

❖ **مثال:** مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر بازه $[1, 2]$ با افراز منظم P مستطیل از ۵ نقطه و ۴ بازه جزء محاسبه کنید.

✍ **حل:** چنین افرازی می‌بایست مشتمل بر نقاط به طول‌های $x_0=1$ و $x_1 = \frac{5}{4}$ و $x_2 = \frac{3}{2}$ و $x_3 = \frac{7}{4}$ و $x_4=2$ باشد. (چرا؟)
چون تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر این بازه نزولی است مینیمم و ماکزیمم آن بر بازه به ترتیب برابر $\frac{1}{x_i}$ و $\frac{1}{x_{i-1}}$ می‌باشد. سپس مجموع‌های پایین و بالا چنین‌اند:

$$L_4 = \frac{1}{4} \left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) = \frac{533}{840} \approx 0.6345$$

$$U_4 = \frac{1}{4} \left(f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \right) = \frac{319}{420} \approx 0.7595$$

❖ **مثال:** مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x) = x^2$ بر بازه $[1, 2]$ به ازای $n=4, n=2, n=1$ محاسبه کنید.

✍ **حل:** می‌دانیم تابع f بر $[1, 2]$ صعودی است، پس بر هر بازه جزء آن نیز صعودی است. لذا برای بازه جزء i ام یعنی $[x_{i-1}, x_i]$ و $I_i = x_{i-1}$ و $u_i = x_i$ وقتی $n=1$ فقط یک بازه جزء وجود دارد و آن هم بازه $[1, 2]$ است:

$$L_1 = (2-1)f(1) = 1 \quad \text{و} \quad U_1 = (2-1)f(2) = 4$$

برای $n=2$ ، دو بازه جزء $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ خواهیم داشت. پس

$$L_2 = \frac{1}{2} \left(f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{4} \right) = 1.625$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + 4 \right) = 3.125$$

برای $n=3$ ، سه بازه جزء داریم $[1, \frac{4}{3}]$ $[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}]$ $[\frac{5}{3}, 2]$

$$L_3 = \frac{1}{3} (f(1) + f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3})) = \frac{1}{3} (1 + \frac{16}{9} + \frac{25}{9}) = \frac{50}{27} = 1/851$$

$$U_3 = \frac{1}{3} (f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3}) + f(2))$$

$$= \frac{1}{3} (\frac{16}{9} + \frac{25}{9} + 4) = \frac{77}{27} = 2/651$$

با انتخاب $n=4$ مشابهاً مقادیر $U_4=2/718$ و $L_4=1/968$ را به دست می آوریم.

بالاخره با انتخاب $n=8$ مقادیر $U_8=2/148$ و $L_8=2/534$ را به دست می آوریم.



در رابطه با تابع مثال ۲، $L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$ و همچنین $U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7$ را محاسبه کنید.

نکته: مقادیر L_1 تا L_n نشانگر آنند که دنباله $\{L_n\}_{n=1}$ دنباله ای صعودی است، در حالی که مقادیر U_1 تا U_n نشان می دهند که دنباله $\{U_n\}_{n=1}$ دنباله ای نزولی است. البته این حدسی بیش نیست، اما می توانید آن را به طریق ملموس و شهودی با استفاده از مستطیل های محاطی و محیطی برای یک نمودار دلخواه از تابعی پیوسته و به تعیین نزدیک نمایید. کافی است دو جمله متوالی مانند L_n, L_{n+1} را با هم مقایسه کنید.

پرسش: آیا می توانیم بگوییم که دنباله های U_n, L_n به یک عدد همگرا هستند؟

مجموع های پایین و بالا را برای تابع $f(x)=x^2$ بر بازه $[0, \alpha]$ محاسبه کنید؛ مجموع هایی که متناظر افزایش منظم از این بازه مشکل از $n+1$ نقطه و n بازه جزء بوده باشند. بدین سان جملات عمومی دنباله ای $\{L_n\}$ ، $\{U_n\}$ را محاسبه خواهید کرد. سپس

$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

این مثال‌ها و بررسی‌ها ما را به صورت بندی تعریف مهم زیر رهنمون می‌کند:


هرگاه دنباله‌های عددی مجموع‌های بالا و پایین تابع f به یک عدد مانند A همگرا باشند، عدد A را انتگرال معین این تابع بر بازه $[\alpha, b]$ می‌نامیم و می‌نویسیم.

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

که صورت کشیده حرف S است از حرف اول کلمه مجموع (Sum) اقتباس شده است و آن معادل حرف سیگما Σ یونانی است. بنابراین $A = \int_a^b f(x) dx$ را انتگرال معین f بر $[a, b]$ و یا انتگرال معین f از a تا b می‌نامیم.

باید توجه کنیم وقتی f تابعی نامنفی است تعبیر هندسی انتگرال معین مساحت تحت نمودار f و محدود به بازه $[a, b]$ است اما ما این شرط را نداشته‌ایم، بنابراین انتگرال معین، در حالت کلی عددی حقیقی است که می‌تواند مثبت، منفی و یا برابر صفر باشد.

❖ **مثال:** ثابت کنید تابع $f(x) = x^2$ بر بازه $[0, a]$ ، $a > 0$ ، انتگرال پذیر است و مقدار $\int_a^0 x^2 dx$ را به دست آورید.

 **حل:** قبلاً دنباله‌های L_n ، U_n را محاسبه کردیم. کافی است حد این دنباله‌ها را به دست آوریم.

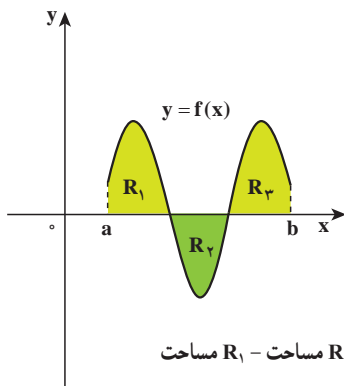
$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^0 x^2 dx = \frac{a^3}{3} \quad \text{بنابراین:}$$

نکته: باید توجه داشته باشیم که تعریف انتگرال به شکل فوق مستقل از مفهوم مساحت است، گرچه این مفهوم در آغاز از مفهوم مساحت به وجود آمده است. وقتی تابع f بر بازه $[0, a]$ تابعی نامنفی باشد، یعنی نمودار آن بالای محور x باشد، مقدار انتگرال معین برابر مساحت محدود به نمودار تابع f و خطوط $x=a$ و $x=b$ است. برای وقتی که همواره $f(x) \leq 0$ ، یعنی نمودار تابع پایین محور x است، $\int_a^b f(x) dx$ برابر قرینه مساحت محدود به نمودار f و خطوط $x=a$ و $x=b$ می‌باشد. در حالت کلی، $\int_a^b f(x) dx$ برابر است با مساحت قسمتی از ناحیه R (یعنی ناحیه تحت نمودار و محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$) که بالای محور x است منهای مساحت بخشی از R که زیر محور x

است. (شکل ۴-۱۱)



شکل ۴-۱۱. برابر است با مساحت $R_2 +$ مساحت $R_1 -$ مساحت R_3 $\int_a^b f(x) dx$



۱- $\int_a^a x dx$ را که در آن $a > 0$ ، محاسبه کنید.

۲- $\int_a^b dx$ را محاسبه کنید. توجه کنید که در اینجا $f(x)=1$ تابع ثابت با مقدار ۱ است.

۳- $\int_a^b c dx$ را، که در آن $f(x)=c$ تابع ثابت با مقدار c است، محاسبه کنید.

تعمیم: در تعریف انتگرال معین فرض کردیم که تابع f بر $[a,b]$ پیوسته است. اکنون یک گام به جلو بر می‌داریم و فرض می‌کنیم که تابع f بر $[a,b]$ کراندار بوده اما لزوماً پیوسته نباشد. می‌دانیم که هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته کراندار است اما عکس این حکم در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. قصدمان این است که انتگرال معین را برای توابع کراندار نیز تعریف کنیم.

فرایند تعریف را که برای توابع پیوسته به کار گرفتیم در اینجا نیز می‌توانیم اعمال کنیم. تنها یک تفاوت کوچک وجود دارد که در نتیجه کار بلااثر می‌باشد. فرض کنیم P یک افراز $[a,b]$ باشد. f بر $[a,b]$ کراندار است پس بر هر بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ نیز کراندار است. چون (مقادیر) f بر این بازه یک مجموعه کراندار است، پس از بالا کراندار است. پس دارای سوپریمی مانند M_i است. مشابهاً چون f بر این بازه کراندار است از پایین کراندار بوده و در نتیجه دارای اینفیمی مانند m_i است.

واضح است که برای هر $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ، $m_i \leq f(x_i) \leq M_i$. در نتیجه $m_i \Delta x_i \leq f(x_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$. اکنون مجموع‌های بالا و پایین را چنین تعریف می‌کنیم.

$$U_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

هرگاه دنباله‌های $\{L_n\}$ و $\{U_n\}$ هر دو به یک عدد مانند A همگرا باشند گوییم تابع f بر $[\alpha, b]$ انتگرال پذیر است و عدد A را مقدار انتگرال معین f بر این بازه می‌نامیم. به زبان نمادی می‌نویسیم.

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

اینک این تعریف را با تعریف قبلی در باب توابع پیوسته مقایسه کنید.

وقتی تابع پیوسته است، m_i به ازای نقطه‌ای مانند l_i از $[x_{i-1}, x_i]$ حاصل می‌شود.

$$m_i = f(l_i)$$

$$M_i = f(u_i)$$

همچنین M_i به ازای u_i از $[x_{i-1}, x_i]$ به دست می‌آید.

و ماجرا عیناً به حالت قبل برمی‌گردد.

اما تعریف اخیر کلی است و نیازی ندارد که f پیوسته فرض شود، بلکه کافی است f کراندار فرض گردد.

تعمیم‌های دیگری نیز می‌توان صورت‌بندی کرد لیکن از حوصله این درس خارج است. به مثال زیر توجه کنید.

❖ **مثال:** تابع f بر بازه $[0, 1]$ چنین تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

ثابت کنید انتگرال معین $\int_0^1 f(x) dx$ وجود ندارد.

🚀 **حل:** فرض کنیم P افزایش دلخواه از $[0, 1]$ با $n+1$ نقطه افزایشی باشد.

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

بنابراین

هرگاه m_i و M_i را به ترتیب مینیمم و ماکزیمم تابع f بر بازه i ام بنامیم، چون در هر بازه اعداد گویا و گنگ وجود دارد،

$$m_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$M_i = 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$L_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \times \frac{1}{n} = 0 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$U_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{1}{n} \times n = 1$$

بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$ زیرا L_n دنباله ثابت صفر و U_n دنباله ثابت ۱ است. در

نتیجه تابع f بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر نمی‌باشد.

تابع f را بر بازه $[-1, 1]$ چنین تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 1-x & , x < 0 \end{cases}$$

ثابت کنید $\int_{-1}^1 f(x) dx$ وجود دارد و مقدار آن را به دست آورید. (نمودار تابع را رسم کنید).

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

❖ **قضیه ۱:** هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته، انتگرال پذیر است.

نتیجه: هرگاه f پیوسته باشد می‌توانیم با یکی از دنباله‌های $\{L_n\}$ یا $\{U_n\}$ کار کنیم و با حدگیری مقدار انتگرال را به دست آوریم.

نکته: در حساب مقدماتی آموخته‌اید که نامساوی‌های هم‌جهت را می‌توان با هم جمع کرد:

$$\begin{aligned} a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2 & \quad \text{هرگاه} \\ a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2 & \quad \text{آنگاه} \end{aligned}$$

یعنی

و اگر یکی از نامساوی‌های فرض اکید باشد، نامساوی به دست آمده نیز اکید است. این ویژگی نامساوی‌ها به آسانی قابل تعمیم است:

هرگاه $\alpha_i \leq b_i$ ($1 \leq i \leq n$) نامساوی باشند آنگاه $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i$. از این ویژگی نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم و یکی از خواص توابع پیوسته را در رابطه با مقدار انتگرال به آسانی به دست می‌آوریم؛ در مابقی این بخش مجدداً همه‌جا f را پیوسته فرض می‌کنیم.

❖ **قضیه ۲:** هرگاه تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و m و M به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \text{بر این بازه باشند، آنگاه}$$

❖ **برهان:** فرض کنیم P افرازی منظم با n بازه جزء از بازه $[a, b]$ باشد.

برای هر i ، $f(U_i) \leq M$ ، $m \leq f(L_i)$ (چرا).

$$L_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(L_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(L_i) \quad \text{پس:}$$

$$\begin{aligned} & \geq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n m = \frac{b-a}{n} \times m \sum_{i=1}^n 1 \\ & = \frac{b-a}{n} \times m \times n = m(b-a) \end{aligned}$$

$$U_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(U_i) \quad \text{همچنین:}$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n M = (b-a)M$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n \geq m(b-a) \quad \text{در نتیجه، با حدگیری،}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq M(b-a)$$

اکنون دو نامساوی را با هم می‌نویسیم

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

(۱)

آیا می‌توانید این نامساوی‌ها را در شکل ۴-۱۲ تعبیر کنید؟ مستطیل‌های با پایه $b-a$ و ارتفاع m و M را در نظر بگیرید.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad \text{نامساوی‌های (۱) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

تعریف: قرار می‌دهیم

\bar{f} را مقدار متوسط یا میانگین تابع f بر بازه $[a, b]$ می‌نامیم.

میانگین تابع f برابر ارتفاع مستطیلی با پایه $b-a$ است که مساحت آن برابر مساحت ناحیه تحت f (برای $f \geq 0$) محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$ می‌باشد.

❖ مثال: می‌خواهیم بدون محاسبه انتگرال معین، برای $\int_1^3 (x^3 - 3x^2 + 1) dx$ کران بالا و

کران پایینی بدست آوریم.

حل: تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ در بازه $[1, 3]$ دارای مقدار ماکسیمم مطلق ۱ و مینیمم

مطلق -۳ است (چرا؟)

$$-3(3-1) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 1(3-1)$$

پس، طبق قضیه ۲ داریم:

و یا

$$-6 \leq \int_1^3 (x^3 - 3x^2 + 1) dx \leq 2$$

نشان دهید که،

$$0 \leq \int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{3}{2}$$

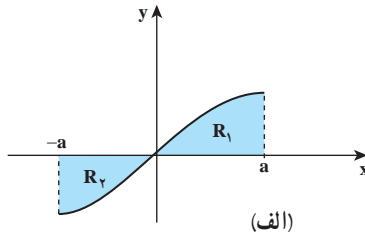
۱- فرض کنیم f تابعی زوج بر $[-a, a]$ باشد، یعنی برای هر x از این بازه

$$f(-x) = f(x) \text{ ثابت کنید : } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

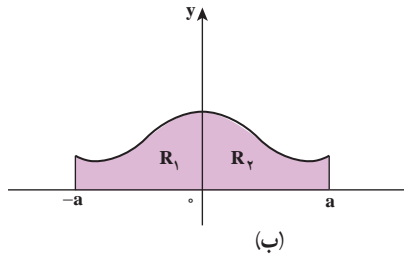
۲- فرض کنیم f تابعی فرد بر $[-a, a]$ باشد، یعنی برای هر x از این بازه $f(-x) = -f(x)$

ثابت کنید.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



شکل (الف) تابع f فرد است.



شکل (ب) تابع f زوج است.

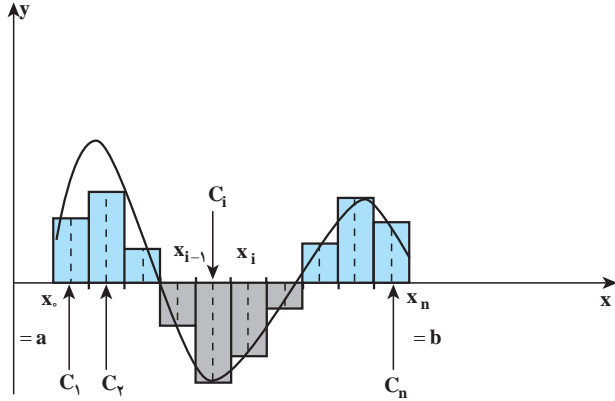
(تعبیری دیگر از انتگرال معین) - فرض کنیم تابع f بر بازه $[\alpha, b]$ پیوسته باشد؛

$$P: x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

همچنین

افرازی دلخواه از این بازه باشد. هرگاه $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$) نقطه دلخواهی از بازه جزء نام باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$



مجموع مساحت مستطیل‌های رنگی منهای حاصل جمع مستطیل‌های با رنگ خاکستری است.

راهنمایی: از اینکه f بر هر بازه جزء پیوسته است استفاده کنید. سپس با استفاده از حاصل جمع‌های بالا و پایین و قضیه فشردگی، تساوی فوق به آسانی به دست می‌آید.

مسائل

در تمرین‌های ۱-۶، P_n یک افراز منظم از بازه $[a, b]$ است به طوری که $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ برای این تمرین‌ها، U_n ، L_n را برای مقدار مفروض n به دست آورید.

۱- $f(x) = x$ بر $[0, 2]$ ، با انتخاب $n=8$.

۲- $f(x) = x^2$ بر $[0, 4]$ ، با انتخاب $n=4$.

۳- $f(x) = e^x$ بر $[-2, 2]$ ، با انتخاب $n=4$.

۴- $f(x) = L_n(x)$ بر $[1, 2]$ ، با انتخاب $n=5$.

۵- $f(x) = \sin x$ بر $[0, \pi]$ ، با انتخاب $n=6$. مقدار انتگرال را با مساحت توضیح دهید.

۶- $f(x) = \cos x$ بر $[0, 2\pi]$ ، با انتخاب $n=4$. مقدار انتگرال را با مساحت توضیح دهید.

در تمرین‌های ۷-۸ ابتدا U_n ، L_n را برای افراز منظم با n بازه جزء محاسبه کنید.

سپس ثابت کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ از این رو انتگرال معین مربوطه را به دست آورید.

$$7- \text{بر } [a, b] = [0, 2] \text{ } f(x) = 1 - x$$

$$8- \text{بر } [a, b] = [0, 1] \text{ } f(x) = x^2$$

$$9- \text{انتگرال را محاسبه کنید. } \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

۱۰- فرض کنیم f تابعی پیوسته و صعودی اکید بر $[a, b]$ و P افراز منظم با n بازه جزء از این

بازه بوده باشد. ثابت کنید.

$$U_n - L_n = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$$

چون سمت راست این عبارت را می‌توانیم با انتخاب n به قدر کافی بزرگ از هر عدد مثبتی کوچک‌تر کنیم، تابع f می‌بایست بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد. (این مسأله اثباتی ساده از کدام قضیه به دست می‌دهد؟)

۱۱- دو تمرین جفت برای تمرین‌های ۵ و ۶ به شکل زیر می‌تواند مطرح شود:

$$\int_0^\pi \sin x dx \text{ و } \int_0^{2\pi} \cos x dx . \text{ این مقادیر را حساب کرده و آنها را به ترتیب با اعداد به دست}$$

آمده در ۵ و ۶ مقایسه کنید.

۴-۴- ویژگی‌های انتگرال معین

ریاضیدانان را عادت بر این است که وقتی مفهومی را برای موارد ملموس و فیزیکی فرمول‌بندی

می‌کنند، آن را به صورتی کلی‌تر و در واقع در نهایت کلی آن، تعمیم دهند. ما انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ را با محدودیت‌هایی مطرح و بررسی کردیم:

ابتدا فرض کردیم f تابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد، سپس آن را به توابع کراندار تعمیم دادیم.

چون بازه $[a, b]$ نقش کلیدی در تعریف انتگرال داشت (افرازها چنین نقشی داشتند) پس $a < b$ ؛

و این یک فرض الزام‌آور به حساب آمده است!

سخن از وقتی که f ناپیوسته باشد و یا آنکه f بر $[a, b]$ بی‌کران باشد خارج از برنامه این درس

است.

اما برای وقتی که $a = b$ یا $a > b$ ، به آسانی می‌توانیم مفهوم انتگرال معین را تعمیم دهیم.

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{(الف) قرار می‌دهیم}$$

در واقع در چنین صورتی هر افراز از بازه $[a, b]$ فقط شامل یک نقطه است و لذا طول هر بازه جزء $\Delta x_i = 0$ است. x_i ها به شکل ضریب در Σ ظاهر می‌شوند، پس تعریف فوق که حالت خاص از انتگرال معین است، طبیعی می‌نماید.

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad \text{(ب) هرگاه } a > b \text{، تعریف می‌کنیم.}$$

❖ **قضیه ۳ (خواص خطی انتگرال):** فرض کنیم f و g توابعی انتگرال پذیر $[a, b]$ و c_1 و c_2 دو

عدد ثابت باشند. در این صورت تابع $c_1 f + c_2 g$ نیز بر $[a, b]$ انتگرال پذیر است؛ به علاوه

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

عبارت $c_1 f + c_2 g$ را اصطلاحاً یک ترکیب خطی از f و g می‌نامیم.

رابطه (۱) را با رابطه مشابه در خصوص سیگماها مقایسه کنید.

$$\sum_{i=1}^n (c_1 a_i + c_2 b_i) = c_1 \sum_{i=1}^n a_i + c_2 \sum_{i=1}^n b_i \quad (2)$$

اثبات (۱) نیز اساساً بر اساس مفهوم انتگرال و خواص مشابه برای Σ انجام می‌شود.

$$\int_0^1 (x^3 + 4x^2) dx = \int_0^1 x^3 dx + 4 \int_0^1 x^2 dx \quad \text{❖ مثال:}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{19}{12}$$

زیرا قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که $\int_0^1 x^3 = \frac{1}{4}$ ، $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$.

❖ **قضیه ۴:** فرض کنیم f, g توابعی انتگرال پذیر و برای هر $a \leq x \leq b$

$$f(x) \leq g(x)$$

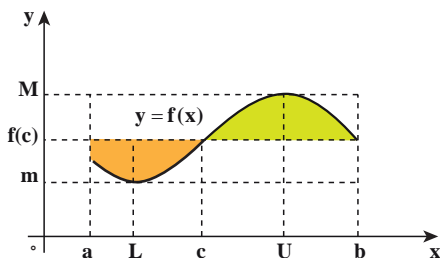
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{در این صورت}$$

قضیه زیر که به کمک قضیه مقدار میانی اثبات می‌گردد، قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها نامیده می‌شود.

❖ **قضیه ۵:** (قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها) هرگاه f بر $[a, b]$ تابعی پیوسته باشد، نقطه‌ای

مانند c از این بازه هست به قسمی که

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c)$$



شکل ۴-۱۲- مقدار انتگرال برابر مساحت مستطیلی به ارتفاع $f(c)$ و قاعده $b-a$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad \blacklozenge \text{برهان: می دانیم:}$$

که در آن M و m به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f بر $[a, b]$ هستند.
(قضیه ۲) چون f پیوسته است، بنابر قضیه مقدار میانی فصل ۲، هر مقدار بین ماکزیمم و مینیمم

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad \text{خود را در نقطه ای مانند } c \in [a, b] \text{ می گیرد، یعنی:}$$

و یا

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

۴-۵- قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

همچنان که در فصل ۳ خوانده ایم، هرگاه تابع مشتق پذیر F بر بازه $[a, b]$ چنان باشد که $F'(x) = f(x)$ ، F را یک پادمشتق و یا یک تابع اولیه تابع f می نامیم. در این بخش سعی مان این است تا ارتباطی بین دو مفهوم انتگرال معین، که در بخش پیشین تعریف گردید، و مفهوم پادمشتق برقرار سازیم. چنان که قبلاً نیز گفته ایم، خواهیم دید که این ارتباط به نحوی چشمگیر محاسبه بسیاری از انتگرال های معین را میسر می سازد. این ارتباط که در واقع ارتباطی بین مفهوم های مشتق و انتگرال معین برقرار می کند، به طرز شایسته به عنوان قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نامگذاری شده است.

قضیه ۶: (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) فرض کنیم تابع f بر بازه I که شامل نقطه a است پیوسته باشد، در این صورت احکام ذیل برقرارند.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{الف) هرگاه تابع } F \text{ را بر } I \text{ با ضابطه:}$$

تعریف کنیم آنگاه تابع F مشتق پذیر است و $F'(x) = f(x)$ ، یعنی F یک تابع اولیه f می باشد؛

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x) \quad \text{به عبارت دیگر:}$$

اگر I در یک طرف یا دو طرف بسته باشد، در هر نقطه انتهایی مضمول بازه، مشتق یک طرفه (مشتق راست، مشتق چپ) منظور می شود.

ب) هرگاه G تابع اولیه دیگری برای f باشد، به طوری که $G'(x)=f(x)$ ، آنگاه برای هر دو نقطه از

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad , (a < b), b \text{ و } a \text{ مانند } I$$

❖ **برهان:** با استفاده از تعریف مشتق، مشتق F را محاسبه می کنیم:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \quad \text{بنا بر قضیه ۳}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h \cdot f(c)$$

که در آن $c=c(h)$ به h بستگی داشته اما بین x و $x+h$ می باشد (قضیه ۵) بنابراین:

$$F'(x) = \lim_{c \rightarrow x} f(c)$$

$$= f(x)$$

زیرا وقتی $h \rightarrow 0, c \rightarrow x$ و f پیوسته می باشد.

ب) چون $G'(x)=f(x)$ ، $F(x)=G(x)+C$ ، برای هر $x \in I$ که در آن C مقدار ثابتی است. از

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = G(x) + C \quad \text{این رو}$$

$$= G(a) + C \quad \text{اکنون فرض کنیم } x=a, \text{ پس}$$

یعنی $C = -G(a)$. بار دیگر، فرض می کنیم $x=b$ ؛ به دست می آوریم.

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

البته می توانیم t را با x (و یا با هر متغیر دلخواه دیگری) در سمت چپ تساوی فوق تعویض

کنیم.

نکته: هر دو قسمت قضیه اساسی را باید به خوبی به خاطر داشت. قسمت الف به شما می گوید

که چگونه می توان از یک انتگرال نسبت به حد بالایی آن مشتق گیری کرد. قسمت ب) راه محاسبه

یک انتگرال معین را به دست می‌دهد مشروط بر آنکه بتوان یک تابع اولیه برای تابع تحت انتگرال‌گیری پیدا کرد.

نماد محاسباتی: برای آنکه محاسبه انتگرال‌های معین را با استفاده از قضیه اساسی تسهیل

کنیم نماد محاسباتی زیر را معرفی می‌کنیم.

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

بنابراین اگر $F(x)$ را با نماد $\int f(x) dx$ نشان دهیم.

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\int f(x) dx \right) \Big|_a^b$$

$\int f(x) dx$ را **انتگرال نامعین** یا اختصاراً **انتگرال f** نیز می‌نامیم. هر تابع اولیه را که برای

محاسبه انتگرال معین به کار گیریم تأثیری در مقدار انتگرال معین نخواهد داشت زیرا مقدار ثابت در محاسبه حذف خواهد شد.

زیرا فرض کنیم به جای $F(x)$ از $G(x)=F(x)+C$ استفاده کنیم:

$$(F(x) + C) \Big|_a^b = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

$$= F(x) \Big|_a^b$$

پس از هر تابع اولیه برای محاسبه انتگرال معین می‌توان استفاده کرد.

به چند مثال ذیل توجه کنید. آیا قبل از آنکه حل آنها را ملاحظه کنید می‌توانید خودتان به حل

آنها بپردازید، کوشش کنید!

❖ **مثال:** انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

$$\int_a^b x^2 dx \quad \text{الف)} \quad \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2) dx \quad \text{ب)}$$

 **حل:**

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3$$

الف)

$$= \frac{a^3}{3}$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = x^2$$

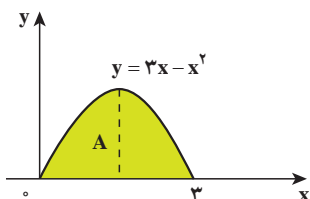
زیرا

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 \quad \text{ب)}$$

$$= \left(\frac{1}{3} (8) - \frac{3}{2} (4) + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} (-1) - \frac{3}{2} (1) + (-2) \right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

❖ **مثال:** مساحت ناحیه‌ای از صفحه‌ای که تحت نمودار تابع $y=3x-x^2$ بوده و در نقاط تقاطع با محور x ها به این محور محدود می‌باشد محاسبه کنید.



حل: ابتدا لازم است نقاط تقاطع منحنی نمودار تابع را با محور x ها مشخص کنیم

$$0 = 3x - x^2 = x(3 - x)$$

ریشه‌های این معادله $x=3$ و $x=0$ می‌باشند (شکل فوق). پس مساحت ناحیه مورد تقاضا برابر

$$A = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^3 \quad \text{است با:}$$

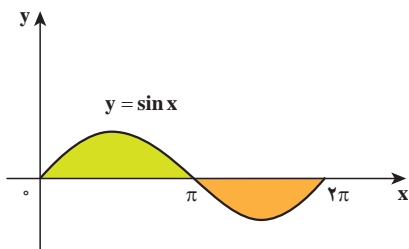
$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - (0 - 0)$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

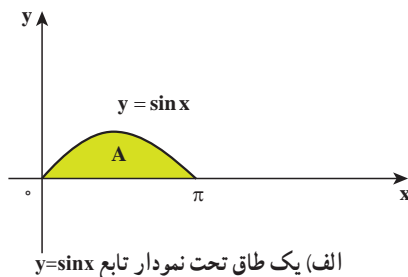
واحد سطح



الف) مساحت یک طاق تحت $y=\sin x$ را محاسبه کنید. (شکل زیر)
ب) در شکل (ب) مساحت ناحیه A را با استفاده از انتگرال به دست آورید.



شکل (ب)



الف) یک طاق تحت نمودار تابع $y=\sin x$

آیا حدس می‌زدید که مساحت یک طاق برابر ۲ واحد سطح باشد؟

توجه دارید که در حالی که انتگرال معین یک عدد است، مساحت یک کمیت هندسی است که به طور ضمنی با واحدهای اندازه‌گیری مربوط می‌شود، هرگاه واحدهای اندازه محورهای x و y بر حسب متر باشد، واحد سطح مساحت مربوطه بر حسب متر مربع خواهد بود. در صورتی که واحد محورهای x و y مشخص نباشد، اندازه مساحت ناحیه را می‌بایست به صورت واحد سطح بیان کرد.

ج) مساحت ناحیه R را که بالای خط $y=1$ و تحت نمودار $y = \frac{5}{x^2+1}$ می‌باشد به دست آورید. (شکل زیر)

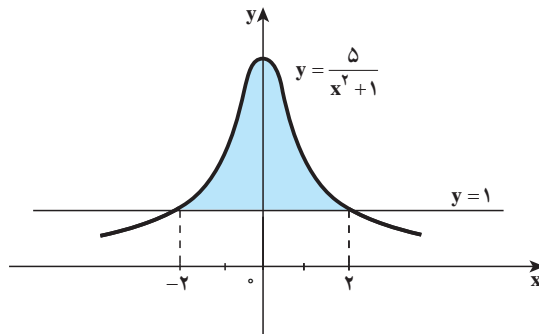
راهنمایی: ناحیه R مورد بحث در شکل زیر هاشور زده شده است. برای آنکه نقاط تقاطع

$$y = \frac{5}{x^2+1} \text{ و } y=1 \text{ را بیابیم باید معادله زیر را حل کنیم.}$$

$$y = \frac{5}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

پس $x^2+1=5$ یا $x^2=4$ ، در نتیجه طول نقاط تقاطع $x = \pm 2$ می‌باشد.

مساحت ناحیه R برابر است با مساحت زیر نمودار تابع



شکل ناحیه مورد محاسبه و به صورت رنگی مشخص شده است.

$y = \frac{5}{x^2+1}$ و محدود به محور x ها و خطوط به معادله‌های $x=2$ و $x=-2$ منهای مساحت مستطیل به طول ۴ و عرض ۱. اکنون معادله مساحت را بر حسب انتگرال نوشته و به محاسبه آن پردازید. هرگاه جواب $4 - \tan^{-1}(2) = A$ (واحد سطح) را به دست آورده باشید، کاملاً موفق شده‌اید.

نکته: توجه دارید که با استفاده از تقارن تابع (تابع زوج) می‌توانید حد پایین را صفر گرفته و ضریب ۲ را در انتگرال لحاظ کنید؛ قطعاً کار با صفر در محاسبه انتگرال معین ساده‌تر است از کار با -2 .

❖ مثال: مقدار میانگین تابع $f(x) = e^{-x} + \cos x$ را بر بازه $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ به دست آورید.

حل: طبق تعریف، عمل می‌کنیم 

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x} + \cos x) dx$$


$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{\pi} (-e^{-x} + \sin x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} (-1 + 0 + e^{\frac{\pi}{2}} + 1) = \frac{1}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

یک پرسش مهم

چون $\frac{d}{dx} (\ln |x|) = \frac{1}{x}$ برای $x \neq 0$ ، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{-1}^1 = 0 - 0 = 0$$

به قضیه اساسی یک بار دیگر توجه کنید و رفتار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $[-1, 1]$ در نظر بگیرید. پاسخ خود را با دلیل منطقی با دبیر خود مطرح کنید.

مثال: مشتق توابع زیر را به دست آورید. 

$$G(x) = x^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt \quad (\text{ب}) \quad F(x) = \int_x^3 e^{-t^2} dt \quad (\text{الف})$$

حل: 

$$F(x) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{-t^2} dt$$

الف) داریم

$$F'(x) = -e^{-x^2}$$

طبق قضیه اساسی

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt + x^2 \frac{d}{dx} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt \\ &= 2x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt + x^2 (e^{-(\Delta x)^2}) \times \Delta \end{aligned}$$

ب) بنابر قاعده زنجیری داریم

$$= 2x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt + \Delta x^2 e^{-2\Delta x^2}$$

مسائل

انتگرال‌های معین ۹-۱ را محاسبه کنید:

۱- $\int_1^2 x^3 dx$

۲- $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

۳- $\int_0^{\pi} (1 + \sin t) dt$

۴- $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x}$

۵- $\int_{-1}^1 (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}) dx$

۶- $\int_1^2 (\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}) dx$

۷- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

۸- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$

۹- $\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$

بعضی انتگرال‌های مقدماتی: چنانچه ملاحظه کرده‌ایم انتگرال معین را به ساده‌ترین شکل

ممکن می‌توان محاسبه کرد مشروط بر آنکه بتوانیم تابع اولیه (انتگرال نامعین) تابع تحت علامت انتگرال را محاسبه کنیم. در آنالیز مقدماتی روش‌هایی برای محاسبه انتگرال‌ها ارائه می‌گردد. معهذ باید اذعان کرد که عمل انتگرال‌گیری برخلاف مشتق‌گیری، همیشه کار آسانی نمی‌باشد، این امر از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان به آسانی توابعی عرضه کرد که برای آنها نتوان تابع اولیه‌ای پیدا کرد. برای مثال

می‌توانیم از تابع $f(x) = e^{x^2}$ نام ببریم که نمی‌توان تابعی مانند F پیدا کرد به قسمی که $F'(x) = f(x)$ در اینجا برای تسهیل بیشتر کار، تابع اولیه برخی از توابع را عرضه می‌کنیم. از این به بعد از تابع اولیه به عنوان انتگرال نامعین یا به طور خلاصه انتگرال نام برده و از علامت انتگرال (S کشیده) ولی بدون حدود بالا و پایین برای انتگرال استفاده می‌کنیم و با فرض اینکه C عدد ثابتی است داریم:

$$۱- \int 1 dx = x + c$$

$$۲- \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$۳- \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$۴- \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$۵- \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$۶- \int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c, r \neq -1$$

$$۷- \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$۸- \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$۹- \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$۱۰- \int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| + c$$

$$۱۱- \int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + c$$

$$۱۲- \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$



اکنون با استفاده از خواص خطی انتگرال و جدول انتگرال فوق بسیاری از انتگرال‌ها

را می‌توانید محاسبه کنید. برای نمونه انتگرال‌های $\int (x^5 - 3x + e^{3x} - 3) dx$ و

$\int (\sin 3x - \cos 2x) dx$ را محاسبه کنید.

درستی تساوی‌های فوق را در جدول انتگرال‌ها با مشتق‌گیری از طرف دوم محقق سازید.

مسائل

۱- پرسش‌های مفهومی

الف) معنی انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ را توضیح دهید.

ب) کدام یک از گزینه‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

۱- انتگرال نامعین یک عدد و انتگرال معین یک تابع است.

۲- انتگرال نامعین یک تابع و انتگرال معین یک عدد است.

۳- انتگرال معین و انتگرال نامعین فرقی با هم ندارند و تفاوت آنها فقط در یک عدد ثابت

است.

۴- برای محاسبه انتگرال معین، در بیشتر موارد، از انتگرال نامعین استفاده می‌کنیم. مجوز

این کار در قضیه ... آمده است.

ج) فرض کنیم f تابعی انتگرال‌پذیر بر بازه $[a, b]$ باشد، میانگین آن، یعنی

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

را تفسیر هندسی کنید.

د) فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده و جزء در تعداد متناهی نقطه از این بازه در سایر

نقاط آن پیوسته باشد. چنین تابعی را یک تابع **قطعه‌ای پیوسته** می‌نامند. (حد چپ و راست تابع f در

نقاط ناپیوستگی موجود باشد) آیا f بر $[a, b]$ انتگرال‌ناپذیر است؟ در صورتی که جوابتان مثبت است،

مقدار انتگرال f را توضیح دهید.

۲- انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{x} dx$

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \tan x) dx$

ت) $\int_0^1 |3x - 1| [3x] dx$

ب) $\int_0^2 |\sqrt{x} - 1| dx$

۳- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{2x^2} dx \quad \text{ب)} \quad \int \sin^4 x \cos^2 x dx \quad \text{الف)}$$

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{e^x} dx \quad \text{ت)} \quad \int \sqrt{(1 - \sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x}} dx \quad \text{پ)}$$

۴- مقدار میانگین تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ را بر بازه $[0, \pi]$ حساب کنید.
 ۵- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ب)} \quad \int \frac{(x+2)^3}{x} dx \quad \text{الف)}$$

۶- با مشتق‌گیری از طرف دوم تساوی‌های زیر درستی آنها را محقق کنید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c \quad a > 0 \quad \text{الف)}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c \quad a > 0 \quad \text{ب)}$$

۷- مساحت سطح محصور بین منحنی $f(x) = \frac{2 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ و محور x ها و خطوط $x=0$ و

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{را حساب کنید.}$$

۸- مساحت سطح محصور بین منحنی‌های $y^2 = 4x$ و $x^2 = 4y$ را حساب کنید.

۹- مساحت سطح محصور بین منحنی تابع $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$ و خطوط $y=x$ و $x=3$ و $x=k > 3$ را

بر حسب k حساب کرده و سپس حد این مساحت را وقتی $k \rightarrow +\infty$ به دست آورید.

۱۰- حاصل $\int_0^1 \sin^{-1}(x) dx$ را به دست آورید. (از نمودار $y = \sin^{-1} x$ در بازه $[0, 1]$ و نمودار

$y = \sin x$ در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ کمک بگیرید)



ملاحظه کردیم که در تعریف انتگرال معین افراز بازه انتگرال‌گیری و عبارت‌های $\int m_i \Delta x_i$ و یا $M_i \Delta x_i$ نقش اساسی داشتند. وقتی تعداد نقاط افراز زیاد و زیادتر می‌شود Δx_i کوچک و کوچک‌تر می‌گردد زیرا $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. بنابراین هر یک از m_i یا M_i را

می‌توان با عرض هر نقطه در بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ مانند l_i تقریب کرد. در نتیجه مثلاً $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ به صورت $\sum_{i=1}^n f(l_i) \Delta x_i$ در خواهد آمد. از طرف دیگر وقتی n به ∞ میل می‌کند $\Delta x_i \rightarrow 0$ پس سیگمای مورد بحث ما که در حد به $\int_a^b f(x) dx$ میل می‌کند. شامل تعداد بسیار زیاد جمله به صورت $\Delta x_i f(l_i)$ است که در آنها Δx_i فوق‌العاده کوچک‌اند (زیرا حد آنها صفر است). اما عرض‌ها یعنی $f(l_i) \Delta x_i$ ها محدودند پس $f(l_i) \Delta x_i$ نیز فوق‌العاده کوچک‌اند. ریاضیدانانی که در آغاز انتگرال را کشف کردند. بدان، بدین گونه می‌نگریستند:

مجموعی با بی‌نهایت جمله از جملات بی‌نهایت کوچک: در واقع نیوتن و لایبنیتز که هر دو واضعان حساب مشتقات و حساب انتگرال (حسابان) به شمار می‌روند، این حساب را با حساب بی‌نهایت کوچک‌ها و عبارت‌هایی از این دست سامان دادند. به دلیل مشکلات و نابسامانی‌هایی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با مفاهیم بی‌نهایت کوچک‌ها بروز کرد، ریاضیدانان بعد از نیوتن و لایبنیتز کوشیدند تا این نابسامانی‌ها را از آنالیز بزدایند. سرانجام پس از حدود یکصد سال از کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیدان آلمانی به نام کارل وایراشتراس توانست حسابان را به شکل امروزی با استفاده از مفهوم حد سامان دهد.

درواقع خیلی پیش از نیوتن و لایبنیتز حدود سال ۱۰۴۱ میلادی ابن‌الهیتم (Ibn al-Haitam) یک ریاضیدان مسلمان به کشف حساب بی‌نهایت کوچک‌ها نایل شده بود و متعاقب وی ابوسهل کوهی و ثابت بن قره در مطالعه و بررسی‌های مربوط به محاسبه حجم سهموی با انتگرال $\int_a^t t^4 dt$ درگیر شدند.

مراجع

- ۱- زنگنه؛ حمیدرضا؛ نادری؛ امیر؛ حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیره انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان
- ۲- مدقالچی، علیرضا؛ آنالیز ریاضی ۱، انتشارات دانشگاه پیام نور تهران
۱۳۸۶
- ۳- جیمز استوارت، حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتشارات فاطمی چاپ اول
۱۳۸۸
- ۴- رولاند ای لارسن، رابرت بی هوستلر، حساب دیفرانسیل و انتگرال جلد اول، ترجمه - علی اکبر عالم زاده - نشر اتحاد
- ۵- سیاوش شهشهانی، حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول) انتشارات فاطمی چاپ اول ۱۳۸۶
- 6- Adams, Robert A. Calculus, A complete Course, Pearson Education Canada Inc, Toronto, 2003
- 7- Anton, Howard; Bivens, Irl; Davis, Stephen; Calculus, 9th edition, Wiley (Asia) Pte Ltd, 2010.

