تمرین در کلاس

نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ را در دامنه‌اش بیابید.

۲ـ قضیه نقطه بحرانی: فرض کنیم تابع f روی بازه I تعریف شده و c نقطه درونی بازه I است، اگر $f(c)$ مقدار اکسترمم تابع، آنگاه باید c نقطه **بحرانی** باشد یعنی c یکی از موارد زیر باشد:

الف) c یک نقطهٔ درونی بازه I، به‌طوری که $f'(c)=0$

ب) c یک نقطهٔ درونی بازه I و $f'(c)$ موجود نباشد.

برهان: ابتدا فرض کنیم $f(c)$ مقدار ماکسیمم f روی بازه I و c نقطه درونی بازه I و $f'(c)$ موجود باشد.

ثابت می کنیم $f'(c)=0$ است

چون $f(c)$ مقدار ماکسیمم f است. پس برای هر x در I، $f(x)\le f(c)$ و یا $f(x)-f(c)\le 0$

اگر $x<c$ یا $x-c<0$ آن وقت

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$$

و اگر $x>c$ آن وقت

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$$

و امّا $f'(c)$ موجود است بنابراین

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_-(c)=f'^-(c)\ge 0 \quad (۱)$$

(چرا؟)

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_+(c)=f'(c)\le 0 \quad (۲)$$

(چرا؟)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $f'(c)=0$

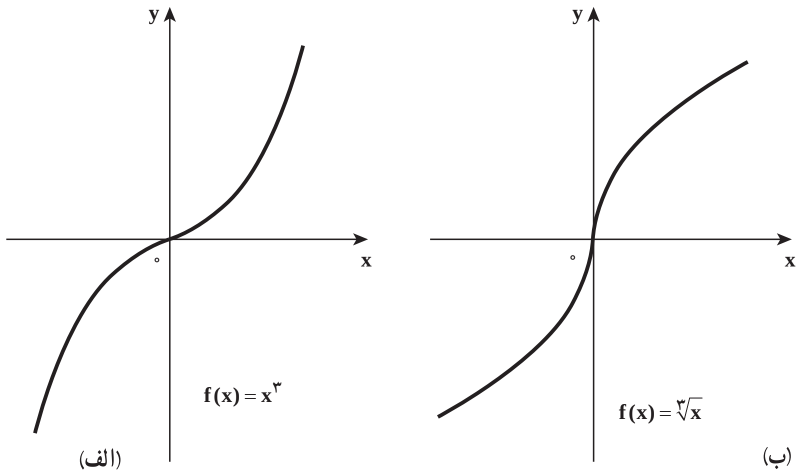
تمرین در کلاس

در حالتی که $f(c)$ مقدار مینیمم تابع است، قضیه را ثابت کنید.

البته باید توجه داشت که هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترمم نیست.

به‌عنوان نمونه برای تابع f با ضابطه $f(x)=x^3$ داریم $f'(0)=0$ پس $x=0$ نقطه بحرانی تابع f است و این تابع نه مقدار ماکسیمم و نه مقدار مینیمم دارد (شکل ۳ــ۳۰ قسمت الف)

همچنین نقطه $x=0$ نقطه بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است زیرا $f'(0)$ موجود نیست. (شکل ۳ــ۳۰ قسمت ب)



شکل ۳ــ۳۰

مسأله: چگونه می‌توانیم مقادیر اکسترمم تابع را پیدا کنیم.

با استفاده از قضایای ۱ و ۲ می‌توانیم مقادیر اکسترمم تابع f را که روی بازه بسته I پیوسته است به شرح زیر پیدا کنیم.

گام اوّل: پیدا کردن نقاط بحرانی f روی بازه بسته I

گام دوم: محاسبه مقدار f در هر یک از نقاط بحرانی و نقاط انتهایی در بازه بسته I و از بین مقادیر به‌دست آمده، بزرگ‌ترین آنها مقدار ماکسیمم و کوچک‌ترین آنها مقدار مینیمم تابع f روی بازه بسته I می‌باشد.

مثال: مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع f با ضابطه $f(x)=-2x^3+3x^2$ را روی بازه $[-\frac{1}{2},2]$ بیابید.

حل: در مثال (۲) نقاط بحرانی این تابع را که عبارت‌اند از ۱ و ۰ به‌دست آوردیم، و به‌ازای این اعداد داریم:

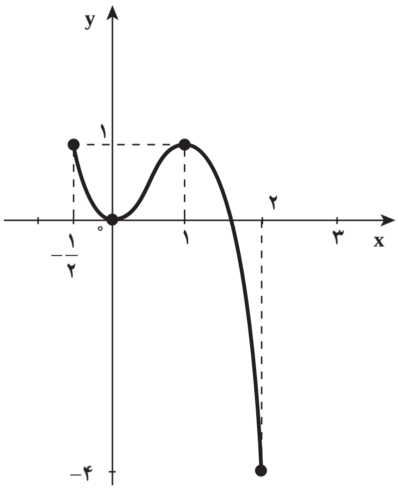
$f(\circ)=\circ$ و $f(۱)=۱$

مقادیر تابع در نقاط انتهایی عبارتند از :

$f(-\frac{۱}{۲})=۱$ و $f(۲)=-۴$

بنابراین مقدار ماکسیمم تابع برابر ۱ می‌باشد که در نقاط $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ رخ می‌دهد و ۴− مقدار مینیمم تابع است که در نقطهٔ ۲ اتفاق می‌افتد.

در شکل ۳ــ۳۱ نمودار تابع f روی بازه $[-\frac{۱}{۲},۲]$ رسم شده است.



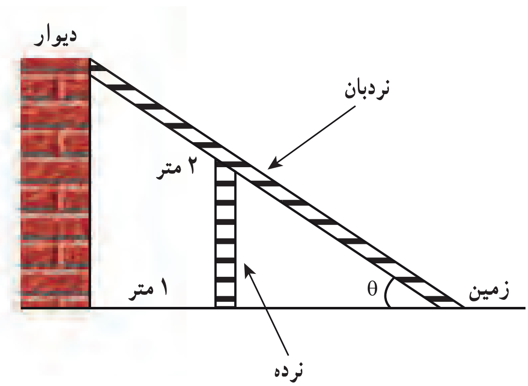
شکل ۳ــ۳۱

تمرین در کلاس

در مثال ۱، مقدار x را چنان حساب کنید که مقدار حجم (V) بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

قابل ذکر است که یکی از مهم‌ترین کاربردهای مشتق در مسائل «**بهینه‌سازی**» است که در آنها کمیتی باید ماکسیمم یا مینیمم گردد (مانند مثال ۱ همراه با فعالیت)، مثال‌هایی از این نوع در زندگی روزمره فراوان است.

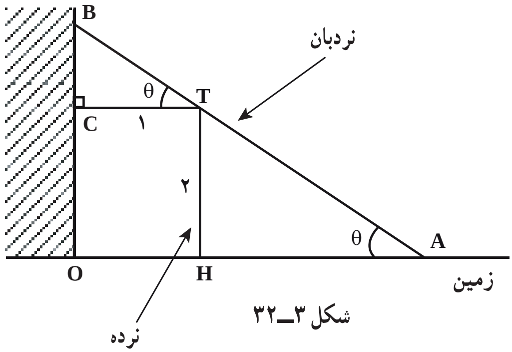
مثال : در شکل ۳ــ۳۱ یک نرده به ارتفاع ۲ متر و به‌طور قائم بر زمین، به فاصلهٔ ۱ متر از یک دیوار قائم قرار دارد. طول کوتاه‌ترین نردبانی را تعیین کنید که از روی نردهٔ به ارتفاع ۲ متر گذشته و یک سر آن روی زمین و خارج نرده و سر دیگر آن مماس بر دیوار قائم باشد.



شکل ۳ــ۳۱

حل : اندازهٔ زاویه AB (نردبان) با زمین را θ فرض می‌کنیم و طول نردبان (L) را به‌صورت تابعی از θ به‌دست می‌آوریم (شکل ۳ــ۳۲)

$(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$.



شکل ۳ــ۳۲

$$AB = BT + TA$$

در مثلث‌های قائم الزاویهٔ $A\overset{\Delta}{H}T$ و $T\overset{\Delta}{C}B$ داریم :

$$\sin\theta = \frac{2}{AT} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{1}{BT}$$

بنابراین

$$L = L(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{2}{\sin\theta}$$

$$L'(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^3\theta - 2\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$L'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin^3\theta - 2\cos^3\theta = 0 \Rightarrow \tan^3\theta = 2 \quad \text{یا} \quad \tan\theta = \sqrt[3]{2}$$

و یا $\theta_0 = \tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$ که نقطهٔ بحرانی تابع L است.

θ	0		$\tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$		$\frac{\pi}{2}$
$L'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$L(\theta)$	$+\infty$	$\searrow$	$L(\theta_0)$ Min	$\nearrow$	$+\infty$

در نتیجه به ازای $\theta_0 = \tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$ مقدار مینیمم $L(\theta)$ به‌دست می‌آید. و اگر بخواهیم طول کوتاه‌ترین نردبان را حساب کنیم، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sqrt[3]{4}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}$$

و

$$\sin\theta=\tan\theta.\cos\theta=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۴}}}$$

در نتیجه، مقدار مینیمم مطلق $L(\theta)$ روی بازه $(\circ,\frac{\pi}{۲})$ عبارت است از

$$L(\theta_\circ)=\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۴}}+\frac{۲\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۴}}}{\sqrt[۳]{۲}}\approx ۴/۱۶$$

بنابراین طول کوتاه‌ترین نردبانی که بتوان یک سر آن را از بالای نرده به دیوار تکیه داد و سر دیگرش بر زمین و خارج نرده باشد، تقریباً ۴/۱۶ متر است.

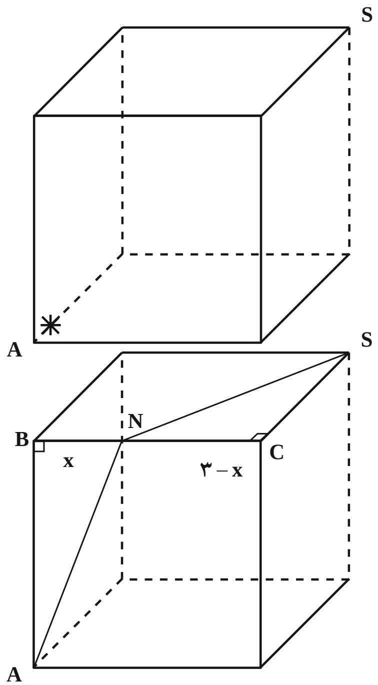
تمرین در کلاس

نشان دهید که در بین همه مثلث‌های متساوی‌الساقینی که محیط یکسانی دارند، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.

مثال: (مسأله کوتاه‌ترین مسیر عنکبوت) مطابق شکل ۳ــ۳۳ یک عنکبوت در گوشه S از سقف اتاق مکعب شکل که هر ضلع آن ۳ متر است قرار دارد و می‌خواهد یک سوسک که در گوشه مقابل او (A) روی کف اتاق خوابیده است را شکار کند. عنکبوت مجبور است روی سقف اتاق حرکت کند (نمی‌تواند پرواز کند) و سپس روی دیوارها یا کف اتاق راه برود، او می‌خواهد کوتاه‌ترین مسیر برای شکار سوسک را پیدا کند. او را راهنمایی کنید. فراموش نکنید که معمولاً موجودات به‌طور غریزی کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب می‌کنند.

حل: به کمک مشتق و تعیین کمترین مسیر فرض کنیم مسیر عنکبوت از S به N و از N به A باشد

طول مسیر $d=SN+NA$



شکل ۳ــ۳۳

اگر BN=x فرض کنیم، آنگاه NC=۳−x بنابراین

$$d(x)=\sqrt{(۳-x)^۲+۹}+\sqrt{x^۲+۹}$$ تابع طول مسیر

$$d'(x)=\frac{-۲(۳-x)}{۲\sqrt{۹+(۳-x)^۲}}+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}}=\frac{-(۳-x)\sqrt{۹+x^۲}+x\sqrt{۹+(۳-x)^۲}}{\sqrt{۹+(۳-x)^۲}\times\sqrt{x^۲+۹}}$$

$$d'(x)=۰\Rightarrow x\sqrt{۹+(۳-x)^۲}=(۳-x)\sqrt{۹+x^۲}$$

طرفین معادله را به توان ۲ رسانده و پس از ساده کردن و حذف جمله‌های مساوی از طرفین معادله داریم :

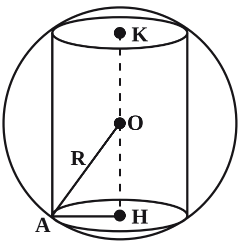
نقطه بحرانی بازه (۳و۰) $\quad ۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

x	۰		$\frac{۳}{۲}$		۳
$d'(x)$		−	۰	+	
$d(x)$	$۳(۱+\sqrt{۲})$	↘	$۳\sqrt{۵}$	↗	$۳(۱+\sqrt{۲})$

بنابراین کوتاه‌ترین مسیر وقتی است که N وسط ضلع BC باشد. مقدار مینیمم طول مسیر $۳\sqrt{۵}$ است.

قابل ذکر است که این مسأله با یک راه حل کوتاه و سادهٔ هندسی حل می‌شود. حل مسأله را از راه هندسی انجام دهید.

مثال: می‌خواهیم در کره‌ای به شعاع R یک استوانه دوار قائم محاط کنیم که بزرگ‌ترین حجم را داشته باشد، در این صورت شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را بیابید.



شکل ۳ـ۳۴

حل : فرض کنیم استوانه موردنظر دارای شعاع r و ارتفاع h می‌باشد و KH=h و AH=r و به علت تقارن مرکز کره نقطه O وسط KH است (شکل ۳ـ۳۴). بنابراین

$$\overset{\Delta}{OHA}:\frac{h^۲}{۴}+r^۲=R^۲$$

و حجم استوانه برابر است با :

$$V=\pi r^۲h=\pi h(R^۲-\frac{h^۲}{۴})\text{ ، }۰\le h\le ۲R$$

واضح است که اگر $h=0$ یا $h=2R$ باشد، $V=0$، بنابراین نقاط بحرانی تابع حجم استوانه را برحسب متغیر h در بازه $(0, 2R)$ پیدا می‌کنیم.

نقطه بحرانی $V'(h)=\pi(R^2-\frac{h^2}{4}-\frac{h^2}{2})=0 \Rightarrow h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$

h	0		$\frac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

بنابراین تابع حجم استوانه در بازه $[0,2R]$ به ازای $h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$ و $r=\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ مقدار ماکسیمم حجم آن $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ است.

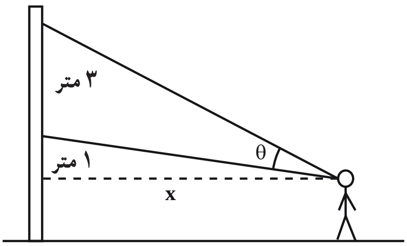
مسائل بهینه‌سازی

۱ــ مجموع دو عدد مثبت برابر ۹ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل‌ضرب آنها را پیدا کنید.

۲ــ حاصل‌ضرب دو عدد مثبت برابر ۸ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را پیدا کنید.

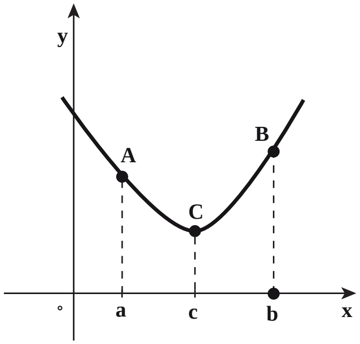
۳ــ مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که در نیم دایره‌ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم دایره قرار دارد.

۴ــ (بهترین دید از یک نقاشی دیواری)
شخصی باید در چه فاصله‌ای از یک نقاشی دیواری به ارتفاع ۳ متر بایستد تا بهترین دید را از آن داشته باشد (شکل روبه‌رو)، با این فرض که پایین نقاشی ۱ متر بالاتر از خط دید شخص است.



۵ــ قرار است محوطه‌ای مستطیل شکل برای نگهداری گوسفندها ساخته شود، یک طرف این محوطه دیوار طویلی است که از قبل وجود داشته است و سه طرف دیگر آن‌را باید نرده‌گذاری کنیم. اگر ۱۵۰ متر نرده در اختیار داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای محوطه مورد نظر چقدر است؟

تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید : با مشاهده نمودار تابع f در شکل ۳ــ۳۵ وقتی نقطه‌ای در امتداد منحنی از A به C برود مقادیر تابع با افزایش طول کاهش می‌یابند، و وقتی نقطه در امتداد منحنی از C به B برود، مقادیر تابع با افزایش طول افزایش می‌یابند در این صورت گوییم f بر بازهٔ [a, c] نزولی اکید و بر بازه [c, b] صعودی اکید است.



شکل ۳ــ۳۵

ذیلاً تعاریف تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید و تابع ثابت بر یک بازه را بیان می کنیم.

تعریف ۳:

الف) تابع f روی بازه I **صعودی اکید** است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

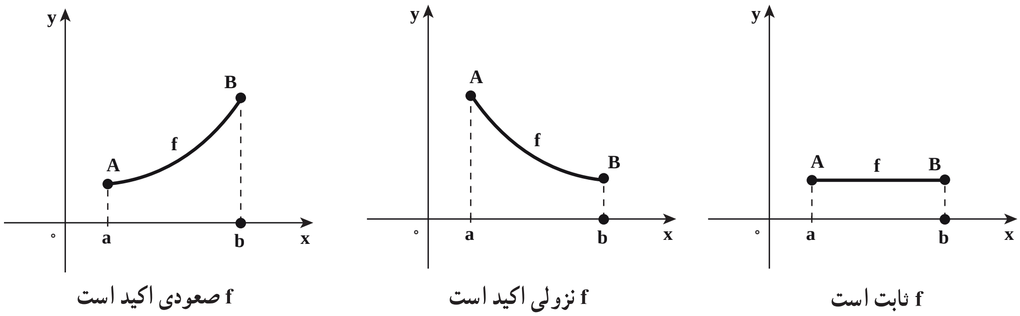
ب) تابع f روی بازه I **نزولی اکید** است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

پ) تابع f روی بازه I ثابت است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$f(x_1)=f(x_2)$$

برای یادگیری بهتر تعریف بالا نمودارهای شکل ۳ــ۳۶ را ببینید. I=[a,b]



شکل ۳ــ۳۶

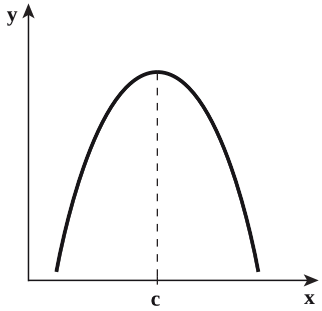
با توجه به تعریف بالا، تابع f روی بازه I **اکیداً یکنوا**ست، اگر روی بازه I یا صعودی اکید و یا نزولی اکید باشد.

فعالیت

نمودار تابع f در شکل ۳ــ۳۷ را درنظر بگیرید.

الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌ای شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌ای شیب مماس‌ها منفی است.

ب) تعیین کنید در چه بازه‌ای مشتق f مثبت است و در چه بازه‌ای مشتق f منفی است.



شکل ۳ــ۳۷

پ) از اینکه $f'(x)$، میزان تغییر مقادیر $f(x)$ نسبت به x است، با درنظر گرفتن علامت $f'(x)$، معلوم کنید تابع f در چه بازه‌ای صعودی اکید است و در چه بازه‌ای نزولی اکید است.

نتایج به‌دست آمده در فعالیت بالا به ما کمک می‌کند که قضیه زیر را بیان کنیم.

۳ـ قضیه ۳: فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این‌صورت

الف) اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x)>0$، آنگاه تابع f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b)، $f'(x)<0$، آنگاه تابع f، بر بازه $[a,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b)، $f'(x)=0$، آنگاه تابع f بر بازه $[a,b]$ ثابت است.

این قضیه به ما اجازه می‌دهد که بررسی کنیم، یک تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌ای ثابت است.

مثال: مشخص کنید تابع f با ضابطه $f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$ در کجاها صعودی اکید و در کجاها نزولی اکید است.

حل: ابتدا مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

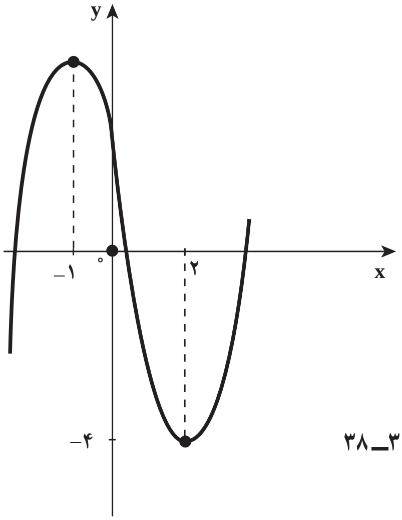
$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

عبارت $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

طبق قضیه فوق تابع f در بازه $(-1,2)$ نزولی اکید و در هر یک از بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(2,+\infty)$ صعودی اکید است و نمودار f به شکل ۳ــ۳۸ است :

در نقاط ۱− و ۲ که مشتق تابع صفر است خط مماس افقی است.



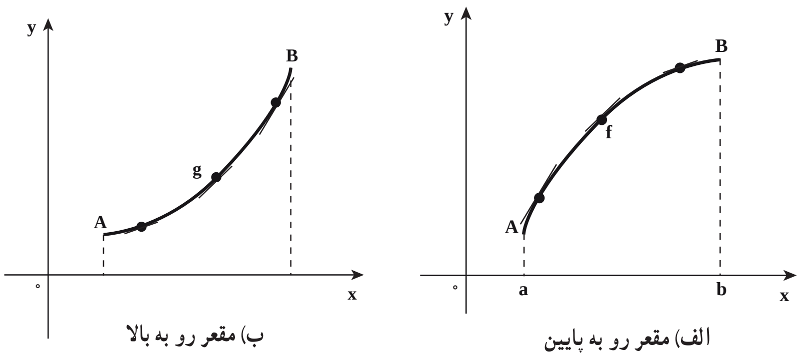
شکل ۳ــ۳۸

تمرین در کلاس

تـابع f بـا ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در چه بـازه‌ای صعودی اکید و در چه بازه‌ای نزولی اکید است؟

۳ــ۱۳ـ مشتق دوم و تقعر نمودار تابع

در شکل ۳ــ۳۹ نمودار دو تابع صعودی اکید روی بازه I رسم شده‌اند. هر دوی این نمودارها دونقطه A و B را بهم وصل می‌کنند. امّا متفاوت به نظر می‌رسند زیرا نمودار f پایین خط‌های مماسی است که در نقاط مختلف f رسم شده‌اند و منحنی f را روی بازه I مقعر رو به پایین می‌نامیم. و امّا نمودار g بالای خط‌های مماسی است که در نقاط مختلف g رسم شده‌اند و منحنی g را روی بازه I مقعر رو به بالا می‌نامیم.



ب) مقعر رو به بالا

الف) مقعر رو به پایین

شکل ۳ــ۳۹

تعریف ۴:

الف) اگر نمودار f روی بازهٔ I بالای همهٔ مماس‌هایش باشد آنگاه نمودار f را **مقعر رو به بالا** می‌نامیم.

ب) اگر نمودار f روی بازهٔ I پایین همهٔ مماس‌هایش باشد، آنگاه نمودار f را **مقعر رو به پایین** می‌نامیم.

اکنون ببینیم مشتق دوم چه کمکی به مشخص کردن تقعر نمودار در یک بازه می‌کند.

فعالیت

با مشاهده شکل (۳ــ۳۹) به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) در قسمت (الف) (شکل۳ــ۳۹) با حرکت از چپ به راست شیب مماس‌ها کم می‌شوند یا زیاد و در نتیجه تابع f' (تابع مشتق) تابعی است نزولی اکید یا صعودی اکید.

ب) در قسمت (ب) (شکل۳ــ۳۹) با حرکت از چپ به راست شیب مماس‌ها کم می‌شوند یا زیاد و در نتیجه تابع g' تابعی است نزولی اکید یا صعودی اکید.

پ) علامت $f''(x)$ و $g''(x)$ را در بازه (a,b) تعیین کنید. نتایج به‌دست آمده در فعالیت بالا به ما کمک می‌کند که قضیه زیر را بیان کنیم.

۴ـ قضیه تقعر: فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر x از بازهٔ باز I موجود باشد

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > ۰$ آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < ۰$ آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

مثال: تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{۱}{۳}x^{۳} - x^{۲} - ۳x + ۴$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید است و روی چه بازه‌هایی نمودار f تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

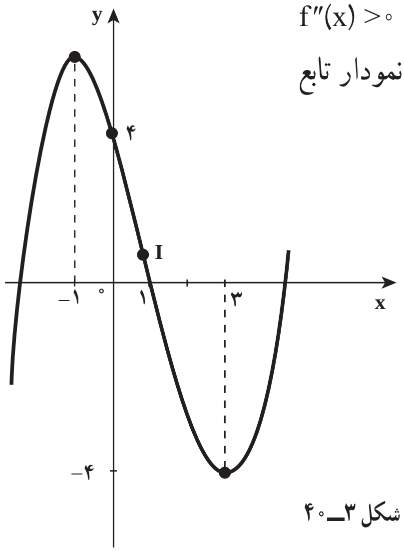
حل:

$$f'(x)=x^{۲}-۲x-۳=(x+۱)(x-۳)$$

$$f''(x)=۲x-۲=۲(x-۱)$$

با تعیین علامت عبارت $(x+۱)(x-۳)$ معلوم می‌شود تابع f روی بازه $[-۱,۳]$ نزولی اکید و روی هر یک از بازه‌های $(-\infty,-۱]$ و $[۳,+\infty)$ صعودی اکید است. و روی بازه $(-\infty,۱)$، $f''(x) < ۰$ و تقعر

منحنی رو به پایین است و روی بازه $(1,+\infty)$، $f''(x) > 0$ و تقعر منحنی رو به بالا است . شکل ۳ـ۴۰ نمودار تابع f است.



شکل ۳ـ۴۰

تمرین در کلاس

تابع f با ضابطه $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید و روی چه بازه‌هایی تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

در مثال (۹) جهت تقعر نمودار f در نقطه $I(1,\frac{1}{3})$ تغییر می‌کند، به‌طوری که روی بازه $(-\infty,1)$ تقعر نمودار رو به پایین است و روی بازه $(1,+\infty)$ تقعر رو به بالا است و خط مماس در نقطهٔ I به معادله $y = -4x + \frac{13}{3}$ می‌باشد چنین نقطه‌ای را نقطه عطف نمودار تابع می‌نامیم.

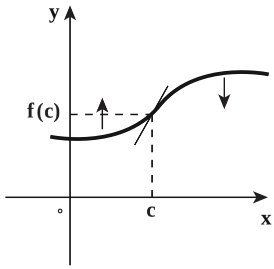
تعریف ۵: فرض کنیم تابع f در $x=c$ پیوسته باشد

در این‌صورت نقطهٔ $(c\,,f(c))$ **نقطهٔ عطف** نمودار تابع f است (یا تابع f در c نقطه عطف دارد) هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند :

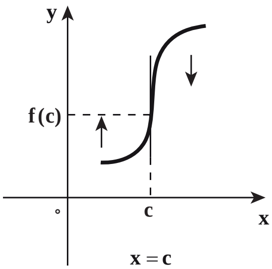
الف) نمودار f در نقطهٔ $(c\,,f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) تقعر f در نقطه $(c\,,f(c))$ از رو به بالا به رو به پایین (یا به عکس) تغییر نماید.

توجه داشته باشید که از شرط (الف) نتیجه می‌شود که یا f در c مشتق‌پذیر است یا نمودار آن در این نقطه خط مماس قائم دارد (شکل ۳ــ۴۱)



الف) $m=f'(c)$ شیب خط مماس



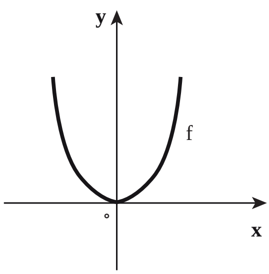
ب) x=c مماس قائم

شکل ۳ــ۴۱

از شرط (ب) نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع در c از نمودار عبور می‌کند. (شکل ۳ــ۴۱)

چون نقطهٔ عطف جایی است که تقعر نمودار تغییر می‌کند، باید علامت $f''(x)$ در این نقاط تغییر نماید. بنابراین در نقاط عطف تابع یا $f''(c)=0$ (شکل ۳ــ۴۱ قسمت الف) و یا $f''(c)$ تعریف نشده است (قسمت ب شکل ۳ــ۴۱)

امّا شرط $f''(c)=0$ وجود نقطه عطف برای نمودار تابع f در c را نتیجه نمی‌دهد. به‌عنوان مثال در تابع f با ضابطه $f(x)=x^4$ داریم $f''(x)=12x^2$ و $f''(0)=0$ ولی $f''(x)$ در ∘ تغییر علامت نمی‌دهد و در دامنه‌اش تقعر آن رو به بالا است پس $(0,0)$ نقطه عطف f نیست. (شکل ۳ــ۴۲)



شکل ۳ــ۴۲

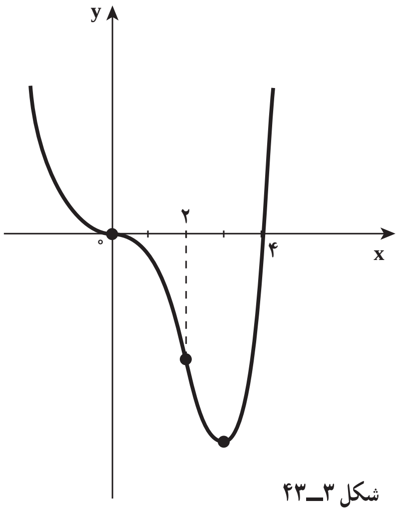
مثال: جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^4-4x^3$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقاط عطف آن‌را به‌دست آورید.

حل:

$$f'(x)=4x^3-12x^2$$

$$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$$

x	$-\infty$	∘		۲	$+\infty$
علامت $f''(x)$	+	∘	−	∘	+
جهت تقعر f	روبه بالا		روبه پایین		روبه بالا



شکل ۳ـ۴۳

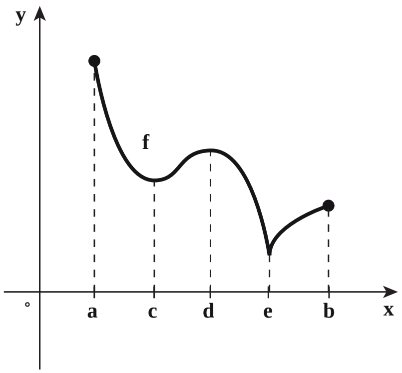
$m=f'(0)=0$ شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ ۰ و $m=f'(2)=-16$ شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ ۲

چون در نقاط $(0,0)$ و $(2,-16)$ خط مماس وجود دارد و در این نقاط جهت تقعر منحنی عوض می‌شود، لذا $(0,0)$ و $(2,-16)$ نقاط عطف f هستند. و نمودار f به شکل ۳ـ۴۳ است.

تمرین در کلاس

جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقطه عطف آن‌را به‌دست آورید.

۳ـ۱۴ـ ماکسیمم و مینیمم موضعی (نسبی)



شکل ۳ـ۴۴

می‌دانید که مقدار ماکسیمم تابع (درصورت وجود) روی مجموعه $D=[a,b]$ به‌عنوان دامنه، بزرگ‌ترین مقدار تابع روی مجموعه D است که آن‌را مقدار ماکسیمم (و یا مقدار ماکسیمم سراسری یا مطلق) می‌نامیم.

در شکل ۳ـ۴۴، $f(a)$ مقدار ماکسیمم مطلق f روی بازه $[a,b]$ است.

با توجه به مطالب بالا در مورد $f(d)$ چه می‌توان گفت؟

اگر $f(a)$ را به عنوان قهرمان دوی ۱۰۰ متر در سراسر کشور ایران تصور کنیم، $f(d)$ را می‌توان قهرمان دو ۱۰۰ متر در یک منطقه از کشور تصور کرد و به زبان ریاضی $f(d)$ مقدار ماکسیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به مرکز d نامیده می‌شود.

به طریق مشابه $f(e)$ مقدار مینیمم سراسری مجموعه D است و آن‌را مقدار مینیمم مطلق f روی مجموعه D نیز می‌گویند. و $f(c)$ مقدار مینیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به‌مرکز c است بدیهی است که $f(e)$ نیز مقدار مینیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به‌مرکز e می‌باشد.

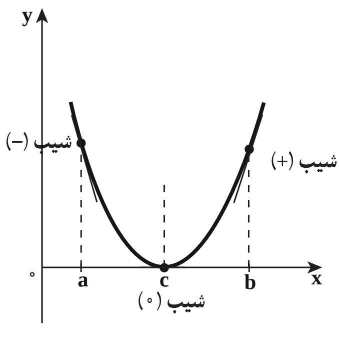
تعریف ۶: فرض کنیم D دامنه تابع f که شامل نقطهٔ c است، می‌گوییم :

الف) $f(c)$ یک مقدار **ماکسیمم موضعی** تابع f است، هرگاه عددی مانند $r>0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر x متعلق به دامنه f و $|x-c|<r$، $f(x)\leq f(c)$

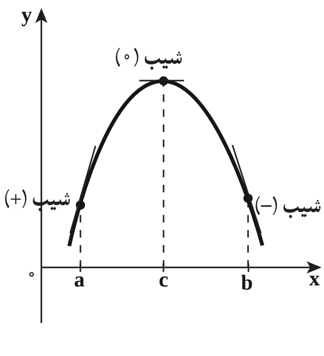
ب) $f(c)$ یک مقدار **مینیمم موضعی** تابع f است، هرگاه عددی مانند $r>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر x متعلق به دامنه f و $|x-c|<r$، $f(x)\geq f(c)$

پ) $f(c)$ یک مقدار **اکسترمم موضعی** (نسبی) تابع f است که یا مقدار ماکسیمم موضعی و یا مقدار مینیمم موضعی تابع f باشد.

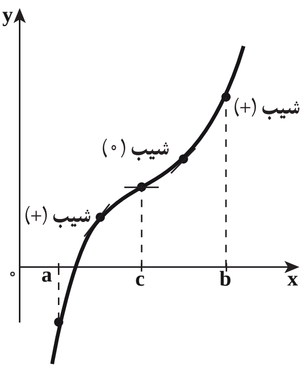
در شکل ۳ــ۴۴ مشاهده می‌شود که تابع f در نقاط a و d و b دارای ماکسیمم موضعی و در نقاط c و e دارای مینیمم موضعی است و از بین نقاط بحرانی درون بازه، نقاط اکسترمم موضعی به‌دست می‌آیند ولی ادعا نمی‌کنیم که هر نقطه بحرانی، یک اکسترمم موضعی است. شکل ۳ــ۴۵ قسمت (پ) این را روشن می‌کند.



(الف) مینیمم موضعی



(ب) ماکسیمم موضعی

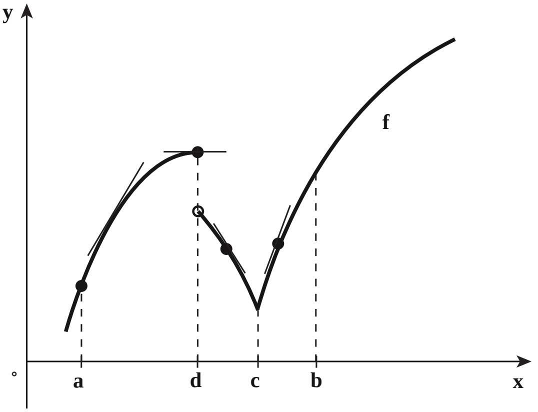


(پ) مقدار اکسترمم موضعی وجود ندارد

شکل ۳ــ۴۵

از شکل ۳ــ۴۵ معلوم است که در قسمت (الف) روی بازه (a,c) مشتق منفی است و روی بازه

(c,b) مشتق مثبت است و در نقطهٔ c مینیمم موضعی داریم و در قسمت (ب) که روی بازه (a,c) مشتق مثبت و روی بازه (c,b) مشتق منفی است در نقطهٔ c ماکسیمم موضعی داریم و البته در نقاط اکسترمم موضعی شکل ۳ــ۴۵، $f'(c)=0$ است و امّا قابل ذکر است که لزومی ندارد در نقاط اکسترمم موضعی تابع مشتق داشته باشد (شکل ۳ــ۴۶ را ببینید).



شکل ۳ــ۴۶ــ تابع در x=c مشتق ندارد و در این نقطه مینیمم موضعی دارد.

در این شکل، روی بازه (c,b) مشتق مثبت و روی بازه (d,c) مشتق منفی است و $f'(c)$ موجود نیست (تابع در نقطه c بازگشتی است) و $f(c)$ مقدار مینیمم موضعی است. روی بازه (d,c) مشتق تابع منفی و روی بازه (a,d) مشتق مثبت است و $f(d)$ مقدار ماکسیمم موضعی است ضمن اینکه تابع در نقطهٔ d ناپیوسته و در نتیجه مشتق ندارد.

این تجربیات مبنای آزمون زیر است.

آزمون مشتق اوّل

فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که بر بازهٔ باز $I=(a,b)$ شامل c پیوسته است.

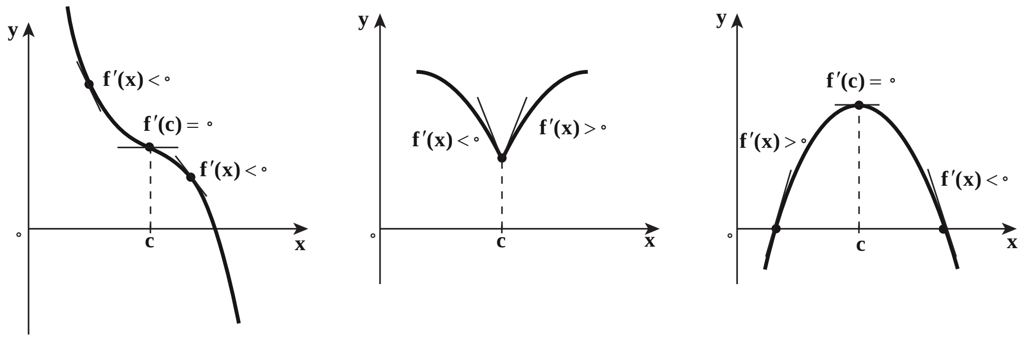
هرگاه بر این بازه، جز احتمالاً در نقطه c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت :

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه (a,c)، $f'(x)>0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه (c,b)، $f'(x)<0$، آنگاه $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه (a,c)، $f'(x)<0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه (c,b)، $f'(x)>0$، آنگاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد آنگاه $f(c)$، نه مقدار مینیمم موضعی است و نه مقدار ماکسیمم موضعی است.

با تجسم کردن نمودارهای شکل‌های صفحه بعد و شکل ۳ــ۴۷ به سادگی می‌توان آزمون مشتق اوّل را به‌خاطر سپرد.



اکسترمم موضعی ندارد — f(c) مقدار مینیمم موضعی f′(c)موجود نیست — f(c) مقدار ماکسیمم موضعی

شکل ۳ــ۴۷

مثال: مقادیر اکسترمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}$ را روی بازه $(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$ پیدا کنید.

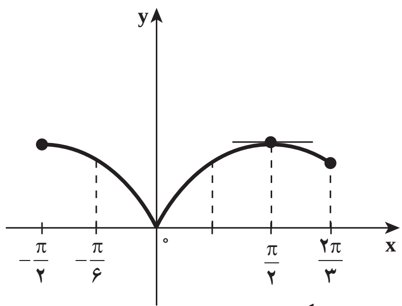
حل:

$$f'(x)=\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}} \ ,\ x\neq 0$$

به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ که در بازهٔ $(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$ است، $f'(x)=0$ پس $x=\frac{\pi}{2}$ یک نقطه بحرانی تابع f است و $x=0$ ریشهٔ مخرج کسر $f'(x)$ است پس $f'(0)$ موجود نیست و $x=0$ نقطهٔ بحرانی f است که در بازه $(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$ قرار دارد.

به ازای هر x از بازه $(-\frac{\pi}{6},0)$ ، $f'(x)<0$ و برای هر x از بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ ، $f'(x)>0$ بنابراین طبق آزمون مشتق اوّل $f(0)=0$ یک مقدار مینیمم موضعی تابع f است.

چون به ازای هر x از بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ ، $f'(x)>0$ و برای هر x از بازه $(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$ ، $f'(x)<0$ پس بنابر آزمون مشتق اوّل $f(\frac{\pi}{2})=1$ یک مقدار ماکسیمم موضعی تابع f است. نمودار f روی بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$ به شکل ۳ــ۴۸ است.



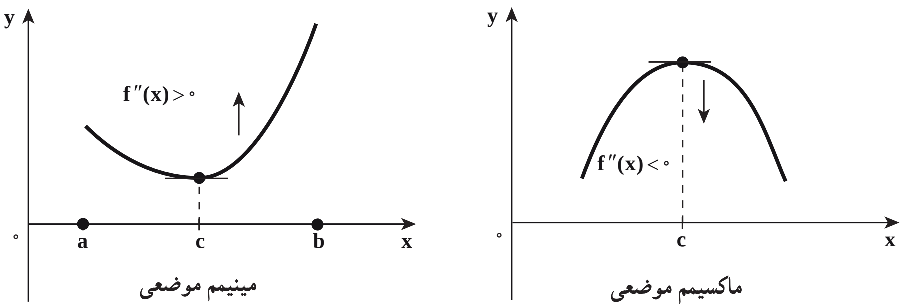
شکل ۳ــ۴۸

تمرین در کلاس

مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{۳}x-۲\cos x$ را روی بازه $(۰,۲\pi)$ پیدا کنید.

آزمون مشتق دوم : گاهی می‌توان از مشتق دوم برای انجام آزمون ساده‌ای برای مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی استفاده کرد.

این آزمون مبتنی بر این است که اگر تابع f چنان باشد که $f'(c)=۰$ و بازهٔ بازی شامل نقطه c باشد که نمودار f بر آن تقعر رو به بالا داشته باشد، $f(c)$ یک مقدار مینیمم موضعی f است و به همین نحو، اگر تابع f چنان باشد که $f'(c)=۰$ و بازهٔ بازی شامل c باشد که نمودار f بر آن تقعر رو به پایین داشته باشد، $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است. (شکل ۳ــ۴۹ را ببینید)



شکل ۳ ــ ۴۹

آزمون مشتق دوم برای اکسترمم‌های موضعی

فرض کنیم $(c,f(c))$ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که در آن $f'(c)=۰$ و f' به ازای جمیع xهای بازهٔ باز I، شامل c موجود باشد. هرگاه $f''(c)$ وجود داشته و

الف) $f''(c)<۰$، آنگاه f در c ماکسیمم موضعی دارد.

ب) $f''(c)>۰$، آنگاه f در c مینیمم موضعی دارد.

مثال: به فرض آنکه $f(x)=x^{2}e^{-x}$، با اِعمال آزمون مشتق دوم، اکسترمم‌های موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

حل: ابتدا نقاط بحرانی f را به‌دست می‌آوریم:

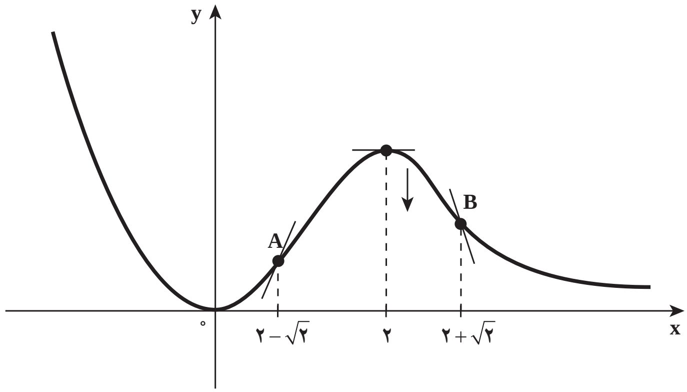
$$f'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}\times x^{2}=x(2-x)e^{-x}=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=2$$

نقاط بحرانی ۲ و $c=0$ که $f'(0)=0$ و $f'(2)=0$ و f' به ازای هر x از بازه $I=(-\infty,+\infty)$ موجود است.

$$f''(x)=(x^{2}-4x+2)e^{-x}$$

چون $f''(0)=2>0$ پس $f(0)=0$ مقدار مینیمم موضعی f است و $f''(2)=-2e^{-2}<0$ پس $f(2)=4e^{-2}$ مقدار ماکسیمم موضعی f است و نمودار f به شکل ۳ــ۵۰ است.

A و B نقاط عطف f هستند.



شکل ۳ــ۵۰

تمرین در کلاس

به فرض آنکه $f(x)=x^{4}-2x^{3}$، با اعمال آزمون مشتق دوم، مقادیر اکسترمم‌های موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

مسائل

۱ــ اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق بوده و $g(x)=|f(x)|$ باشد، آیا g حتماً ماکزیمم مطلق دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲ــ نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=x|x^۲-۱|$ را پیدا کنید.

۳ــ نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=|x-۱|\sqrt[۳]{x^۲}$ را پیدا کنید.

۴ــ نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۳-۳x+۱$ ، $-\frac{۳}{۲}\leq x\leq ۳$

ب) $f(x)=\sin^۲x+۲\cos x$ ، $۰\leq x\leq ۲\pi$

۵ــ ارتفاع یک توپ (به متر) در لحظهٔ t (به ثانیه) از تابع مکان به معادله $S(t)=۳۰t-۵t^۲$ به‌دست می‌آید. بازهٔ زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ به بالا می‌رود و بازهٔ زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ پایین می‌آید. ارتفاع ماکسیمم توپ چقدر است؟

۶ــ جهت تقعر منحنی f با ضابطه $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ را به کمک قضیه تقعر بررسی نموده و نقطه عطف تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

۷ــ به ازای چه مقادیری از a، تقعر منحنی f با ضابطه $f(x)=x^۴+ax^۳+۳x^۲$ همواره رو به بالا است.

۸ــ نشان دهید که نقطه عطف تابع f با ضابطه $f(x)=x(x-۶)^۲$ وسط پاره‌خطی است که نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع را به هم وصل می‌کند.

۹ــ در یکنوایی و مقادیر اکسترمم تابع f با ضابطه $f(x)=x\sqrt{۴-x^۲}$ بحث کنید. چرا در $x=\pm۲$ مماس‌های عمود بر محور طول‌ها وجود دارند؟

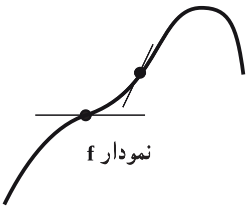
۱۰ــ غلظت c یک داروی شیمیایی در جریان خون t ساعت پس از تزریق در ماهیچه مساوی است با :

$$c=\frac{۳t}{۲۷+t^۳}$$

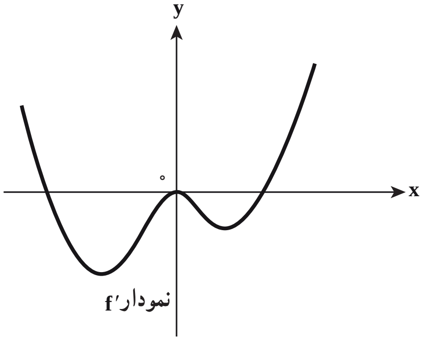
چه وقت غلظت ماکزیمم است؟

۱۱ــ یک تابع چند جمله‌ای از درجه ۳ بیابید که در (۲,۴) ماکسیمم نسبی، در (۴,۲) مینیمم نسبی داشته باشد.

۱۲ــ شکل مقابل نمودار تابع f است در مورد مقادیر اکسترمم نسبی f' (تابع مشتق f) بحث کنید.

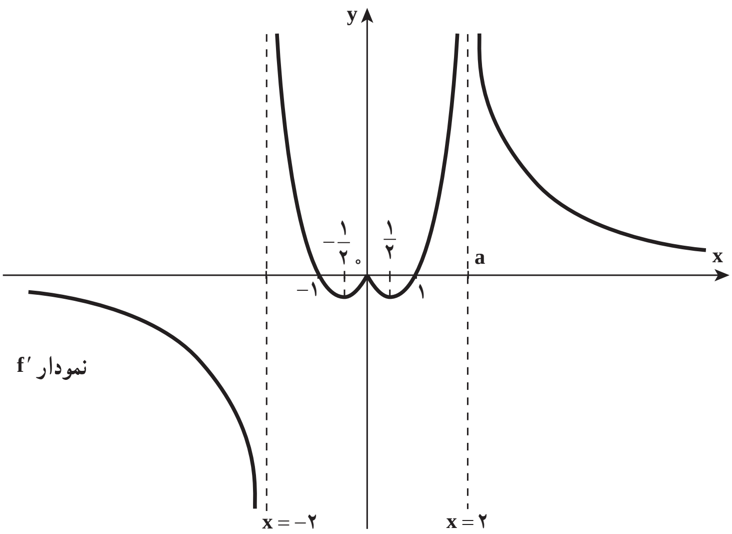


۱۳ــ شکل مقابل نمودار تابع مشتق، تابع f است تابع f چند نقطه عطف دارد؟ دلیل خود را بیان کنید.



۱۴ــ تابع f با ضابطه $f(x)=xe^x$ را در نظر بگیرید با استفاده از هر نوع اطلاعاتی که می‌توانید از خود تابع و مشتق‌های اوّل و دوم آن به‌دست آورید، نمودار f را رسم کنید.

۱۵ــ نمودار تابع f' (تابع مشتق، تابع همواره پیوسته f) به شکل زیر می‌باشد. تابع f در چه نقاطی ماکسیمم نسبی و یا مینیمم نسبی دارد؟ و نقاط عطف تابع f را در صورت وجود مشخص کنید.



۳ـ۱۵ـ آهنگ‌های تغییر وابسته

اگر هوا را به درون بالن بدمیم و تغییرات حجم بالن را وابسته به تغییر شعاع بدانیم، وقتی که اندازه شعاع r_0 سانتی‌متر است و یک سانتی‌متر به شعاع بالن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم بالن به صورت زیر حساب می‌شود.

$$V(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

$$V'(r)=۴\pi r^{۲}$$

وقتی اندازه شعاع بالن r_0 است و یک سانتی‌متر به شعاع بالن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم بالن $۴\pi r_0^{۲}$ است. (به حجم بالن تقریباً $۴\pi r_0^{۲}$ سانتی‌متر مکعب افزوده می‌شود)

در مثال بالا کمیت حجم وابسته به کمیت شعاع است، اکنون اگر کمیت شعاع وابسته به زمان (متغیر t) باشد، آنگاه کمیت حجم نیز به زمان وابسته خواهد شد.

بنابراین حجم و شعاع بالن دو کمیت وابسته به هم هستند که نسبت به متغیر سومی به‌نام زمان تغییر می‌کنند و امّا محاسبه مستقیم آهنگ افزایش حجم بالن از محاسبهٔ آهنگ افزایش شعاع بالن ساده‌تر است، لذا برای مطالعه پدیده‌های طبیعی و مسائل واقعی مربوط به آهنگ‌های وابسته، ایده این است که آهنگ تغییر کمیتی را که حساب کردن آن ساده‌تر است، برحسب کمیت دیگر حساب می‌کنیم و برای انجام این عمل، معادله‌ای پیدا می‌کنیم که این دو کمیت را به هم مرتبط کند و سپس با استفاده از قاعدهٔ زنجیری از طرفین این معادله نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

بررسی این ایده را همراه با حل کردن مثال‌های زیر توضیح می‌دهیم.

مثال : بالنی را از هوا پر می‌کنیم، به‌طوری که حجم آن با آهنگ ۸۰ سانتی‌متر مکعب بر ثانیه افزایش می‌یابد، وقتی شعاع بالن ۲۰ سانتی‌متر است، شعاع بالن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

حل : خواندن دقیق صورت مسأله و تشخیص معلوم و مجهول و استفاده از نمادگذاری مناسب.

معلوم : آهنگ افزایش حجم هوا ۸۰ سانتی‌متر مکعب بر ثانیه است.

مجهول : آهنگ افزایش شعاع وقتی که شعاع ۲۰ سانتی‌متر است کمیت‌های حجم و شعاع را با نماد ریاضی می‌نویسیم.

V حجم بالن و r شعاع آن

می‌دانید که آهنگ تغییر، مشتق است و در این مثال کمیت‌های حجم و شعاع وابسته به زمان (t) هستند.

بنابراین :

معلوم : $\frac{dv}{dt} = ۸۰ \frac{cm^۳}{s}$

مجهول : $\frac{dr}{dt}$ ، وقتی‌که $r = ۲۰^{cm}$ است.

برای اینکه $\frac{dv}{dt}$ و $\frac{dr}{dt}$ را به هم مربوط کنیم، ابتدا V و r را با دستور حجم کره به هم مربوط می‌کنیم :

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

برای اینکه از معلوم مسأله استفاده کنیم از دو طرف این معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم (مشتق‌گیری از سمت راست با استفاده از قاعده زنجیری انجام می‌شود)

$$\frac{dv}{dt} = ۴\pi r^۲ \frac{dr}{dt}$$

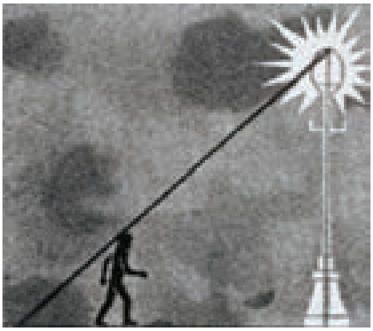
$$۸۰ = ۴\pi \times ۴۰۰ \times \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{۱}{۲۰\pi} \approx ۰/۰۱۶$$

بنابراین شعاع بالن با آهنگی در حدود ۰/۰۱۶ سانتی‌متر بر ثانیه افزایش می‌یابد.

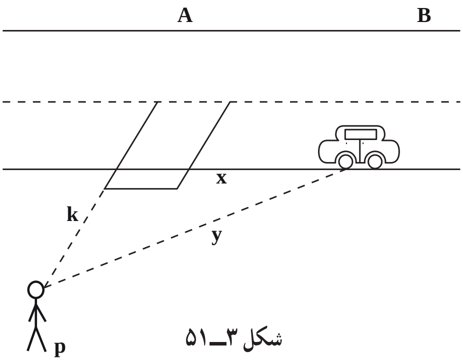
برای اینکه به ظرافت‌های بیشتر در بررسی این‌گونه مسائل پی ببریم، نیاز به تجربه واقعی است که فعالیت زیر این فرصت را فراهم می‌کند.

تمرین در کلاس



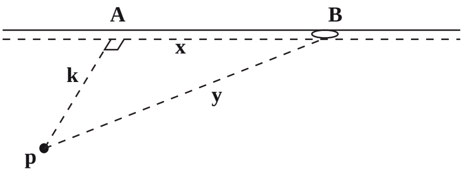
مردی که قدش ۱۸۰ سانتی‌متر است با سرعت ۰/۴ متر بر ثانیه روی زمین مسطحی به سمت تیر چراغ برق قدم می‌زند. اگر لامپ چراغ برق از زمین ۴ متر ارتفاع داشته باشد طول سایه مرد وقتی که در فاصله ۲/۴ متری تیر چراغ برق قرار دارد با چه سرعتی کاهش می‌یابد؟ در این زمان سایه سر او با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

همان‌گونه که در فعالیت (۱) دیده شد، مدل‌سازی این‌گونه مسأله‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است و نیازمند مهارت در استفاده از مشتق یا آهنگ تغییر است که در مثال بعدی فرصت را برای هر دو هدف فراهم می‌کند.



شکل ۳ــ۵۱

مثال: (دوربین راداری) پلیس راهنمایی در نزدیک بزرگراهی ایستاده است. و از یک دوربین راداری برای ثبت سرعت‌های غیرمجاز استفاده می‌کند (شکل ۳ــ۵۱ را ببینید) و دوربین را به سمت اتومبیلی نشانه می‌رود که در همین لحظه از جلوی او می‌گذرد. وقتی راستای دوربین با راستای بزرگراه زاویه ۴۵° می‌سازد، ملاحظه می‌کند که فاصله بین اتومبیل و دوربین با آهنگ ۹۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می‌یابد. اتومبیل با چه سرعتی در حرکت است؟



حل: شکل را به صورت مقابل درنظر می‌گیریم در مثلث قائم‌الزاویه PAB می‌توان نوشت:

$$x^۲ + k^۲ = y^۲ \quad (۱)$$

از طرفین رابطه (۱) نسبت به زمان (t) مشتق می‌گیریم.

$$۲x\frac{dx}{dt} + ۰ = ۲y\frac{dy}{dt}$$

و یا

$$x\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dt}$$

در مثلث قائم‌الزاویه PAB، $\hat{P} = \hat{B} = ۴۵^\circ$ سپس $x=k$ و $y = k\sqrt{۲}$

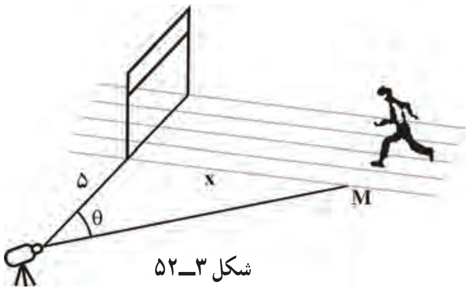
طبق صورت مسأله دوربین رادار نشان می‌دهد که $\frac{dy}{dt} = ۹۰ \, km/h$

بنابراین

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k\sqrt{۲} \times ۹۰}{k} = ۹۰\sqrt{۲} \approx ۱۲۷ \, km/h$$

پس سرعت اتومبیل در حدود ۱۲۷ کیلومتر بر ساعت است.

تمرین در کلاس



شکل ۳ــ۵۲

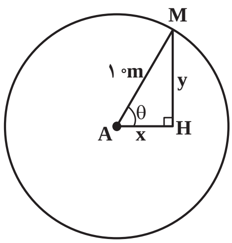
شکل ۳ــ۵۲، یک دوربین تلویزیون را (که در ۵ متری خط پایان روی یک مسیر مستقیم قرار دارد) نشان می‌دهد که دونده المپیک M را تعقیب می‌کند.

وقتی دونده در ۵ متری خط پایان است با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه می‌دود. سرعت چرخش دوربین در این لحظه چقدر است؟

برای یادگیری و تسلط بیشتر در حل مسائل آهنگ‌های وابسته مثال دیگری را مطرح می‌کنیم.

مثال: (چرخ و فلک) شخصی بر چرخ و فلکی به شعاع ۱۰ متر سوار شده است که در هر دقیقه یک دور می‌زند. وقتی فاصلهٔ افقی آن شخص از خط قائم گذرنده از مرکز چرخ و فلک برابر ۵ متر است، سرعت بالا رفتن یا پایین آمدن آن شخص چقدر خواهد بود؟

حل: فرض کنیم M محل نشستن شخص روی چرخ و فلک باشد و x فاصله افقی شخص در لحظهٔ t، از خط قائمی که از مرکز می‌گذرد و y ارتفاع نقطهٔ M از خط افقی که از مرکز می‌گذرد (طبق شکل ۳ــ۵۳) و θ زاویه نشان داده شده در شکل باشد.



شکل ۳ــ۵۳

در مثلث قائم‌الزاویه AHM داریم:

$$x=10\cos\theta \quad \text{و} \quad y=10\sin\theta$$

اکنون از دو طرف معادله $y=10\sin\theta$ نسبت به زمان (t) مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dy}{dt}=10\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

و امّا بنابرصورت مسأله معلوم می‌شود:

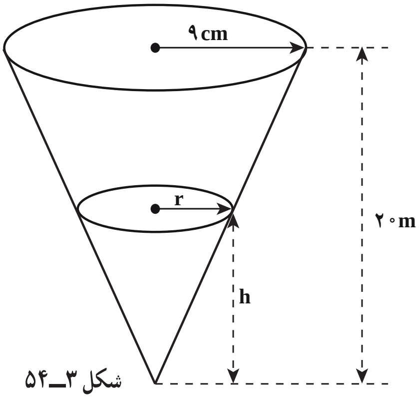
$$\frac{d\theta}{dt}=1 \text{ دور بر دقیقه } = 2\pi \text{ رادیان بر دقیقه}$$

و در لحظه‌ای که، x برابر ۵ متر است، داریم $\cos\theta=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

بنابراین $\frac{dy}{dt}=10\times\frac{1}{2}\times2\pi=10\pi\approx31/4\,{}^{m}\!/_{min}$

یعنی در لحظه‌ای که x برابر ۵ متر است، سرعت بالا یا پایین رفتن حدود ۳۱/۴ متر بر دقیقه است.

تمرین در کلاس



شکل ۳ــ۵۴

ظرف قیفی شکل با ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده ۹ سانتی‌متر چنان قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و ظرف به شکل مخروط دوار است. (شکل ۳ــ۵۴)

فرض کنید آب با سرعت ۱/۸ سانتی‌متر مکعب بر ثانیه در این ظرف ریخته شود آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب ۶ سانتی‌متر است پیدا کنید.

آنالیز ریاضی به اندازه خود طبیعت گسترده است (فوریه ۱۷۶۸ــ۱۸۲۰)

مسائل

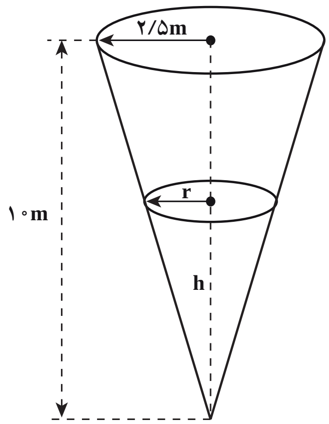
۱ــ جسمی با سرعت ۸ سانتی‌متر بر ثانیه به عدسی نزدیک می‌گردد، اگر نسبت فاصله‌های جسم و تصویر آن از عدسی $\frac{۲}{\sqrt{۲}}$ باشد، تصویر جسم با چه سرعتی و در کدام جهت تغییر می‌کند؟ (در عدسی‌های نازک رابطه $\frac{1}{f}=\frac{1}{S}+\frac{1}{s}$ برقرار است، که در آن s فاصلهٔ جسم از عدسی و S فاصلهٔ تصویر از عدسی و f فاصلهٔ کانونی عدسی است)

۲ــ مخزنی استوانه‌ای به شعاع ۳ متر را با آهنگ ۲ متر مکعب بر دقیقه از آب پر می‌کنند. ارتفاع آب با چه آهنگی بالا می‌آید؟

۳ــ شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ میلی‌متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که قطر کره ۶۰ میلی‌متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد.

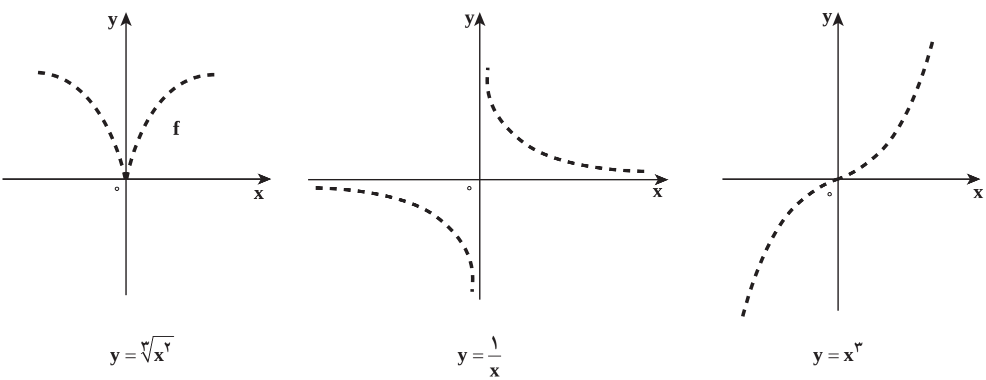
۴ــ اگر ارتفاع بادبادک شما از زمین ۲۰ متر باشد و فاصله افقی آن از شما ۳۰ متر و با آهنگ ۸ متر در دقیقه به‌طور افقی از شما دور شود طول ریسمان با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۵ــ آب با سرعت ۹ متر مکعب بر ساعت وارد منبعی می‌شود که نشتی دارد. این منبع به شکل مخروطی است که رأس آن به طرف پایین است و عمق آن ۱۰ متر و قطر قاعده آن ۵ متر است. وقتی عمق آب ۵ متر است، سطح آن با آهنگ ۱۸ سانتی‌متر بر ساعت بالا می‌رود، در این لحظه آب با چه آهنگی به خارج نشت می‌کند؟



۳ـ ۱۶ـ رسم نمودار توابع

تاکنون نمودار توابعی به‌صورت خط راست و یا خط شکسته مانند نمودار تابع $y=|x-1|$ در کتاب‌های ریاضی سال‌های قبل دیده‌اید. نمودار توابعی نظیر $y=x^3$ و $y=\frac{1}{x}$ و یا $y=\sqrt[3]{x^2}$ را می‌توانیم با نقطه‌یابی در یک صفحه مختصات شطرنجی شناسایی و ترسیم کنیم. امّا مشکلی که در اینجا وجود دارد، از پیش نمی‌توانیم رفتار این‌گونه توابع را پیش‌بینی کنیم، در نتیجه فقط با افزایش نقاطی از صفحه که مختصات آنها در معادلهٔ این توابع صدق می‌کند، شکل دقیق‌تری از نمودار ترسیم می‌گردد. (شکل ۳ــ۵۵ را ببینید)



شکل ۳ــ۵۵