

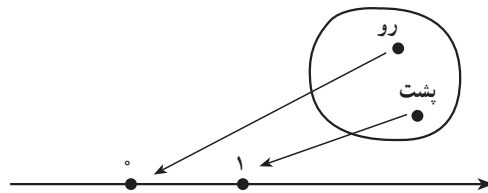
توزیع های گسسته احتمال

۹-۱- متغیر تصادفی گسسته

به طوری که قبلاً گفتیم در هر آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم و به رخداد هر پیشامد آن عددی بین 0 و 1 به عنوان احتمال نسبت می‌دهیم. حال می‌خواهیم مجموعه دیگری را به جای فضای نمونه‌ای قرار دهیم. ابتدا به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱: وقتی سکه‌ای را می‌اندازیم، S دارای دو برآمد رو و پشت است. تابع X را بدین صورت تعریف می‌کنیم که حوزه تعریف (دامنه) آن مجموعه S با دو عضو رو و پشت و حوزه مقادیر (برد) آن دو عدد 0 و 1 از محور اعداد حقیقی باشد. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} X(\text{رو}) = 0 \\ X(\text{پشت}) = 1 \end{cases}$$



شکل ۱

چنین تابع X را متغیر تصادفی می‌گوییم که دو مقدار 0 و 1 را اختیار می‌کند. چون احتمال رخداد برآمد رو $\frac{1}{4}$ است پس $X=0$ که نمایش ساده $X(\text{رو}) = 0$ است و در واقع نمادی برای رخداد برآمد رو است، دارای همان احتمال $\frac{1}{4}$ و همین‌طور احتمال $X=1$ برابر $\frac{1}{4}$ است. در واقع به جای جدول را

	پشت	رو	برآمد
احتمال	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

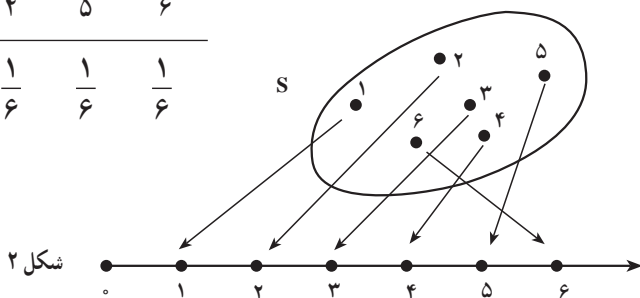
جدول

x_i	۰	۱
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

قرار می‌دهیم. x_i ها مقادیر X و p_i ها احتمال‌های متناظر با آنها هستند. توجه کردید که فضای نمونه‌ای، {پشت، رو}، S ، جای خود را به مجموعه $\{0, 1\}$ داده است.

مثال ۲: در انداختن یک تاس همگن مجموعه S دارای ۶ برآمد است. به هر برآمد S ، احتمال $\frac{1}{6}$ را نسبت می‌دهیم. اگر X تابعی باشد که بر هر برآمد S عددی صحیح از ۱ تا ۶ را که همان اعداد حک شده بر وجوه تاس اند نسبت دهد، یعنی بر هر برآمد S نقطه‌ای از محور اعداد حقیقی را نسبت دهیم، متغیر تصادفی X با مقادیر صحیح ۱ تا ۶ به وجود می‌آید که احتمال هر مقدار آن، همان احتمال برآمد S متناظر با آن است (شکل ۲). پس جدول زیر برای ریزش تاس نتیجه می‌شود.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



شکل ۲

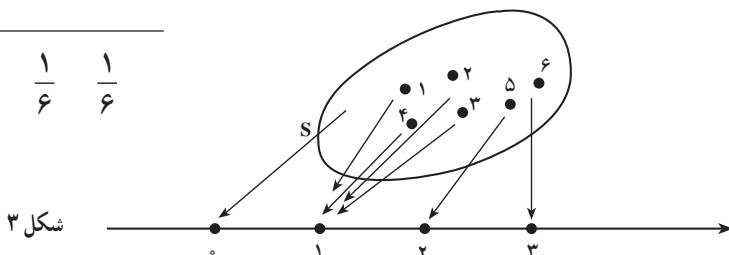
مثال ۳: بر فضای نمونه‌ای S ، در مثال قبلی، می‌توان متغیر تصادفی دیگری را تعریف کرد. تابع X را تابعی بگیرید که شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ را با نقطه‌ی به طول ۱ و شماره‌ی ۵ را با نقطه‌ی به طول ۲، و شماره‌ی ۶ را با نقطه‌ی به طول ۳ از محور اعداد حقیقی متناظر کند (مطابق شکل ۳).

در این صورت

$$\begin{cases} X(\text{شماره } ۱) = X(\text{شماره } ۲) = X(\text{شماره } ۳) = X(\text{شماره } ۴) = ۱ \\ X(\text{شماره } ۵) = ۲ \\ X(\text{شماره } ۶) = ۳ \end{cases}$$

بنابراین جدول احتمال زیر به دست می آید.

x_i	۱	۲	۳
p_i	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



شکل ۳

توجه کنید که رخداد $(X=1)$ یعنی رخداد پیشامد { شماره ۱، شماره ۲، شماره ۳، شماره ۴ }، و می دانیم این پیشامد دارای احتمال $\frac{4}{6}$ است. ▲

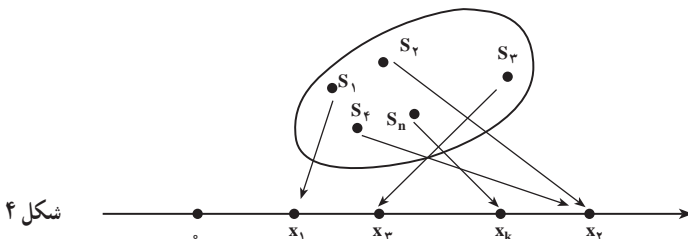
در متغیرهای تصادفی این سه مثال، تعداد مقادیری که هر متغیر اختیار می کرد منتهای بود. متغیر تصادفی را در احتمال مقدماتی به صورت زیر تعریف می کنند:

تعریف متغیر تصادفی^۱ تابعی از فضای نمونه ای S بر اعداد حقیقی است. این تابع را با X نشان می دهیم.

همان طور که در مثال های قبل دیدیم مجموعه اعداد حقیقی یک فضای نمونه ای جدید است. اگر حوزه مقادیر X منتهای یا شمارا نامتناهی باشد متغیر تصادفی X را گسسته می گوئیم. برای درک مطلب فرض کنید فضای نمونه ای $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ را داریم و احتمال هایی که به ترتیب به برآمدها S تخصیص داده ایم p_1, p_2, \dots, p_n باشند. تابعی مانند X را در نظر می گیریم که حوزه تعریف آن S و حوزه مقادیر آن نقاطی از محور اعداد حقیقی است، به قسمی که هر برآمد یا هر پیشامد S با نقطه ای از محور مزبور متناظر باشد. در این صورت مطابق شکل ۴،

$$X(s_1) = x_1, X(s_2) = x_2, X(s_3) = x_3, X(s_4) = x_4, \dots, X(s_n) = x_k$$

تابع X ، متغیر تصادفی است و x_1, x_2, \dots, x_k مقادیر آن هستند.



شکل ۴

۱- در واقع متغیر تصادفی، نه متغیر است و نه تصادفی است، بلکه یک تابع روی مدل احتمال است.

۹-۲- تابع جرم احتمال

تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X ، تابعی است که به هر یک از مقادیر X ، یعنی به هر یک از x_i ها $i = 1, 2, \dots, k$ احتمال $P(X = x_i) = p_i$ را نسبت می‌دهد. به صورت جدول، داریم:

x_i	x_1	x_2	\dots	x_k
p_i	p_1	p_2	\dots	p_k

بدیهی است که $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. اگر نقاط به طول x_1, x_2, \dots, x_p را نقاطی مادی تلقی کنیم می‌توانیم p_1, p_2, \dots, p_k را به ترتیب جرم این نقاط بگیریم. به همین دلیل رابطه

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{و} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

تابع جرم احتمال یا صرفاً تابع احتمال متغیر تصادفی X می‌نامند. جدول بالا نشان می‌دهد که مقدار کل احتمال ۱ به چه ترتیب بین مقادیر متغیر X توزیع شده است و آن را جدول توزیع احتمال می‌گویند. تعداد مقادیری که X پذیرفته است متناهی هست. گاهی تعداد مقادیری که X اختیار می‌کند نامتناهی ولی شماراست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴: جامعه کودکان زیر ده سال را در نظر بگیرید. هر کودک را برای اینکه ببینید به بیماری هموفیلی مبتلاست یا نه آزمایش می‌کنند. فرض کنید متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کنیم:

تعداد کودکانی که باید آزمایش شوند تا اولین مورد هموفیلی ظاهر شود $X =$

ببینیم که X چه مقادیری را انتخاب می‌کند. ممکن است اولین نفری که در جامعه مزبور آزمایش می‌شود به هموفیلی مبتلا باشد پس در این صورت $X = 1$. ممکن است اولین نفر مبتلا نبوده، دومین نفر مبتلا باشد پس $X = 2$ و نظایر آن. می‌توانید مجسم کنید که ممکن است یک میلیون کودک آزمایش شوند و کودکی مبتلا پیدا نشود یعنی X می‌تواند بیش از یک میلیون هم باشد. به همین ترتیب مقادیری که X می‌تواند اختیار کند شمارا بوده ولی نامتناهی است. در این حالت داریم

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{و} \quad i = 1, 2, \dots$$

بدیهی است، $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. یعنی باید احتمال ۱ را بین بی‌نهایت مقدار x_i توزیع کرد. ▲

تذکر: هر تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی گسسته X دارای ویژگی‌های زیر است:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad -1$$

$$\sum_i P(X = x_i) = 1 \quad \text{—۲}$$

برعکس اگر تابعی به صورت $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots$ دارای دو ویژگی بالا باشد یک تابع احتمال است.

مثال ۵: سکه‌ای را متوالیاً می‌اندازیم. سکه منصف نیست. تعداد دفعاتی که سکه را می‌اندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود متغیر تصادفی X می‌نامیم.

الف) X چه مقادیری اختیار می‌کند؟ ب) احتمال رخداد هر مقدار X چیست؟
الف) ممکن است در بار اول رو ظاهر شود پس $X = 1$. اگر بار اول رو ظاهر نشود ولی بار دوم رو بیاید $X = 2$. به همین ترتیب ممکن است تا پرتاب شماره ۳، ۴، ۵، ...، ۱۰۰۰، ... برای بار اول رو ظاهر نشود، پس X همه مقادیر صحیح طبیعی را اختیار می‌کند.

ب) فرض می‌کنیم در پرتاب i ام برای اولین بار رو بیاید می‌خواهیم احتمال این پیشامد یعنی $P(X = i)$ را به دست آوریم. اگر در یک بار انداختن سکه، H معرف برآمد رو و T معرف برآمد پشت باشد، پیشامد

$$\underbrace{TT \dots TH}_{\text{بار } (i-1)}$$

بدین معناست که $i-1$ بار متوالیاً پشت بیاید و در i امین بار رو ظاهر شود. باید احتمال این پیشامد را که مستلزم رخداد i برآمد است به دست آوریم. سکه منصف نیست یعنی احتمال رو آمدن و احتمال پشت آمدن $\frac{1}{2}$ نیست. فرض می‌کنیم احتمال ظاهر شدن رو p و احتمال ظاهر شدن پشت q باشد. واضح است که $p + q = 1$. هر انداختن سکه از انداختن‌های دیگر مستقل است. حال قبل از محاسبه احتمال موردنظر متذکر می‌شویم که اگر برای چند آزمایش تصادفی جدا از هم فضاهای نمونه‌ای و مدل‌های احتمال را بسازیم و اگر A_1 پیشامدی از فضای اول، A_2 پیشامدی از فضای دوم، ... باشد آن‌گاه شرط استقلال A_1, A_2, \dots از هم را به صورت زیر بیان می‌کنند.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots) = P(A_1).P(A_2) \dots$$

پس، اگر برای هر انداختن سکه یک فضای نمونه‌ای در نظر بگیریم، آن‌گاه مثلاً

$$P(TT) = q \cdot q = q^2$$

به همین ترتیب:

$$P(\underbrace{TT \dots T}_{\text{بار } (i-1)}) = \underbrace{q \cdot q \dots q}_{\text{بار } (i-1)} = q^{i-1}$$

و بالاخره :

$$P(\underbrace{TT \dots TH}_{\text{بار}(i-1)}) = q^{i-1} \cdot p$$

پس :

$$P(X = i) = q^{i-1} \cdot p$$

اگر i را برابر $1, 2, \dots$ بگیریم احتمال های متناظر با مقادیر X به دست می آیند. جدول زیر را

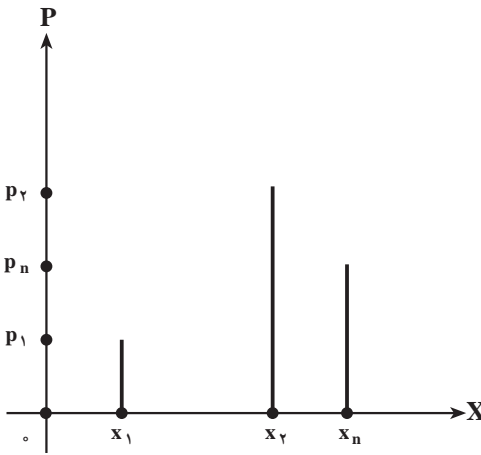
می توانیم بنویسیم

x_i	۱	۲	۳	...	i	...
p_i	p	qp	q^2p	...	$q^{i-1}p$...

▲ رابطه $P(X = i) = q^{i-1}p$ ، $i = 1, 2, \dots$ تابع احتمال متغیر تصادفی X است.

شما می توانید به میل خود جدولی تشکیل دهید که سطر اول مقادیر متغیر تصادفی X باشد (هر مقداری که مایل هستید به آن نسبت دهید) و سطر دوم آن احتمال های دلخواه باشند، فقط لازم است که

مجموع احتمال ها ۱ باشد. اگر هر مقداری را که متغیر تصادفی X اختیار می کند طول یک نقطه، و احتمال متناظر با آن را عرض آن نقطه نسبت به دو محور متعامد بگیریم نموداری برای احتمال X به دست می آوریم. لازم نیست که واحد طول را روی دو محور یکی بگیریم. عرض های نقاط، مقادیر p_1, p_2, \dots و p_n هستند که همه بین صفر و یک اند. طول های نقاط، مقادیر x_1, x_2, \dots, x_n هستند (مطابق شکل ۵).



شکل ۵ - نمودار میله ای

در واقع می توان طول میله های بالای x_1, x_2, \dots, x_n را احتمال های متناظر با آنها گرفت. این نمودار را نمودار میله ای می نامند. برای هر تابع احتمال گسسته می توانید چنین نموداری رسم کنید. همان طور که گفتیم می توانیم جدول های توزیع احتمال دلخواه فراوانی بنویسیم اما آن جدول ها و مدل هایی مورد توجه اند که ارزش کاربردی داشته باشند. ذیلاً چند توزیع احتمال مهم را ذکر می کنیم.

۳-۹- توزیع برنولی

وقتی لامپی را امتحان می‌کنیم ممکن است سالم باشد یا معیوب. به طور کلی وقتی کالایی را در موقع خرید امتحان می‌کنیم یا سالم است و یا ناقص. وقتی از فردی در مورد اعتیادش به سیگار سؤال می‌کنیم یا سیگاری است یا نیست. از این پدیده‌های دو حالتی زیادند. اگر سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را با $X=1$ و ناقص بودن کالا و سیگاری نبودن فرد را با $X=0$ نشان دهیم متغیری تصادفی داریم که دو مقدار 0 و 1 را اختیار می‌کند. این آزمایش‌های دو حالت را امتحان می‌نامیم و فضای نمونه‌ای هر امتحان دو برآمد دارد. ریختن سکه هم یک امتحان است.

اگر احتمال سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را p بگیریم احتمال ناقص بودن کالا و یا سیگاری نبودن فرد برابر q است. پس جدول توزیع احتمال زیر را برای هر امتحان داریم

$$\begin{array}{c|cc} x_i & 0 & 1 \\ \hline p_i & q & p \end{array} \quad p+q=1$$

مرسوم است که دو برآمد امتحان را پیروزی و شکست می‌نامند. برآمدی که مورد توجه است پیروزی نامیده می‌شود. مثلاً ممکن است لامپ‌ها را یک به یک برای یافتن لامپی معیوب امتحان کنیم، در این صورت یافتن لامپ معیوب یک پیروزی است. این جدول را می‌توان به صورت رابطه زیر هم خلاصه کرد.

$$P(X=i) = \begin{cases} p^i q^{1-i} & i=0,1 \\ 0 & \text{به ازای سایر مقادیر } i \end{cases}$$

به طور کلی اگر پیشامد A از یک فضای نمونه‌ای را در نظر بگیریم و رخداد A را پیروزی گرفته، احتمال پیروزی را p فرض کنیم، آن‌گاه متغیر تصادفی X که به صورت

$$\begin{cases} X=1 & \text{اگر } A \text{ رخ دهد} \\ X=0 & \text{اگر } A \text{ رخ ندهد} \end{cases}$$

تعریف می‌شود دارای تابع احتمال بالاست.

متغیر تصادفی X را که تنها دو مقدار 0 و 1 را می‌پذیرد متغیر برنولی و توزیع احتمال آن را توزیع برنولی می‌گویند.

۹-۴- تمرین‌ها

۱- پنج سکهٔ منصف را باهم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که تعداد «شیرها» را نشان دهد.

پ) تابع احتمال متغیر تصادفی بند ب را بنویسید.

۲- دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را مجموع دو عدد ظاهر شده در روی دو

تاس تعریف می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) تابع احتمال X را به دست آورید.

پ) احتمال اینکه $X \leq 7$ باشد چقدر است؟

۳- یک تاس پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر عدد فرد بیاید} \\ 2 & \text{اگر عدد زوج بیاید} \end{cases}$$

الف) تابع احتمال X را بیابید.

ب) آیا X یک متغیر تصادفی برنولی است؟

۴- سکه‌ای منصف را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا «شیر» بیاید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که براساس آن بتوان احتمال شیر آمدن را محاسبه کرد.

پ) احتمال اینکه اولین بار در آزمایش صدم، شیر ظاهر شود چقدر است؟

۵- توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$P(X = i) = \frac{i}{i^2 + 3} \quad i = 1, 2, 3$$

$$P(X = j) = \frac{1}{14} \quad j = 4, 5, 6$$

الف) جدول توزیع X را بسازید.

ب) نمودار توزیع را رسم کنید.

پ) مقدار $P(X \geq 3)$ را حساب کنید.

۶- احتمال اینکه فردی مسن مبتلا به دیابت باشد $\frac{1}{8}$ است. در روستایی مردان مسن را تحت آزمایش قرار می دهند. اگر متغیر تصادفی X را برابر با تعداد افرادی تعریف کنیم که به ترتیب آزمایش می شوند تا اولین فرد دیابتی مشخص شود، تابع احتمال متغیر X را به دست آورید. احتمال اینکه دومین نفر دیابتی باشد چقدر است؟

۷- فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی ۳ برآمد دارد. اگر احتمال های متناظر با ۳ برآمد به ترتیب $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{6}$ باشد، متغیری تصادفی روی این فضا تعریف کنید.
۸- نشان دهید که تابع زیر یک تابع احتمال است.

$$P(X = x) = \frac{1}{n} [2(n - x) + 1] \quad , \quad x = 1, 2, \dots, n$$

مراجع

1 - S. Ross, A First Course in Probability, Macmilan 1976.

- ۲- جان فروند و رانلد والپول، آمار ریاضی ترجمه علی عمیدی و محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ سوم ۱۳۷۳.
- ۳- جواد بهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس ۱۳۶۸.
- ۴- علی عمیدی، احتمال و کاربرد آن، انتشارات دانشگاه پیام نور ۱۳۷۴.



معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴-۱۵۸۷۵ گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email)

ارسال نمایند. talif@talif.sch.ir

دفترتالیف کتاب های درسی ابتدایی متوسطه تفری