

با توجّه به این که دستگاه شمارش ما دهدهی (اعشاری) است، جدول لگاریتم در مبنای ۱۰ بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نتیجه تکیه این بخش بر لگاریتم اعشاری است.

لگاریتم: x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
اعداد: y	$۱۰^{۰}$	$۱۰^{۱}$	$۱۰^{۲}$	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۸}$	$۱۰^{۹}$	$۱۰^{۱۰}$	...

که رابطه‌ی $y = ۱۰^{x}$ با توجه به این دو دنباله نوشته می‌شود.

y معرّف یک عدد و x معرف لگاریتم اعشاری (لگاریتم در مبنای ۱۰) آن است. بین لگاریتم در مبنای ۱۰ و دستگاه شمارش اعشاری ارتباط صریحی وجود دارد. مثلاً لگاریتم ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ برابر با ۹ است زیرا $۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ = ۱۰^{۹}$ در ضمن، می‌دانیم که تعداد صفرهای حاصل‌ضرب دو

عددی که به صورت توان‌های ده هستند برابر تعداد صفرهای دو عدد است و نیاز به استفاده از لگاریتم‌ها برای محاسبه‌ی چنین حاصل‌ضرب‌هایی نیست. با این حال ارزش جدول بالا وقتی بارز می‌شود که اعداد، توان‌های صحیح ده نباشند. در این صورت، باید بتوانیم فاصله‌های خالی اعداد از $۱۰^{۰}$ تا $۱۰^{۱}$ را در ردیف سوم جدول (۵) پر کنیم.

جدول (۵)

لگاریتم: x	۰	□	□	□	□	□	□	□	□	۱
اعداد: y	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
اعداد: y	$۱۰^{۰}$	$۱۰^{?}$	$۱۰^{?}$	$۱۰^{?}$	$۱۰^{?}$	$۱۰^{?}$	$۱۰^{?}$	$۱۰^{?}$	$۱۰^{?}$	$۱۰^{۱}$

با توجه به تعریف، لگاریتم‌های توان‌های صحیح ۱۰ همان توان‌های صحیح ۱۰ هستند. در نتیجه با توجّه به روش نوشتن اعداد به صورت نماد علمی یعنی $a\times ۱۰^{n}$ با شرط ۱۰ . a . ۱، فقط به لگاریتم‌های اعداد بین ۱ و ۱۰ نیاز داریم که این اعداد، همان توان‌های کسری ۱۰ هستند.

۳ــ۲ــ ۱ــ روشی برای رسیدن به لگاریتم اعشاری: یک الگوریتم

۱ــ یک عدد کوچک مثلاً [1] را انتخاب می‌کنیم که از یک بزرگ‌تر باشد اما نه خیلی بزرگ‌تر! و لیستی از توان‌های آن تهیّه می‌کنیم:

$$^{۱},\ ^{۲},\ ^{۳},\ \dots,\ ^{۲۴},\ ^{۲۵},\ \dots$$

اگر بخواهیم دو عدد a و b را درهم ضرب کنیم، هر کدام از آن‌ها را با یکی از توان‌های تقریب می‌زنیم. (. نماد تقریباً است)

مثال ۶: اگر $a\ .\ ^{۱۷}$ و $b\ .\ ^{۸}$، آنگاه

$$a.b\ .\ ^{۱۷}\times .\ ^{۸} = .\ ^{۱۷+۸} = .\ ^{۲۵},$$

که می‌توانیم برای پیدا کردن آن، به لیستی که تهیه کرده‌ایم، مراجعه کنیم.

مثال ۷ : با توجه به مقادیر a و b در مثال ۶ $\frac{a}{b}$ را پیدا می‌کنیم

$$\frac{a}{b}\ .\ \frac{^{۱۷}}{^{۸}} = .\ ^{۱۷-۸} = .\ ^{۹}$$

۱ــ اولین حرف الفبای یونانی که آلفا تلفظ می‌شود.

مثال ۸: با توجه به مقدار a در مثال ۶، $a^{۲۰}$ را به‌دست می‌آوریم

$a^{۲۰}\ .\ (.\ ^{۱۷})^{۲۰} = .\ ^{۳۴۰}$

۲ــ برای هماهنگی این ایده با نماد معمولی اعشار، . را یک توان کسری از ۱۰ انتخاب می‌کنیم.

مثال ۹: . را $۱۰^{\frac{۱}{۳۲}}$ انتخاب می‌کنیم (چرا؟). پس فقط به لیستی شامل $.,^{۲}.,^{۳}.,\ ...\ ,^{۳۱}$. نیاز داریم، زیرا $۱۰ = ^{۳۲}$. و ضرب اعداد در ۱۰ و یا تقسیم آن‌ها بر ۱۰ تنها با اضافه یا کم کردن صفر و یا حرکت دادن ممیّز اعشاری انجام می‌گیرد. به عنوان مثال، $۳۰۰۰ = ۳۰۰ \times ۱۰$، $۳۰ = ۳۰۰ .\ ۱۰$ و $۰/۳ = ۳۰۰ .\ ۱۰۰۰$.

با این کار، می‌توانیم فاصله‌ی خالی بین $۱۰^{۰}$ و $۱۰^{۱}$ را در جدول (۵) پُر کنیم.

فعالیت ۳ ــ ۲

$$.\ ^{۳۲} = (۱۰^{\frac{۱}{۳۲}})^{۳۲} = ?$$

و

$$.\ ^{۱۶} = (۱۰^{\frac{۱}{۳۲}})^{۱۶} = ?$$

۳ ــ برای به‌دست آوردن اعدادی که بین نقاط به‌دست آمده توسط خودمان قرار می‌گیرند، یا از ماشین حساب معمولی استفاده می‌کنیم و یا مقدار تقریبی آن‌ها را از روی نمودار به‌دست می‌آوریم. عدد ۱۰ را در ماشین حساب وارد می‌کنیم و سپس با پنج بار فشار دادن دکمه‌ی $\boxed{\sqrt{\ }}$ ، $۱۰^{\frac{۱}{۳۲}}$ را پیدا می‌کنیم زیرا

$$\sqrt{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۲}} = ۳/۱۶۲$$

$$\sqrt{\sqrt{۱۰}} = \left(۱۰^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰^{\frac{۱}{۴}} \quad \text{یا} \quad \sqrt{۱۰^{\frac{۱}{۲}}} = ۱۰^{\frac{۱}{۴}} = ۱/۷۷۸$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{۱۰}}} = \left(\left(۱۰^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ?$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{۱۰}}}} = \left(\left(\left(۱۰^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ?$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{۱۰}}}}} = \left(\left(\left(\left(۱۰^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ?$$

با این اطلاعات، منحنی را رسم می‌کنیم. سپس با توجه به مقدار توان‌های کسری ۱۰، مقادیر $۱۰^{\frac{۲}{۳۲}}$, $۱۰^{\frac{۳}{۳۲}}$, ... , $۱۰^{\frac{۳۱}{۳۲}}$، یعنی توان‌های ۲ . تا ۳۲ . را به‌وسیله‌ی ماشین حساب به‌دست می‌آوریم. برای خلاصه‌نویسی، توان‌های . را n می‌نامیم و برای ۳۲ . n . ۰ جدول را تا سه رقم اعشار تکمیل می‌کنیم.

جدول (۶)

$\log: \frac{n}{۳۲}$	$n = ۱۰^{\frac{n}{۳۲}}$	$\log: \frac{n}{۳۲}$	$n = ۱۰^{\frac{n}{۳۲}}$	$\log: \frac{n}{۳۲}$	$a^n = ۱۰^{\frac{n}{۳۲}}$
$\frac{۱}{۳۲} = ۰/۰۳۱۲$	۱/۰۷۴	$\frac{۱۲}{۳۲} = ۰/۳۷۵$	۲/۳۷۱	$\frac{۲۳}{۳۲} = ۰/۷۱۸$	۵/۲۲۴
$\frac{۲}{۳۲} = ۰/۰۶۲۵$	۱/۱۵۴	$\frac{۱۳}{۳۲} = ۰/۴۰۶$	۲/۵۴۶	$\frac{۲۴}{۳۲} = ۰/۷۵۰$	۵/۶۲۳
					۶
$\frac{۳}{۳۲} = ۰/۰۹۳۷$	۱/۲۴۰	$\frac{۱۴}{۳۲} = ۰/۴۳۷$	۲/۷۳۵	$\frac{۲۵}{۳۲} = ۰/۷۸۱$	۶/۰۳۹
$\frac{۴}{۳۲} = ۰/۱۲۵$	۱/۳۳۳	$\frac{۱۵}{۳۲} = ۰/۴۶۸$	۲/۹۳۷	$\frac{۲۶}{۳۲} = ۰/۸۱۲$	۶/۴۸۶
			۳		
$\frac{۵}{۳۲} = ۰/۱۵۶$	۱/۴۳۲	$\frac{۱۶}{۳۲} = ۰/۵۰۰$	۳/۱۶۲	$\frac{۲۷}{۳۲} = ۰/۸۴۳$	۶/۹۶۶
					۷
$\frac{۶}{۳۲} = ۰/۱۸۷$	۱/۵۳۸	$\frac{۱۷}{۳۲} = ۰/۵۳۱$	۳/۳۹۶	$\frac{۲۸}{۳۲} = ۰/۸۷۵$	۷/۴۹۸
					۸
$\frac{۷}{۳۲} = ۰/۲۱۸$	۱/۶۵۲	$\frac{۱۸}{۳۲} = ۰/۵۶۲$	۳/۶۵۶	$\frac{۲۹}{۳۲} = ۰/۹۰۶$	۸/۰۵۳
$\frac{۸}{۳۲} = ۰/۲۵۰$	۱/۷۷۸	$\frac{۱۹}{۳۲} = ۰/۵۹۳$	۳/۹۱۷	$\frac{۳۰}{۳۲} = ۰/۹۳۷$	۸/۶۴۹
			۴		۹
$\frac{۹}{۳۲} = ۰/۲۸۱$	۱/۹۱۰	$\frac{۲۰}{۳۲} = ۰/۶۲۵$	۴/۲۱۷	$\frac{۳۱}{۳۲} = ۰/۹۶۸$	۹/۲۹۰
۰/۳۰۱	۲				
$\frac{۱۰}{۳۲} = ۰/۳۱۲$	۲/۰۵۱	$\frac{۲۱}{۳۲} = ۰/۶۵۶$	۴/۵۲۹	$\frac{۳۲}{۳۲} = ۱$	۱۰/۰۰۰
$\frac{۱۱}{۳۲} = ۰/۳۴۳$	۲/۲۰۳	$\frac{۲۲}{۳۲} = ۰/۶۸۷$	۴/۸۶۴		
			۵		
		۰. n . ۳۲			

$\frac{۹۶۵}{۳۲۰۰}$. ۰/۳۰۱ .

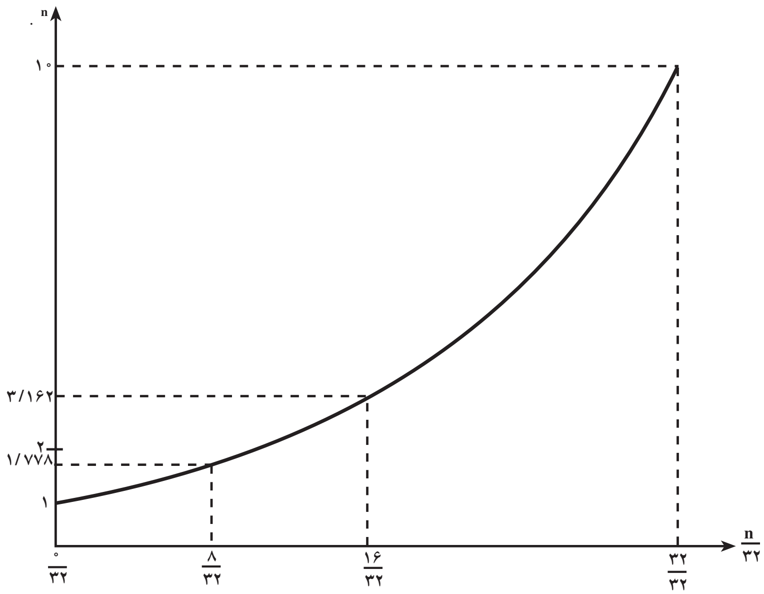
تمرین ۲: با توجه به جدول (۶)، درستی رابطه‌ی زیر را امتحان کنید :

$$\log(۲ \times ۳) = \log ۲ + \log ۳$$ [1]

با توجه به مقدارهای موجود در جدول (۶) نمودار زیر را رسم می‌کنیم.

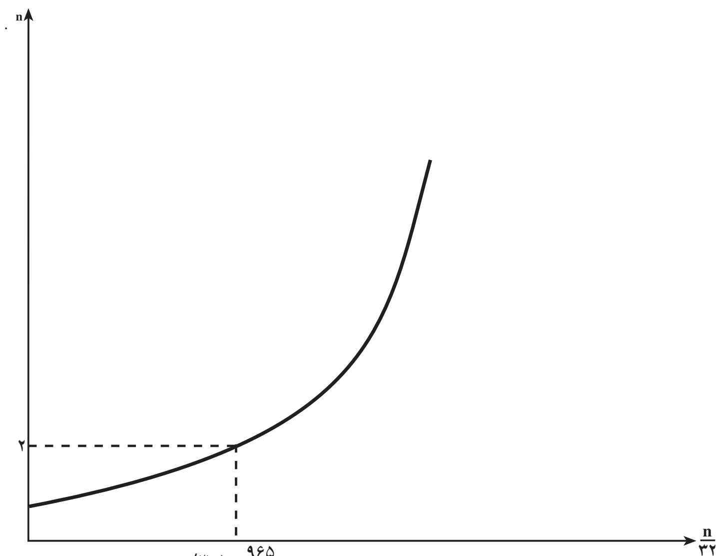
$$n = (۱۰^{\frac{۱}{۳۲}})^n = ۱۰^{\frac{n}{۳۲}} \quad , \quad ۰ . \quad . ۳۲$$

۱ــ قرارداد می‌کنیم که مبنای ۱۰ را ننویسیم.



مثال ۱۰: برای به‌دست آوردن لگاریتم۲، مقدار ۲ را روی محور y ها پیدا می‌کنیم. آنگاه خطی موازی محور افقی رسم می‌کنیم تا نمودار را قطع نماید. سپس از نقطه‌ی تلاقی خطی به موازات محور عمودی رسم می‌کنیم تا محور x ها یعنی محور لگاریتم‌ها را در نقطه‌ای قطع کند.
نقطه تلاقی با محور xها همان لگاریتم ۲ یعنی $\frac{۹۶۵}{۳۲۰۰}$ است که برابر ۰/۳۰۱ است :

$$\log ۲ = ۰/۳۰۱$$



در واقع، در مثال ۱۰ با مراجعه به جدول (۶)، مقدار $\log ۲$ را با تقریب مطلوبی به دست آوردیم. یعنی، مقدار ۲ را در ستون ^{n} . جستجو کردیم. مقدار ۲ بین ۱/۹۱۱ و ۲/۰۵۳ و لگاریتم‌های معادل آن‌ها بین $\frac{۹}{۳۲}$ و $\frac{۱۰}{۳۲}$ بود. با این حال، چون ۲ نزدیک‌تر به ۲/۰۵۳ بود، در نتیجه مقدار لگاریتم آن نیز به $\frac{۱۰}{۳۲}$ نزدیک‌تر بود. با چند بار آزمایش کردن، تقریب خوبی برای لگاریتم ۲ که همان ۰/۳۰۱ است به دست آوردیم. به همین ترتیب لگاریتم‌های ۳ الی ۹ را نیز به دست می‌آوریم، یعنی اعداد ۲ تا ۹ را برحسب توان‌های کسری ۱۰ می‌نویسیم :

اعداد: y	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
اعداد: y	$۱۰^{۰}$	$۱۰^{۰/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۴۷۷}$	$۱۰^{۰/۶۰۲}$	$۱۰^{۰/۶۹۸}$	$۱۰^{۰/۷۷۸}$	$۱۰^{۰/۸۴۵}$	$۱۰^{۰/۹۰۳}$	$۱۰^{۰/۹۵۴}$
لگاریتم: x	۰	۰/۳۰۱	۰/۴۷۷	۰/۶۰۲	۰/۶۹۸	۰/۷۷۸	۰/۸۴۵	۰/۹۰۳	۰/۹۵۴

۳ـ۳ـ لگاریتم و نماد علمی

برتری لگاریتم اعشاری نسبت به لگاریتم در مبناهای مختلف ارتباط نزدیک آن با شیوه‌ی نوشتن اعداد به شکل نماد علمی است. جدول زیر با توجه به این ارتباط تهیّه شده است که در آن ۲ به صورت توان کسری ۱۰ یعنی $۱۰^{۰/۳۰۱}$ نوشته شده است.

جدول (۷)

لگاریتم تقریبی اعداد	اعداد به صورت توان‌های کسری ۱۰		اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به شکل اعشاری
۱/۳۰۱	$۱۰^{۱/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۳۰۱}\times۱۰^{۱}$	۲×۱۰^{۱}	۲۰
۲/۳۰۱	$۱۰^{۲/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۳۰۱}\times۱۰^{۲}$	۲×۱۰^{۲}	۲۰۰
۳/۳۰۱	$۱۰^{۳/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۳۰۱}\times۱۰^{۳}$	۲×۱۰^{۳}	۲۰۰۰
۴/۳۰۱	$۱۰^{۴/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۳۰۱}\times۱۰^{۴}$	۲×۱۰^{۴}	۲۰۰۰۰

در صورت استفاده از ماشین حساب به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

نمایش‌دهنده		ترتیب عملیات
۴/۳۰۱	log	۲۰۰۰۰

فعالیت ۳ــ۳

الف ــ با توجّه به صفحه‌قبل، لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

۱ــ ۲,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

۲ــ ۲×۱۰^{۱۷}

جدول (۸)

لگاریتم اعداد	اعداد به صورت توان‌های کسری ۱۰		اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به شکل اعشاری
۴/۶۹۹	$۱۰^{۴/۶۹۹}$	$۱۰^{۰/۶۹۹}\times۱۰^{۴}$	۵×۱۰^{۴}	۵۰,۰۰۰
۵/۶۹۹	$۱۰^{۵/۶۹۹}$	$۱۰^{۰/۶۹۹}\times۱۰^{۵}$	۵×۱۰^{۵}	۵۰۰,۰۰۰
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	۵,۰۰۰,۰۰۰
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	۵۰,۰۰۰,۰۰۰

ب ــ با توجه به جدول (۸) به قسمت‌های ۱، ۲ و ۳ پاسخ دهید :

۱ــ جدول (۸) را کامل کنید ؛

۲ــ چه عددی دارای لگاریتم ۱۷/۶۹۹ است؟

۳ــ چه عددی دارای لگاریتم ۲۸/۶۹۹ است؟

تمرین ۳: جدول (۹) را یا با مراجعه به جدول (۶) یا مستقیماً به وسیله‌ی ماشین‌حساب کامل کنید :

اگر لگاریتم عدد را داشته باشیم و بخواهیم خود عدد را به وسیله‌ی ماشین‌حساب پیدا کنیم، به ترتیب زیر عمل می‌نماییم :

نمایش	ترتیب عملیات
۷/۹۹۸	log INV[1] ۰/۹۰۳

۱ــ Inverse به معنای معکوس تابع است.

در بعضی ماشین‌حساب‌ها، به جای دکمه‌ی INV از دکمه‌ی $\boxed{\text{2ndF}}$ استفاده می‌کنند.

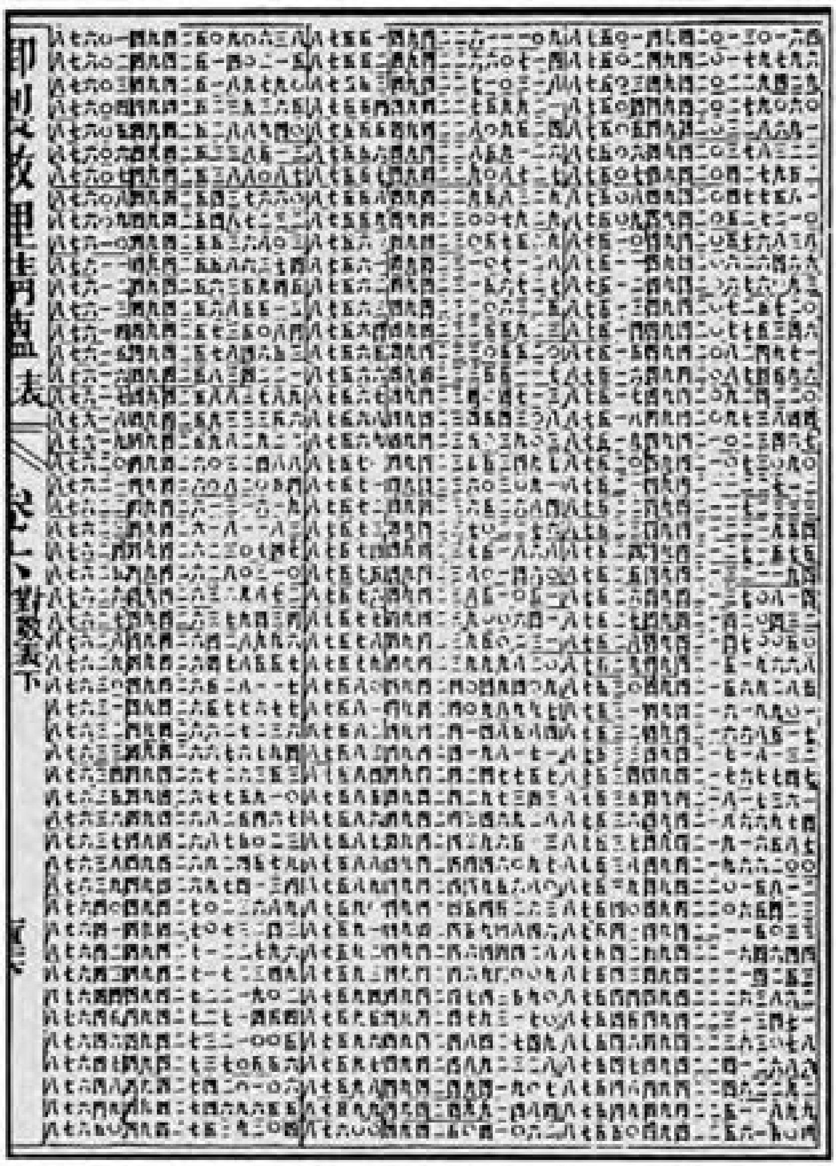
جدول (۹)

لگاریتم اعداد	اعداد به صورت توان‌های کسری ۱۰		اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به شکل اعشاری
۵/۰۸۲	$۱۰^{۵/۰۸۲}$	$۱۰^{۰/۰۸۲}\times۱۰^{۵}$	$۱/۲۱\times۱۰^{۵}$	۱۲۱,۰۰۰
□	□	□	□	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
۱/۵۴۴	$۱۰^{۱/۵۴۴}$	$۱۰^{۰/۵۴۴}\times۱۰^{۱}$	$۳/۵\times۱۰^{۱}$	□
□	$۱۰^{۰/۶۰۲}$	$۱۰^{۰/۶۰۲}\times۱۰^{۰}$	۴×۱۰^{۰}	□
۲/۹۰۳	□	□	□	□
۲۳/۷۷۸	$۱۰^{۲۳/۷۷۸}$	$۱۰^{۰/۷۷۸}\times۱۰^{۲۳}$	* $۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}$	□

* این عدد به نام عدد آواگادرو معروف است که در شیمی استفاده‌ی زیادی دارد. عدد آواگادرو تعداد مولکول‌ها در ۱۸ گرم آب یا یک مولکول از هر ماده است.

با توجّه به مثال‌ها و تمرین‌های بالا، دیدیم که با وجود نماد علمی و با به‌دست آوردن توان‌های اعشاری ۱۰ یعنی با پرکردن فاصله‌ی بین $۱۰^{۰}$ تا $۱۰^{۱}$ جدول (۶) می‌توانیم لگاریتم تمام اعداد را به‌دست آوریم. قسمت صحیح لگاریتم، توان‌های ده اعدادی هستند که به شکل نماد علمی نوشته شده‌اند. قسمت کسری لگاریتم را می‌توان با مراجعه به جدول (که طریق به‌دست آوردن آن را دیدیم) پیدا کنیم. در ضمن چون قسمت غیرتوانیِ نماد علمی همیشه کمتر از ۱۰ است، در نتیجه به جدول لگاریتم برای اعداد بزرگ‌تر از ۱۰ نیازی نداریم.

۳ـ۴ـ محاسبه با لگاریتم



ریاضیدان انگلیسی قرن هفدهم، هنری‌بریگز[1] مبنای اعشاری را برای لگاریتم پیشنهاد داد و اولین جدول لگاریتم اعشاری را تهیّه کرد. پس از آن، امپراطور چین در سال ۱۷۱۳ دستور داد که کتابی را بر چوب حک کرده، منتشر کنند که در آن کتاب لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ با دست حکّ شده بود.

۱ـ Henry Briggs

جدول (۱۰) ــ لگاریتم اعشاری اعداد از یک تا هزار با چهار رقم اعشار

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	D
۱۰	۰۰۰۰	۰۰۴۳	۰۰۸۶	۰۱۲۸	۰۱۷۰	۰۲۱۲	۰۲۵۳	۰۲۹۴	۰۳۳۴	۰۳۷۴	۴۰
۱۱	۰۴۱۴	۰۴۵۳	۰۴۹۲	۰۵۳۱	۰۵۶۹	۰۶۰۷	۰۶۴۵	۰۶۸۲	۰۷۱۹	۰۷۵۵	۳۷
۱۲	۰۷۹۲	۰۸۲۸	۰۸۶۴	۰۸۹۹	۰۹۳۴	۰۹۶۹	۱۰۰۴	۱۰۳۸	۱۰۷۲	۱۱۰۶	۳۴
۱۳	۱۱۳۹	۱۱۷۳	۱۲۰۶	۱۲۳۹	۱۲۷۱	۱۳۰۳	۱۳۳۵	۱۳۶۷	۱۳۹۹	۱۴۳۰	۳۲
۱۴	۱۴۶۱	۱۴۹۲	۱۵۲۳	۱۵۵۳	۱۵۸۴	۱۶۱۴	۱۶۴۴	۱۶۷۳	۱۷۰۳	۱۷۳۲	۲۹
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۵	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴	۲۸
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸	۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹	۲۶
۱۷	۲۳۰۴	۲۳۳۰	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰	۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۹	۲۵
۱۸	۲۵۵۳	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۵	۲۶۴۸	۲۶۷۲	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵	۲۳
۱۹	۲۷۸۸	۲۸۱۰	۲۸۳۳	۲۸۵۶	۲۸۷۸	۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۸۹	۲۲
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۳۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱	۲۱
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۳	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۵	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴	۲۰
۲۲	۳۴۲۴	۳۴۴۴	۳۴۶۴	۳۴۸۳	۳۵۰۲	۳۵۲۲	۳۵۴۱	۳۵۶۰	۳۵۷۹	۳۵۹۸	۱۹
۲۳	۳۶۱۷	۳۶۳۶	۳۶۵۵	۳۶۷۴	۳۶۹۲	۳۷۱۱	۳۷۲۹	۳۷۴۷	۳۷۶۶	۳۷۸۴	۱۸
۲۴	۳۸۰۲	۳۸۲۰	۳۸۳۸	۳۸۵۶	۳۸۷۴	۳۸۹۲	۳۹۰۹	۳۹۲۷	۳۹۴۵	۳۹۶۲	۱۸
۲۵	۳۹۷۹	۳۹۹۷	۴۰۱۴	۴۰۳۱	۴۰۴۸	۴۰۶۵	۴۰۸۲	۴۰۹۹	۴۱۱۶	۴۱۳۳	۱۷
۲۶	۴۱۵۰	۴۱۶۶	۴۱۸۳	۴۲۰۰	۴۲۱۶	۴۲۳۲	۴۲۴۹	۴۲۶۵	۴۲۸۱	۴۲۹۸	۱۶
۲۷	۴۳۱۴	۴۳۳۰	۴۳۴۶	۴۳۶۲	۴۳۷۸	۴۳۹۳	۴۴۰۹	۴۴۲۵	۴۴۴۰	۴۴۵۶	۱۶
۲۸	۴۴۷۲	۴۴۸۷	۴۵۰۲	۴۵۱۸	۴۵۳۳	۴۵۴۸	۴۵۶۴	۴۵۷۹	۴۵۹۴	۴۶۰۹	۱۵
۲۹	۴۶۲۴	۴۶۳۹	۴۶۵۴	۴۶۶۹	۴۶۸۳	۴۶۹۸	۴۷۱۳	۴۷۲۸	۴۷۴۲	۴۷۵۷	۱۵
۳۰	۴۷۷۱	۴۷۸۶	۴۸۰۰	۴۸۱۴	۴۸۲۹	۴۸۴۳	۴۸۵۷	۴۸۷۱	۴۸۸۶	۴۹۰۰	۱۴
۳۱	۴۹۱۴	۴۹۲۸	۴۹۴۲	۴۹۵۵	۴۹۶۹	۴۹۸۳	۴۹۹۷	۵۰۱۱	۵۰۲۴	۵۰۳۸	۱۴
۳۲	۵۰۵۱	۵۰۶۵	۵۰۷۹	۵۰۹۲	۵۱۰۵	۵۱۱۹	۵۱۳۲	۵۱۴۵	۵۱۵۹	۵۱۷۲	۱۳
۳۳	۵۱۸۵	۵۱۹۸	۵۲۱۱	۵۲۲۴	۵۲۳۷	۵۲۵۰	۵۲۶۳	۵۲۷۶	۵۲۸۹	۵۳۰۲	۱۳
۳۴	۵۳۱۵	۵۳۲۸	۵۳۴۰	۵۳۵۳	۵۳۶۶	۵۳۷۸	۵۳۹۱	۵۴۰۳	۵۴۱۶	۵۴۲۸	۱۳
۳۵	۵۴۴۱	۵۴۵۳	۵۴۶۵	۵۴۷۸	۵۴۹۰	۵۵۰۲	۵۵۱۴	۵۵۲۷	۵۵۳۹	۵۵۵۱	۱۲
۳۶	۵۵۶۳	۵۵۷۵	۵۵۸۷	۵۵۹۹	۵۶۱۱	۵۶۲۳	۵۶۳۵	۵۶۴۷	۵۶۵۸	۵۶۷۰	۱۲
۳۷	۵۶۸۲	۵۶۹۴	۵۷۰۵	۵۷۱۷	۵۷۲۹	۵۷۴۰	۵۷۵۲	۵۷۶۳	۵۷۷۵	۵۷۸۶	۱۲
۳۸	۵۷۹۸	۵۸۰۹	۵۸۲۱	۵۸۳۲	۵۸۴۳	۵۸۵۵	۵۸۶۶	۵۸۷۷	۵۸۸۸	۵۸۹۹	۱۱
۳۹	۵۹۱۱	۵۹۲۲	۵۹۳۳	۵۹۴۴	۵۹۵۵	۵۹۶۶	۵۹۷۷	۵۹۸۸	۵۹۹۹	۶۰۱۰	۱۱
۴۰	۶۰۲۱	۶۰۳۱	۶۰۴۲	۶۰۵۳	۶۰۶۴	۶۰۷۵	۶۰۸۵	۶۰۹۶	۶۱۰۷	۶۱۱۷	۱۱
۴۱	۶۱۲۸	۶۱۳۸	۶۱۴۹	۶۱۶۰	۶۱۷۰	۶۱۸۰	۶۱۹۱	۶۲۰۱	۶۲۱۲	۶۲۲۲	۱۰
۴۲	۶۲۳۲	۶۲۴۳	۶۲۵۳	۶۲۶۳	۶۲۷۴	۶۲۸۴	۶۲۹۴	۶۳۰۴	۶۳۱۴	۶۳۲۵	۱۰
۴۳	۶۳۳۵	۶۳۴۵	۶۳۵۵	۶۳۶۵	۶۳۷۵	۶۳۸۵	۶۳۹۵	۶۴۰۵	۶۴۱۵	۶۴۲۵	۱۰
۴۴	۶۴۳۵	۶۴۴۴	۶۴۵۴	۶۴۶۴	۶۴۷۴	۶۴۸۴	۶۴۹۳	۶۵۰۳	۶۵۱۳	۶۵۲۲	۱۰
۴۵	۶۵۳۲	۶۵۴۲	۶۵۵۱	۶۵۶۱	۶۵۷۱	۶۵۸۰	۶۵۹۰	۶۵۹۹	۶۶۰۹	۶۶۱۸	۱۰
۴۶	۶۶۲۸	۶۶۳۷	۶۶۴۶	۶۶۵۶	۶۶۶۵	۶۶۷۵	۶۶۸۴	۶۶۹۳	۶۷۰۲	۶۷۱۲	۹
۴۷	۶۷۲۱	۶۷۳۰	۶۷۳۹	۶۷۴۹	۶۷۵۸	۶۷۶۷	۶۷۷۶	۶۷۸۵	۶۷۹۴	۶۸۰۳	۹
۴۸	۶۸۱۲	۶۸۲۱	۶۸۳۰	۶۸۳۹	۶۸۴۸	۶۸۵۷	۶۸۶۶	۶۸۷۵	۶۸۸۴	۶۸۹۳	۹
۴۹	۶۹۰۲	۶۹۱۱	۶۹۲۰	۶۹۲۸	۶۹۳۷	۶۹۴۶	۶۹۵۵	۶۹۶۴	۶۹۷۲	۶۹۸۱	۹
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷	۹
۵۱	۷۰۷۶	۷۰۸۴	۷۰۹۳	۷۱۰۱	۷۱۱۰	۷۱۱۸	۷۱۲۶	۷۱۳۵	۷۱۴۳	۷۱۵۲	۸
۵۲	۷۱۶۰	۷۱۶۸	۷۱۷۷	۷۱۸۵	۷۱۹۳	۷۲۰۲	۷۲۱۰	۷۲۱۸	۷۲۲۶	۷۲۳۵	۸
۵۳	۷۲۴۳	۷۲۵۱	۷۲۵۹	۷۲۶۷	۷۲۷۵	۷۲۸۴	۷۲۹۲	۷۳۰۰	۷۳۰۸	۷۳۱۶	۸
۵۴	۷۳۲۴	۷۳۳۲	۷۳۴۰	۷۳۴۸	۷۳۵۶	۷۳۶۴	۷۳۷۲	۷۳۸۰	۷۳۸۸	۷۳۹۶	۸

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	D
۵۵	۷۴۰۴	۷۴۱۲	۷۴۱۹	۷۴۲۷	۷۴۳۵	۷۴۴۳	۷۴۵۱	۷۴۵۹	۷۴۶۶	۷۴۷۴	۸
۵۶	۷۴۸۲	۷۴۹۰	۷۴۹۷	۷۵۰۵	۷۵۱۳	۷۵۲۰	۷۵۲۸	۷۵۳۶	۷۵۴۳	۷۵۵۱	۸
۵۷	۷۵۵۹	۷۵۶۶	۷۵۷۴	۷۵۸۲	۷۵۸۹	۷۵۹۷	۷۶۰۴	۷۶۱۲	۷۶۱۹	۷۶۲۷	۸
۵۸	۷۶۳۴	۷۶۴۲	۷۶۴۹	۷۶۵۷	۷۶۶۴	۷۶۷۲	۷۶۷۹	۷۶۸۶	۷۶۹۴	۷۷۰۱	۷
۵۹	۷۷۰۹	۷۷۱۶	۷۷۲۳	۷۷۳۱	۷۷۳۸	۷۷۴۵	۷۷۵۲	۷۷۶۰	۷۷۶۷	۷۷۷۴	۷
۶۰	۷۷۸۲	۷۷۸۹	۷۷۹۶	۷۸۰۳	۷۸۱۰	۷۸۱۸	۷۸۲۵	۷۸۳۲	۷۸۳۹	۷۸۴۶	۷
۶۱	۷۸۵۳	۷۸۶۰	۷۸۶۸	۷۸۷۵	۷۸۸۲	۷۸۸۹	۷۸۹۶	۷۹۰۳	۷۹۱۰	۷۹۱۷	۷
۶۲	۷۹۲۴	۷۹۳۱	۷۹۳۸	۷۹۴۵	۷۹۵۲	۷۹۵۹	۷۹۶۶	۷۹۷۳	۷۹۸۰	۷۹۸۷	۷
۶۳	۷۹۹۳	۸۰۰۰	۸۰۰۷	۸۰۱۴	۸۰۲۱	۸۰۲۸	۸۰۳۵	۸۰۴۱	۸۰۴۸	۸۰۵۵	۷
۶۴	۸۰۶۲	۸۰۶۹	۸۰۷۵	۸۰۸۲	۸۰۸۹	۸۰۹۶	۸۱۰۲	۸۱۰۹	۸۱۱۶	۸۱۲۲	۷
۶۵	۸۱۲۹	۸۱۳۶	۸۱۴۲	۸۱۴۹	۸۱۵۶	۸۱۶۲	۸۱۶۹	۸۱۷۶	۸۱۸۲	۸۱۸۹	۷
۶۶	۸۱۹۵	۸۲۰۲	۸۲۰۹	۸۲۱۵	۸۲۲۲	۸۲۲۸	۸۲۳۵	۸۲۴۱	۸۲۴۸	۸۲۵۴	۷
۶۷	۸۲۶۱	۸۲۶۷	۸۲۷۴	۸۲۸۰	۸۲۸۷	۸۲۹۳	۸۲۹۹	۸۳۰۶	۸۳۱۲	۸۳۱۹	۶
۶۸	۸۳۲۵	۸۳۳۱	۸۳۳۸	۸۳۴۴	۸۳۵۱	۸۳۵۷	۸۳۶۳	۸۳۷۰	۸۳۷۶	۸۳۸۲	۶
۶۹	۸۳۸۸	۸۳۹۵	۸۴۰۱	۸۴۰۷	۸۴۱۴	۸۴۲۰	۸۴۲۶	۸۴۳۲	۸۴۳۹	۸۴۴۵	۶
۷۰	۸۴۵۱	۸۴۵۷	۸۴۶۳	۸۴۷۰	۸۴۷۶	۸۴۸۲	۸۴۸۸	۸۴۹۴	۸۵۰۰	۸۵۰۶	۶
۷۱	۸۵۱۳	۸۵۱۹	۸۵۲۵	۸۵۳۱	۸۵۳۷	۸۵۴۳	۸۵۴۹	۸۵۵۵	۸۵۶۱	۸۵۶۷	۶
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۲۱	۸۶۲۷	۶
۷۳	۸۶۳۳	۸۶۳۹	۸۶۴۵	۸۶۵۱	۸۶۵۷	۸۶۶۳	۸۶۶۹	۸۶۷۵	۸۶۸۱	۸۶۸۶	۶
۷۴	۸۶۹۲	۸۶۹۸	۸۷۰۴	۸۷۱۰	۸۷۱۶	۸۷۲۲	۸۷۲۷	۸۷۳۳	۸۷۳۹	۸۷۴۵	۶
۷۵	۸۷۵۱	۸۷۵۶	۸۷۶۲	۸۷۶۸	۸۷۷۴	۸۷۷۹	۸۷۸۵	۸۷۹۱	۸۷۹۷	۸۸۰۲	۶
۷۶	۸۸۰۸	۸۸۱۴	۸۸۲۰	۸۸۲۵	۸۸۳۱	۸۸۳۷	۸۸۴۲	۸۸۴۸	۸۸۵۴	۸۸۵۹	۶
۷۷	۸۸۶۵	۸۸۷۱	۸۸۷۶	۸۸۸۲	۸۸۸۷	۸۸۹۳	۸۸۹۹	۸۹۰۴	۸۹۱۰	۸۹۱۵	۶
۷۸	۸۹۲۱	۸۹۲۷	۸۹۳۲	۸۹۳۸	۸۹۴۳	۸۹۴۹	۸۹۵۴	۸۹۶۰	۸۹۶۵	۸۹۷۱	۶
۷۹	۸۹۷۶	۸۹۸۲	۸۹۸۷	۸۹۹۳	۸۹۹۸	۹۰۰۴	۹۰۰۹	۹۰۱۵	۹۰۲۰	۹۰۲۵	۶
۸۰	۹۰۳۱	۹۰۳۶	۹۰۴۲	۹۰۴۷	۹۰۵۳	۹۰۵۸	۹۰۶۳	۹۰۶۹	۹۰۷۴	۹۰۷۹	۵
۸۱	۹۰۸۵	۹۰۹۰	۹۰۹۶	۹۱۰۱	۹۱۰۶	۹۱۱۲	۹۱۱۷	۹۱۲۲	۹۱۲۸	۹۱۳۳	۵
۸۲	۹۱۳۸	۹۱۴۳	۹۱۴۹	۹۱۵۴	۹۱۵۹	۹۱۶۵	۹۱۷۰	۹۱۷۵	۹۱۸۰	۹۱۸۶	۵
۸۳	۹۱۹۱	۹۱۹۶	۹۲۰۱	۹۲۰۶	۹۲۱۲	۹۲۱۷	۹۲۲۲	۹۲۲۷	۹۲۳۲	۹۲۳۸	۵
۸۴	۹۲۴۳	۹۲۴۸	۹۲۵۳	۹۲۵۸	۹۲۶۳	۹۲۶۹	۹۲۷۴	۹۲۷۹	۹۲۸۴	۹۲۸۹	۵
۸۵	۹۲۹۴	۹۲۹۹	۹۳۰۴	۹۳۰۹	۹۳۱۵	۹۳۲۰	۹۳۲۵	۹۳۳۰	۹۳۳۵	۹۳۴۰	۵
۸۶	۹۳۴۵	۹۳۵۰	۹۳۵۵	۹۳۶۰	۹۳۶۵	۹۳۷۰	۹۳۷۵	۹۳۸۰	۹۳۸۵	۹۳۹۰	۵
۸۷	۹۳۹۵	۹۴۰۰	۹۴۰۵	۹۴۱۰	۹۴۱۵	۹۴۲۰	۹۴۲۵	۹۴۳۰	۹۴۳۵	۹۴۴۰	۵
۸۸	۹۴۴۵	۹۴۵۰	۹۴۵۵	۹۴۶۰	۹۴۶۵	۹۴۶۹	۹۴۷۴	۹۴۷۹	۹۴۸۴	۹۴۸۹	۵
۸۹	۹۴۹۴	۹۴۹۹	۹۵۰۴	۹۵۰۹	۹۵۱۳	۹۵۱۸	۹۵۲۳	۹۵۲۸	۹۵۳۳	۹۵۳۸	۵
۹۰	۹۵۴۲	۹۵۴۷	۹۵۵۲	۹۵۵۷	۹۵۶۲	۹۵۶۶	۹۵۷۱	۹۵۷۶	۹۵۸۱	۹۵۸۶	۵
۹۱	۹۵۹۰	۹۵۹۵	۹۶۰۰	۹۶۰۵	۹۶۰۹	۹۶۱۴	۹۶۱۹	۹۶۲۴	۹۶۲۸	۹۶۳۳	۵
۹۲	۹۶۳۸	۹۶۴۳	۹۶۴۷	۹۶۵۲	۹۶۵۷	۹۶۶۱	۹۶۶۶	۹۶۷۱	۹۶۷۵	۹۶۸۰	۵
۹۳	۹۶۸۵	۹۶۸۹	۹۶۹۴	۹۶۹۹	۹۷۰۳	۹۷۰۸	۹۷۱۳	۹۷۱۷	۹۷۲۲	۹۷۲۷	۵
۹۴	۹۷۳۱	۹۷۳۶	۹۷۴۱	۹۷۴۵	۹۷۵۰	۹۷۵۴	۹۷۵۹	۹۷۶۳	۹۷۶۸	۹۷۷۳	۵
۹۵	۹۷۷۷	۹۷۸۲	۹۷۸۶	۹۷۹۱	۹۷۹۵	۹۸۰۰	۹۸۰۵	۹۸۰۹	۹۸۱۴	۹۸۱۸	۵
۹۶	۹۸۲۳	۹۸۲۷	۹۸۳۲	۹۸۳۶	۹۸۴۱	۹۸۴۵	۹۸۵۰	۹۸۵۴	۹۸۵۹	۹۸۶۳	۵
۹۷	۹۸۶۸	۹۸۷۲	۹۸۷۷	۹۸۸۱	۹۸۸۶	۹۸۹۰	۹۸۹۴	۹۸۹۹	۹۹۰۳	۹۹۰۸	۴
۹۸	۹۹۱۲	۹۹۱۷	۹۹۲۱	۹۹۲۶	۹۹۳۰	۹۹۳۴	۹۹۳۹	۹۹۴۳	۹۹۴۸	۹۹۵۲	۴
۹۹	۹۹۵۶	۹۹۶۱	۹۹۶۵	۹۹۶۹	۹۹۷۴	۹۹۷۸	۹۹۸۳	۹۹۸۷	۹۹۹۱	۹۹۹۶	۴

۳ــ۵ــ اثبات روابط لگاریتمی

بنابر تعریف لگاریتم

$$10^x = y \; . \quad x = \log_{10} y$$

اثبات قضیه‌ی حاصل‌ضرب را قبلاً به‌طور تجربی در تمرین ۲ و در جدول‌های (۸) و (۹) دیدیم. حال با استفاده از تعریف لگاریتم که درستی آن را پذیرفته‌ایم، به‌وسیله‌ی استدلال استنتاجی، قضیه‌ی حاصل‌ضرب را به طور دقیق اثبات می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱: برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b،

$$\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b$$

اثبات: اگر $\log_{10} a = x_1$ و $\log_{10} b = x_2$ آنگاه :

$$a = 10^{x_1} \; (1) \quad \text{و} \quad b = 10^{x_2} \; (2)$$

از ضرب دو رابطه‌ی (۱) و (۲) به دست می‌آوریم :

$$ab = 10^{x_1} \times 10^{x_2} = 10^{x_1 + x_2}$$

با توجه به تعریف لگاریتم

$$\log_{10} ab = x_1 + x_2$$

از رابطه‌ی (۱) و (۲) مقادیر x_1 و x_2 را جایگزین می‌کنیم

$$\boxed{\log ab = \log a + \log b}$$

و حکم ثابت می‌شود.

قضیه‌ی ۲[1]**:** نشان دهید که برای $a . 0$ ، $\log a^n = n \log a$.

اثبات: این قضیه در واقع تعمیم قضیه‌ی ۱ است زیرا :

$$\log a^n = \log \underbrace{a.a.a.\dots.a}_{\text{بار } n} = \underbrace{\log a + \log a + \dots + \log a}_{\text{بار } n}$$

در نتیجه

$$\boxed{\log a^n = n \log a}$$

تمرین ۴: با استفاده از استقرای ریاضی، قضیه‌ی ۲ را اثبات کنید.

تمرین ۵: ثابت کنید برای هردو عدد حقیقی و مثبت a و b،

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

۱ــ این قضیه برای هر توان حقیقی برقرار است اما در این‌جا اثبات محدود به توان‌های صحیح مثبت است.

مثال ۱۰: با استفاده از قضیه‌ی ۱، مقدار $\log ۵+\log ۲۰$ را محاسبه می‌کنیم.

حل: $\log a+\log b=\log ab$

پس $\log ۵+\log ۲۰=\log ۵\times ۲۰=\log ۱۰۰=۲$

تمرین ۶ : به طور کلی، قضیه‌های ۱و ۲ برای لگاریتم در هر مبنایی درست است. دلیل درستی را بررسی کنید.

سه قضیه‌ی زیر، محاسبات با لگاریتم را آسان می‌کنند.

قضیه‌ی ۳: $\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b$

قضیه‌ی ۴: $\log_c a^n=n\log_c a$

قضیه‌ی ۵: $\log_c(\frac{a}{b})=\log_c a-\log_c b$

مثال ۱۱: با استفاده از سه قضیه‌ی فوق، رابطه‌ی $\log(\frac{x^۲y}{z})$ را تبدیل کنید.

حل:

طبق قضیه‌ی ۳ داریم

(۱) $\log(\frac{x^۲y}{z})=\log(x^۲y)-\log z$

طبق قضیه‌ی ۱

(۲) $\log(x^۲y)=\log x^۲+\log y$

طبق قضیه‌ی ۲

(۳) $\log x^۲=۲\log x$

با جایگزینی (۳) و (۲) در (۱) نتیجه می‌شود که

$$\log(\frac{x^۲y}{z})=۲\log x+\log y-\log z$$

مثال ۱۲: عبارت $\log(\sqrt[۳]{a}\sqrt{b})$ را تبدیل کنید.

حل: $\log(\sqrt[۳]{a}\sqrt{b})=\log(a^{\frac{۱}{۳}}b^{\frac{۱}{۲}})$

طبق قضیه‌ی ۱ : $=\log a^{\frac{۱}{۳}}+\log b^{\frac{۱}{۲}}$

طبق قضیه‌ی ۲ : $=\frac{۱}{۳}\log a+\frac{۱}{۲}\log b$

مثال ۱۳: لگاریتم‌های زیر را به یک لگاریتم تبدیل کنید :

$$A = \log\sqrt{P} - \log\sqrt{۴P} + \log(\frac{۱}{۲}P^{۲}) + \log ۴$$

حل: طبق قضیه‌ی ۳ :

$$A = \log(\frac{\sqrt{P}.\frac{۱}{۲}P^{۲}.۴}{\sqrt{۴P}})$$

$$A = \log(\frac{P^{\frac{۱}{۲}}.\frac{۱}{۲}P^{۲}.۴}{۲P^{\frac{۱}{۲}}})$$

$$A = \log(\frac{۱}{۴}P^{۲}.۴)$$

$$\boxed{A = \log P^{۲}}$$

مثال ۱۴: معادله‌ی زیر را با شرط $q > ۰$ و p برای x حل کنید :

$$\log x - \frac{۱}{۲}\log(pq) = -\frac{۱}{۲}\log(p/q)$$

حل:

$$\log x - \frac{۱}{۲}\log p - \frac{۱}{۲}\log q = -\frac{۱}{۲}\log p + \frac{۱}{۲}\log q$$

$$\log x = \frac{۱}{۲}\log q + \frac{۱}{۲}\log q = \log q$$

در نتیجه

$$\boxed{x = q}$$

به دلیل راحت‌تر بودن محاسبات با لگاریتم اعشاری (دهدهی) می‌توانیم لگاریتم در مبناهای دیگر را تبدیل به لگاریتم اعشاری (لگاریتم در مبنای ۱۰) بکنیم.

قضیه‌ی ۶: اگر $x > ۰$ آنگاه $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

اثبات: $\log_a x$ را مساوی y قرار می‌دهیم

(۴) $$\log_a x = y$$

$a^y = x$

طبق تعریف لگاریتم اگر $a = b$ آنگاه $\log a = \log b$ در نتیجه

$\log(a^y) = \log x$

$y \log a = \log x$ (۵)

چون به دنبال $y = \log_a x$ هستیم، پس (۵) را برحسب y می‌نویسیم

$$y = \frac{\log x}{\log a}$$

و از (۴) مقدار y را جایگزین می‌کنیم

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log x}{\log a}}$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال ۱۵: $\log_{۳} ۱۷ = \frac{\log ۱۷}{\log ۳}$. با استفاده از ماشین حساب، این مقدار را محاسبه می‌کنیم :

نمایش	ترتیب عملیات
۲/۵۷۸	۱۷ $\boxed{\log}$ $\boxed{\div}$ ۳ $\boxed{\log}$ $\boxed{=}$

مسائل

۱ــ با استفاده از سه قضیه‌ی ۳، ۴و ۵، عبارات زیر را تبدیل کنید :

الف) $\log(a^۳ b^۵)$

ب) $\log[(a+b)(a-b)]$

پ) $\log(mr^{-۲})$

ت) $\log(\frac{۱}{a^۲ b^۳ c^۴})$

ث) $\log \sqrt[۳]{\frac{a^۲ b}{c^۲}}$

ج) $\log(\sqrt[۳]{a}\sqrt[۴]{b}\sqrt[۴]{۵})$

چ) $\log(\frac{\sqrt[۳]{a^{۲}}}{\sqrt{b}\sqrt[۴]{a^{۴}}})$

ح) $\log(\frac{a^{۲}}{b^{۲}c})$

۲ــ به یک لگاریتم تبدیل کنید :

الف) $۵\log a - ۲\log b + ۳\log c$

ب) $\frac{۱}{۴}\log(ab) - \frac{۳}{۵}\log(a^{۲}b)$

پ) $۲\log(x+y) - ۳\log(x-y)$

ت) $\log pq - \log ۲q$

۳ــ معادلات لگاریتمی زیر را برای متغیّر x حل کنید :

الف) $\log ۲۷ = ۳\log x$

ب) $\log x + ۲\log ۴ = ۲\log ۱۲$

پ) $\log(p-q) = \log(p^{۲}-q^{۲}) - \frac{۱}{۲}\log x$

۳ــ۶ ــ کاربردهای لگاریتم: مقیاس سنجش زلزله و صدا

در سال ۱۳۶۹، زلزله‌ی شدیدی در شهر رودبار ایران به وقوع پیوست که متأسفانه باعث تلفات جانی بسیاری شد. مرکز زلزله شناسی دانشگاه تهران، شدّت زلزله را بین ۷/۲ تا ۷/۶ ریشتر[۱] اعلام کرد.

اصولاً وقتی که رسانه‌ها خبر وقوع زلزله‌هایی با قدرت بیش از ۵ ریشتر را گزارش می‌کنند،

۱ــ Richter

مردم هراسان شده، نگران تلفات احتمالی آن می‌گردند. این در حالی است که اخبار وقوع زلزله‌هایی با قدرت ۳/۵ الی ۴ ریشتر خیلی نگران کننده نیستند، زیرا قدرت تخریبی آن‌ها پایین است. **چرا؟** چگونه اختلاف بین ۳/۵ تا ۷/۲ باعث بالا بردن قدرت تخریب تا این اندازه می‌شود؟ به طور طبیعی، این سؤال پیش می‌آید که واحد سنجش شدت زلزله چه ماهیتی دارد که افزایش چند واحد آن این‌گونه قدرت تخریب را بالا می‌برد؟

جالب است بدانید که مقیاس ریشتر که برای تعیین شدّت زلزله به کار برده می‌شود، بیانگر این است که با افزایش هر واحد ریشتر، قدرت تخریب ده برابر می‌شود. به عنوان مثال، زلزله‌ای با قدرت ۶ ریشتر ده بار شدیدتر از زلزله‌ای با قدرت ۵ ریشتر و ۱۰۰ بار شدیدتر از زلزله‌ای با قدرت ۴ ریشتر است.

فعالیت ۳ــ۴

الف ــ اگر برای زلزله‌ای با شدت ۴ ریشتر، شدت نسبی یک واحد را در نظر بگیریم، جدول زیر را کامل کنید:

شدت نسبی	۱	۱۰	☐	☐	☐	☐
واحد ریشتر	۴	۵	۶	۷	۸	۹

۱ــ چگونه شدت نسبی و واحد ریشتر از لحاظ شدت قابل مقایسه هستند؟

۲ــ چگونه زلزله‌ای با قدرت ۹ ریشتر با زلزله‌ای با قدرت ۷ ریشتر قابل مقایسه است؟

حتماً متوجه شدید که اعداد مقیاس ریشتر لگاریتمی هستند!

ب ــ با دانستن اینکه اعداد مقیاس ریشتر لگاریتمی هستند، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

۱ــ لگاریتم چه عددی صفر است؟

۲ــ بعید است که زلزله‌ای با قدرت ۲ ریشتر احساس شود. لگاریتم چه عددی ۲ است؟

۳ــ زلزله‌ای با قدرت ۷/۲۵ ریشتر اگر در نزدیکی محل پرجمعیتی اتفاق بیفتد فاجعه‌آمیز است. لگاریتم چه عددی ۷/۲۵ است؟

به نکته‌ای که در مجله‌ی دانستنی‌ها شماره‌ی ۱۰ سال شانزدهم ــ اردیبهشت ۱۳۷۴ نوشته

شده است دقّت کنید :

زرادخانه‌ی نیروهای طبیعی...
زمین لرزه = ۵۰۰۰۰ بمب اتمی

زمین‌لرزه‌ای به قدرت ۱۰ درجه در مقیاس ریشتر، معادل ۱۰ میلیارد تن انفجار تی.ان. تی انرژی آزاد می‌کند. بمب هیروشیما معادل ۲۰۰۰۰ تن تی.ان.تی بود. به ناحق زمین لرزه‌ها را تخریب کننده‌ترینِ پدیده‌های طبیعی به شمار می‌آورند. آمار نشان می‌دهند که گردبادها و طوفان‌ها و سیل‌ها، خسارات مالی و جانی سنگین‌تری به بار می‌آورند.

تمرین

۱ــ[۱]اولین فیلم انیمیشن در تاریخ سینما، فیلم **سفیدبرفی و هفت کوتوله** بود. مدت زمان فیلم۸۲ دقیقه بود و همچنان که در مورد فیلم‌های انیمیشن مدرن صحّت دارد، در هر ثانیه، ۲۴ تصویر و مجموع تعداد تصویرهایی که بر پرده ظاهر شد، ۲۴ . ۶۰ . ۸۲ بود.

با استفاده از لگاریتم، تعداد تقریبی تصویرهایی را که در فیلم سفیدبرفی و هفت کوتوله به‌کار برده شده بود پیدا کنید.

۲ــ [۲]در یک‌سال، تقریباً $۴/۲ . ۱۰^{۵}$ کیلوگرم گیاه در زیر هر کیلومترمربع از سطح اقیانوس می‌روید. همچنان‌که حدود $۳/۶ . ۱۰^{۸}$ کیلومترمربع زمین نیز به‌وسیله‌ی اقیانوس پوشیده شده است.

با استفاده از لگاریتم، وزن تقریبی گیاه‌هایی را که در اقیانوس‌های سطح کره‌ی زمین در یک‌سال می‌رویند مشخّص کنید و مراحل کار خود را یادداشت کنید.

۳ ــ ۶ ــ ۱ــ مقیاس ریشتر: مقدار انرژی آزاد شده برحسب ژول که توسط مهیب‌ترین زلزله‌های دنیا تا به حال ثبت شده است، حدود ۱۰۰ میلیارد برابر انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ی خفیفی است که به سختی قابل احساس است. در طی ۱۵۰ سال گذشته، افراد از کشورهای

۱و ۲ــ این دو مسأله از کتاب ژاکوب، ۱۹۸۲ صفحه ۲۱۶ گرفته شده است.

مختلف، مقیاس‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری و مقایسه‌ی قدرت زلزله تهیّه کرده‌اند. در سال **۱۹۳۵**، چارلز ریشتر، زلزله‌شناس آمریکایی، یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش قدرت زلزله تهیّه کرد که هنوز مورد استفاده است و به دلیل اهمیت، به نام خود او معروف گشته است.

زلزله‌ای با قدرت کمتر از ۴/۴۰ ریشتر قابل احساس نیست. انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ای با قدرت بسیار کم به عنوان مبنای استاندارد مقایسه برای سنجش قدرت زلزله‌ها درنظر گرفته شده است که برابر است با

[1] $E_{\circ} = ۱۰^{۴/۴۰}$ ژول

آنگاه قدرت زلزله از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

[2] $M = \frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_{\circ}}.$

جدول (۱۱)

قدرت زلزله در مقیاس ریشتر	قدرت تخریب
M . ۴/۵	ضعیف
۴/۵ . M . ۵/۵	متوسط
۵/۵ . M . ۶/۵	زیاد
۶/۵ . M . ۷/۵	بسیار زیاد
M . ۷/۵	بزرگ‌ترین

که در آن E انرژی آزاد شده به وسیله‌ی زلزله، برحسب ژول است. جدول (۱۱) قدرت تخریب زلزله‌های مختلف را در مقیاس ریشتر نشان می‌دهد :

مثال ۱۶: زلزله‌ی سال ۱۹۰۶ سانفرانسیسکو در حدود $۵/۹۶ \times ۱۰^{۱۶}$ ژول انرژی آزاد کرد. زلزله آن‌چنان شدید بود که حتی خیابان‌های شهر را نابود کرد، طوری که عملاً، شهر سانفرانسیسکو از نو ساخته شد. قدرت زلزله در مقیاس ریشتر چقدر بود؟

حل: از رابطه‌ی $M = \frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_{\circ}}$ استفاده می‌کنیم و M را حساب می‌کنیم

$$M = \frac{۲}{۳}\log\frac{۵/۹۶ \times ۱۰^{۱۶}}{۱۰^{۴/۴۰}}$$

۱ــ Energy ۲ــ Magnitude

$$=\frac{۲}{۳}\log(۵/۹۶\times ۱۰^{۱۱/۶})$$

$$=\frac{۲}{۳}(\log ۵/۹۶+\log ۱۰^{۱۱/۶})$$

$$=\frac{۲}{۳}(۰/۷۷۵+۱۱/۶)$$

$$\boxed{M=۸/۲۵}$$

مثال ۱۷: شدت زلزله‌ی سال ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ الی ۷/۶ ریشتر گزارش شد. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده برحسب ژول را پیدا کنید.

حل:

$$M=\frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_۰}$$

که در آن $M=۷/۲$ ، $E_۰=۱۰^{۴/۴۰}$ و E **مجهول** است. بنابراین

$$۷/۲=\frac{۲}{۳}\log\frac{E}{۱۰^{۴/۴۰}}$$

$$=\frac{۲}{۳}(\log E-\log ۱۰^{۴/۴۰})$$

$$=\frac{۲}{۳}(\log E-۴/۴۰)$$

$$=\frac{۲}{۳}\log E-\frac{۲}{۳}\times ۴/۴۰$$

و $$۷/۲=\frac{۲}{۳}\log E-۲/۹۳۳$$

یا

$$\frac{۲}{۳}\log E=۷/۲+۲/۹۳۳=۱۰/۱۳,$$

و در نتیجه

$$\log E=\frac{۱۰/۱۳}{\frac{۲}{۳}}=۱۵/۲,$$

برای محاسبه‌ی E یا از دکمه‌ی y^x ماشین حساب استفاده کنید که چون

$$E=۱۰^{۱۵/۲}$$

در نتیجه

$$E = 1/584 \times 10^{15}$$

یا از تابع عکس لگاریتم استفاده کنید :

نشان‌دهنده	ترتیب عملیات
$1/584 \times 10^{15}$	log INV [1] 15/2

مقدار E را می‌توانیم با مراجعه به جدول لگاریتم به دست آوریم

$$E = 10^{15/2} = 10^{15} \times 10^{0/2}$$

و در جدول به‌دنبال عددی می‌گردیم که لگاریتم آن ۰/۲ است که مقدار تقریبی آن عدد **۱/۵۸۴** است، یعنی

$$E = 1/584 \times 10^{15}$$

تمرین ۷: همین مثال را با فرض اینکه شدت زلزله‌ی رودبار ۷/۶ ریشتر باشد، انجام دهید.

۳ــ۶ــ۲ــ شدّت صدا: گوش انسان قادر به شنیدن صداهایی با شدّت‌های غیرقابل تصور است. بلندترین صدایی که گوش یک انسان سالم (بدون صدمه رسیدن به پرده‌ی گوش) قادر به شنیدن آن است، شدّتی معادل یک تریلیون (10^{12}) برابرِ شدّتِ کوتاه‌ترین صدایی که همان انسان می‌تواند بشنود دارد. مقیاس دسی‌بل[2] نیز یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش شدّت صدا است که به احترام الکساندر گراهام‌بل، مخترع تلفن (۱۹۲۲ــ ۱۸۴۷)، به نام او نامگذاری شده است. مقیاس دسی‌بل چنین تعریف می‌شود

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

که در آن D برابر **سطح دسی‌بل صدا**، I نشان‌دهنده‌ی شدّت صدا برحسب وات در هر مترمربع ($\frac{W}{m^2}$) و I_0 شدّت کمترین صدای قابل شنیدن توسط یک انسان نسبتاً سالم و جوان است. مقدار استاندارد شده‌ی I_0 برابر 10^{-12} وات در هر مترمربع است. جدول (۱۲) شدّت بعضی از صداهای آشنا را نشان می‌دهد.

۱ــ در بعضی ماشین حساب‌ها به‌جای دکمه‌ی INV از دکمه‌ی 2ndF استفاده می‌شود.

۲ــ Decibel

جدول (۱۲)

منبع صدا	شدت صدا $\frac{W}{m^{۲}}$
در آستانه‌ی شنیدن	$۱/۰\times ۱۰^{-۱۲}$
نجوا	$۵/۲\times ۱۰^{-۱۰}$
مکالمه‌ی معمولی	$۳/۲\times ۱۰^{-۶}$
ترافیک سنگین	$۸/۵\times ۱۰^{-۴}$
مته‌ی سوراخ کردن سنگ	$۳/۲\times ۱۰^{-۳}$
در آستانه‌ی درد	۱۰×۱۰^{۰}
هواپیمای جت با موتور سوخت	$۸/۳\times ۱۰^{۲}$

مثال ۱۸: تعداد واحدهای دسی‌بل را که از صدای نجوا مانندی با شدت $۵/۲\times ۱۰^{-۱۰}$ وات در هر مترمربع ایجاد می‌شود پیدا کنید.

حل: D را از فرمول $D=۱۰\log\frac{I}{I_{\circ}}$ حساب می‌کنیم:

$$D=۱۰\log\frac{۵/۲\times ۱۰^{-۱۰}}{۱۰^{-۱۲}}$$
$$=۱۰\log(۵/۲\times ۱۰^{۲})$$
$$=۱۰(\log ۵/۲+\log ۱۰^{۲})$$
$$=۱۰(۰/۷۱۶+۲)$$

$D=۲۷/۱۶$ دسی بل

مقیاس لگاریتمی

چون لگاریتم هر عدد در مبنای به غیر از یک ــ افزایشی بسیار کندتر از خود آن عدد دارد، از لگاریتم‌ها برای ایجاد مقیاس‌های راحت‌تری برای مقایسه استفاده می‌شود.