۴

احتمال

مقدمه

امروزه همهٔ سازمان‌های دولتی و خصوصی، در هر رسته‌ای که باشند، اعم از اقتصادی، صنعتی، اجتماعی و غیره برای تعیین سیاست و روند کار آیندهٔ خود ناگزیر به برنامه‌ریزی هستند. تصمیم‌گیری‌ها و آینده‌نگری‌ها علی رغم وجود اطلاعاتی از گذشته و داده‌هایی از حال، همواره دستخوش عدم قطعیت‌هایی هستند که نمی‌توان در رویارویی با آنها با یقین کامل برنامه‌ریزی کرد. علم احتمال و بر پایهٔ آن علم آمار با شاخه‌های متعددش، در مقابل لجام گسیختگی این عدم قطعیت‌ها و یا به اصطلاح عرف در مقابل شانس قد علم کرده‌اند و براساس قوانین محکم ریاضی، اثر شانس را کنترل می‌کنند. استنباط آماری که پایه‌ای برای تصمیم‌گیری است بر قوانین احتمال تکیه کرده است و در حال حاضر کوچک‌ترین گام پژوهشی در هر زمینه، مستلزم استفاده از این نوع استنباط‌هاست. کاربرد احتمال در کارهای نظامی، فیزیک، ارتباطات، نظریهٔ اطلاعات، علوم فضایی، نظریهٔ رمزنگاری و امثال آنها به سرعت گسترش یافته است. با این وجود تصور می‌رود هنوز در اوایل راهی هستیم که سه سدهٔ پیش به صورتی مقدماتی آغاز شده است. ما با شما از ابتدای این راه همراه می‌شویم و با هم چند گامی مقدماتی از این راه را طی می‌کنیم و از آن جنبهٔ احتمال که صورتی گسسته دارد سخن می‌گوییم. شاید که راهنمای شما برای ادامهٔ راه باشد.

فصل ۸

احتمال

۸ ـ۱ـ یادآوری

خلاصه‌ای از آنچه را که سال گذشته دربارهٔ احتمال خوانده‌ایم در زیر می‌آوریم :

الف) می‌دانیم که اگر آزمایشی یا پدیده‌ای قبل از رخداد، نتیجه‌اش معلوم نباشد ولی نتیجه‌های ممکن آن مشخص باشند آن را **آزمایش تصادفی** یا **پدیدهٔ تصادفی** می‌نامند. مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن را **فضای نمونه‌ای** آزمایش تصادفی می‌نامیم. فضای نمونه‌ای را با S نشان می‌دهیم. هر نتیجهٔ ممکن، یعنی هر عضو S را یک **برآمد** می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضوهای این مجموعه رخ خواهد داد.

مثال ۱ : قرار است فردا تیم A در مقابل تیم B بازی کند. تیم A چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورد؟
به طور مطمئن نمی‌دانیم. اما نتیجه‌هایی که یکی از آنها رخ می‌دهد عبارت‌اند از :

برابر شدن دو تیم = c   باختن تیم A=b   بردن تیم A= a

پس مجموعهٔ $S=\{a,b,c\}$ فضای نمونه‌ای است و هر عضو این مجموعه برآمدی است که ممکن است رخ دهد. از سه برآمد تنها یکی رخ می‌دهد. ▲

ب) هر پیشامد، زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. مثلاً $E_1=\{a,b\}$ یک پیشامد است و به‌معنای آن است که در بازی فردا «تیم A یا می‌برد و یا می‌بازد». در هر حال وقتی می‌گوییم پیشامد E_1 رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمدهای آن رخ خواهد داد. اگر $E_2=\{a,c\}$ رخ بدهد بدان معناست که تیم A فردا یا می‌برد و یا برابر می‌کند. دو پیشامد را که برآمد مشترکی ندارند **ناسازگار** می‌گویند. سال گذشته اعمال روی پیشامدها را که همان اعمال روی مجموعه‌ها هستند دیده‌اید.

تذکر : منظور از «رخداد» یک پیشامد وقوع آن پیشامد، یعنی مشاهدهٔ عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجهٔ آزمایش است.

پ) اگر فضای نمونه‌ای به جای ۳ برآمد ممکن، n برآمد ممکن داشته باشد تعداد پیشامدها، یعنی تعداد زیر مجموعه‌های آن ۲^n است. در مثال بالا $۸=۲^۳$ پیشامد در فضای نمونه‌ای حاصل می‌شوند که عبارت‌اند از :

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\phi$$

ϕ **پیشامد ناممکن** است. پیشامد $S=\{a,b,c\}$ حتماً رخ می‌دهد زیرا به معنای آن است که یکی از سه برآمد a، b و c رخ می‌دهد و این مسلم است که فردا، در صورت انجام بازی، تیم A یا می‌برد، یا می‌بازد و یا برابر می‌کند. پس S رخ می‌دهد. لذا S را **پیشامد مطمئن** می‌گوییم. تعداد اعضای مجموعهٔ S، یعنی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است **متناهی** یا **شمارا نامتناهی** یا **ناشمارا نامتناهی** باشد. اگر لامپی را از فرایند تولید لامپ انتخاب کنیم و بخواهیم سالم بودن آن را امتحان کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی دو برآمد دارد، لذا S مجموعه‌ای متناهی است. اگر هدف این باشد که سکه‌ای را آنقدر بیندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، بی‌نهایت برآمد دارد که می‌توان این برآمدها را با اعداد طبیعی متناظر کرد. وقتی تعداد برآمدهای فضایی نمونه‌ای متناهی یا شمارا نامتناهی باشد آن را **فضای نمونه‌ای گسسته** می‌گوییم. تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است ناشمارا نامتناهی باشد که در این صورت فضای نمونه‌ای گسسته نیست، مثل انتخاب تصادفی نقطه در بازهٔ $(۰,۱)$.

ت) وقتی فضای نمونه‌ای S را برای آزمایشی تصادفی داریم، احتمال پیشامدهای فضای S را به صورت مقادیر حقیقی یک تابع مجموعه‌ای P تعریف می‌کنیم، که این تابع براساس **۳ اصل موضوع** زیر، اعداد حقیقی را به پیشامدها یعنی به زیر مجموعه‌های S نسبت می‌دهد،

اصل موضوع ۱ : احتمال هر پیشامد، عددی نامنفی است، یعنی برای هر پیشامد A از S،

$$P(A)\geq ۰$$

اصل موضوع ۲ :

$$P(S)=۱$$

اصل موضوع ۳ : اگر $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n دنباله‌ای متناهی[1] از پیشامدهای دو به دو ناسازگار S باشند آن گاه

$$P(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+P(A_۳)+\ldots+P(A_n)$$

۱ــ در واقع اگر دنبالهٔ پیشامدها نامتناهی نیز باشد، اصل موضوع ۳ استوار است.

این اصول موضوع منسوب به کولموگوروف هستند. هر تابع حقیقی مقدار که در این اصول صادق باشد به تابع احتمال موسوم است. فضای S و تابع P و مجموعهٔ پیشامدها را مدل احتمال آزمایش تصادفی می‌نامند. تعریف دقیق‌تری از مدل احتمال را در مقاطع بالاتر تحصیلی می‌بینید. دیده‌اید که اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته S باشد، P(A) برابر با مجموع احتمال‌های برآمدهایی است که در A هستند. به خصوص اگر S دارای n برآمد باشد و تابع احتمال به هر برآمد عدد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد می‌توانید برقراری ۳ اصل بالا را به سهولت تحقیق کنید. همان‌طور که می‌دانید چنین فضای نمونه‌ای را یکنواخت یا متساوی‌الاحتمال می‌نامند. اگر در این فضا پیشامد A متشکل از m برآمد باشد آن گاه $P(A)=\frac{m}{n}$ است که با مفهوم فراوانی نسبی در آمار مطابقت دارد.

وقتی مثلاً پیشامد $A=\{a,b,c\}$ را داریم که a، b و c برآمدها هستند احتمال این پیشامد را چنین می‌نویسیم

$$P(A)=P(\{a,b,c\})$$

در مواردی که پیشامد، تک عضوی مانند $\{a\}$ باشد برای سادگی احتمال آن را به جای $P(\{a\})$ به صورت $P(a)$ می‌نویسیم.

وقتی فضای نمونه‌ای گسسته است در تخصیص اندازهٔ احتمال، لازم نیست که احتمال هر زیر مجموعه ممکن را مشخص کنیم، و این امتیاز بزرگی است، زیرا مثلاً اگر فضای نمونه‌ای ۲۰ برآمد داشته باشد تعداد پیشامدهای S یعنی تعداد زیر مجموعه‌های آن $2^{20}=1048576$ است. در این حالت اگر اندازهٔ احتمال منسوب به رخداد هر برآمد معلوم باشد مدل احتمال مشخص می‌شود.

دیده‌اید که روی یک فضای نمونه‌ای می‌توان تابع‌های P ی مختلف تعریف کرد.

مثال۲ : به مثال ۱ رجوع کنید. فرض کنید در گذشته تیم A مثلاً ۲۰ بار با تیم B مسابقه داده است و شرایط زمانی و مکانی و تیمی همهٔ بازی‌ها یکی بوده‌اند، و جمعاً ۱۰ بار تیم A برنده، ۶ بار بازنده شده و ۴ بار برابر کرده باشد. پس $\frac{10}{20}$ بارها برنده، $\frac{6}{20}$ بارها بازنده شده و $\frac{4}{20}$ بارها برابر کرده است. در این صورت معقول است که بگوییم فردا تیم A با احتمال $\frac{5}{10}$ برنده، با احتمال $\frac{3}{10}$ بازنده خواهد شد و با احتمال $\frac{2}{10}$ برابر خواهد کرد. پس با توجه به فراوانی نتیجه‌های بازی‌های گذشته تابع P را به‌صورتی تعریف می‌کنیم که به برآمدهای فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c\}$ احتمال‌های زیر را تخصیص دهد.

$$P(a)=\frac{5}{10} \quad , \quad P(b)=\frac{3}{10} \quad , \quad P(c)=\frac{2}{10}$$

می‌توانیم از روی اطلاعات دیگر، مثلاً ملاحظه مسابقات تمرین چند روز قبل دو تیم، احتمال‌های دیگری را به برآمدها نسبت دهیم. با معلوم بودن S و P می‌توانیم احتمال هر پیشامد S را مشخص کنیم، مثلاً

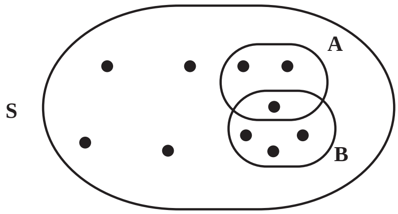
$$P(\{a,c\})=P(a)+P(c)=\frac{۷}{۱۰}$$

یعنی احتمال اینکه تیم A برنده شود یا برابر کند $\frac{۷}{۱۰}$ است. ▲

وقتی فضای نمونه‌ای ناشمارا نامتناهی باشد تخصیص احتمال به همه برآمدها عملی نیست. در بیشتر این حالت‌ها احتمالی که به هر یک از برآمدها نسبت می‌دهند باید برابر صفر باشد و تعیین احتمال پیشامدهایی که احتمال آنها صفر نیست از روی برآمدها مشکل خواهد شد. برای ساختن مدل احتمال در این حالت‌ها احتمال‌ها را به پیشامدها نسبت می‌دهیم. همان‌طور که سال قبل دیده‌ایم این فضای نمونه‌ای می‌تواند به صورت مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثل بازهٔ $(۰,۱)$ یا تمام خط حقیقی یا مجموعه‌ای از نقاط واقع در فضای سه بعدی مانند نقاط داخل یک مکعب و نظایر این‌ها باشد. در این صورت تابع P، همان‌طور که می‌دانیم، به هر پیشامد که متناظر با مثلاً فاصله‌ای روی خط حقیقی یا ناحیه‌ای روی دایره یا ناحیه‌ای درون مکعب و امثال آن است عددی را به عنوان احتمال نسبت می‌دهد. ما در این کتاب تنها از فضاهای نمونه‌ای گسسته صحبت می‌کنیم.

ث) همان‌طور که در (ب) گفتیم اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند وقتی که برآمدی مشترک نداشته باشند آنها را **ناسازگار** می‌گویند. اگر A و B برآمدهایی مشترک داشته باشند، یعنی $A\cap B$ تهی نباشد آن‌گاه $A\cap B$ که خود زیر مجموعهٔ S است، یک پیشامد است و وقتی رخ می‌دهد که برآمدی از آن، که ناچار هم عضو A و هم عضو B است، رخ دهد. اگر پیشامد $A\cup B$ را در نظر بگیریم وقتی این پیشامد رخ می‌دهد که حدّاقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد. واضح است این برآمد که متعلق به A و یا متعلق به B است می‌تواند متعلق به اشتراک A و B هم باشد. در سال قبل دیده‌ایم که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



فضای نمونه‌ای : S

برآمد : ●

پیشامد : A

پیشامد : B

شکل ۱ــ نمایش فضای نمونه‌ای، برآمد و پیشامد

فرمول صفحهٔ قبل به شما اجازه می‌دهد که وقتی از روی مدل احتمال، احتمال رخداد پیشامد A، احتمال رخداد پیشامد B و احتمال رخداد پیشامد $A\cap B$ را دارید احتمال رخداد پیشامد $A\cup B$ را به‌دست آورید. برابری‌های زیر را نیز یادآوری می‌کنیم.

اگر پیشامد $\overline{A}$ متمم پیشامد A باشد آن‌گاه

$$P(\overline{A})=۱-P(A)$$

که بی‌درنگ نتیجه می‌شود

$$P(\phi)=۱-P(S)=۰$$

همچنین اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

و

$$P(A)\leq P(B)$$

اینک پس از این یادآوری‌ها به بیان مطالبی جدید در زمینهٔ احتمال می‌پردازیم.

۸ـ۲ـ مدل احتمال شرطی

فرض کنید می‌خواهیم آزمایشی تصادفی را انجام دهیم. ابتدا فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم و احتمالی به رخداد هر پیشامد نسبت می‌دهیم و بدین ترتیب مدل احتمال را معین می‌کنیم. این مدل را می‌شناسید. حال اگر اطلاعی اضافی دربارهٔ فضای نمونه‌ای داشته باشیم، مثلاً به دلیلی بدانیم که پیشامد B از این فضای نمونه‌ای رخ داده است آن‌گاه معمولاً مدل احتمال قبلی به هم می‌ریزد و آگاهی از رخداد حتمی پیشامد B در مقدار احتمال سایر پیشامدها اثر می‌گذارد، که در این صورت احتمال‌های پیشامدهای فضای نمونه‌ای با احتمال‌های مدل قبلی تفاوت دارند. اگر بتوانیم تحت این شرط که پیشامد B حتماً رخ می‌دهد احتمال پیشامدهای دیگر فضای نمونه‌ای را مشخص کنیم مدل احتمال جدیدی به‌دست می‌آید که آن را مدل **احتمال شرطی** می‌نامیم. قبل از توضیح بیشتر مثالی می‌زنیم.

مثال ۳ : می‌خواهید یک تاس قرمز و یک تاس سفید را با هم بریزید. تاس‌ها همگن‌اند. می‌دانید که فضای نمونه‌ای ۳۶ برآمد دارد :

S={(۱قرمز و ۱سفید)،...،(۶ قرمز و ۱ سفید)،...،(۱ قرمز و ۶ سفید)، ...،(۶ قرمز و ۶ سفید)}

پس از انجام آزمایش، یکی از این ۳۶ برآمد رخ خواهد داد. احتمال رخداد هر برآمد $\frac{۱}{۳۶}$ است. حال فرض کنید این اطلاع اضافی را داریم که پس از انجام آزمایش مجموع شماره‌های دو

تاس حتماً کوچک‌تر از ۷ است. پیشامد «مجموع دو شماره کوچک‌تر از ۷» را B می‌نامیم. پیشامد B از برآمدهای زیر تشکیل می‌شود :

(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵)

(۲,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۲,۴)

(۳,۱), (۳,۲), (۳,۳)

(۴,۱), (۴,۲)

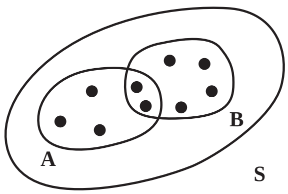
(۵,۱)

یعنی پیشامد B، متشکل از ۱۵ برآمد از ۳۶ برآمد فضای نمونه‌ای است. وقتی شرط می‌کنیم که B حتماً رخ می‌دهد، یعنی یکی از این ۱۵ برآمد نتیجهٔ ریختن دو تاس است.

برآمدهایی مثل (۱,۶) یا (۲,۵) یا (۴,۵) و غیره که مجموع دو شمارهٔ آنها ۷ یا بیش از ۷ است رخ نخواهند داد. حال که می‌دانیم پیشامد B به طور مطمئن رخ می‌دهد آن را فضای نمونه‌ای جدید فرض می‌کنیم و بدین ترتیب مدل احتمال جدیدی داریم که آن را مدل احتمال شرطی با شرط «مجموع دو شماره کوچک‌تر از ۷ است» می‌نامیم. حال اگر بخواهیم به شرط رخداد پیشامد B، احتمال رخداد یک جفت را بدانیم و پیشامد داشتن جفت را با A نشان دهیم در این صورت احتمال پیشامد داشتن جفت به شرط رخداد پیشامد B را با P(A|B) نشان می‌دهیم و می‌خوانیم احتمال **پیشامد A** به **شرط رخداد پیشامد B** و یا به صورتی ساده احتمال **پیشامد A به شرط B**. وقتی می‌دانیم B رخ داده، تنها ممکن است یکی از ۱۵ برآمد بالا رخ دهد. بین این برآمدها جفت‌های ممکن (۱,۱)، (۲,۲) و (۳,۳) هستند. چون احتمال رخداد هر برآمد مساوی $\frac{۱}{۱۵}$ است، لذا

$$P(A \mid B) = P\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\} = \frac{۳}{۵}$$

در مثال بالا، احتمال شرطی، یعنی P(A|B) را به سادگی حساب کردیم زیرا فضای نمونه‌ای آزمایش یکنواخت، یا برآمدها متساوی‌الاحتمال یعنی هم شانس بودند، ولی اگر احتمال برآمدها یکی نباشند کار کمی مشکل است. قبل از اینکه تعریف کلی احتمال شرطی را مطرح کنیم، به این مطلب به صورتی شهودی می‌اندیشیم. به شکل ۲ توجه کنید.



شکل ۲

S فضای نمونه‌ای آزمایش است. B پیشامدی است که می‌دانیم رخ خواهد داد. A پیشامدی است که می‌خواهیم به شرط آنکه B رخ دهد، احتمال رخدادش را بیابیم. وقتی B رخ می‌دهد که یکی از برآمدهایش رخ دهد. اگر برآمدی که رخ می‌دهد در $A\cap B$ باشد طبیعتاً A هم رخ می‌دهد. پس هر چه احتمال رخداد پیشامد $A\cap B$ بیشتر باشد احتمال رخداد پیشامد A به شرط B بیشتر است. لذا به‌طور شهودی $P(A|B)$ باید در رابطهٔ مستقیم با $P(A\cap B)$ باشد. این رابطه را به صورت،

$$(۱)\quad P(A|B)=KP(A\cap B)$$

فرض می‌کنیم. در این برابری اگر به جای پیشامد A پیشامد B قرار بگیرد نتیجه می‌شود

$$P(B|B)=KP(B\cap B)$$

اما احتمال رخداد پیشامد B به شرط B برابر ۱ است زیرا B حتماً رخ می‌دهد و $B\cap B=B$، پس برابری بالا به صورت

$$1=K.P(B)$$

در می‌آید و داریم $K=\frac{1}{P(B)}$. اگر این مقدار را در (۱) قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

این رابطه را به طور شهودی به‌دست آوردیم. براساس همین رابطهٔ شهودی تعریف زیر را برای احتمال شرطی ارائه می‌دهیم.

تعریف احتمال شرطی : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند وقتی $P(B)\neq 0$، احتمال پیشامد A به شرط اینکه پیشامد B رخ دهد به صورت

$$(۲)\quad P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تعریف می‌شود. وقتی $P(B)=0$، احتمال شرطی قابل تعریف نیست.

تذکر : اگر فضای نمونه‌ای گسسته و هم‌شانس باشد می‌توانیم رابطهٔ احتمال شرطی را ساده کرده و به‌صورت $P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ از آن استفاده کنیم.

مثال ۴ : سازندهٔ قطعات یدکی یک کارخانه از روی تجربه‌های گذشته می‌داند احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود ۰/۹ است و احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع تحویل مشتری شود برابر ۰/۸ است. احتمال اینکه سفارشی به موقع تحویل شود به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد چقدر است؟

ابتدا قرار می‌دهیم :

پیشامد آماده بودن به موقع، برای ارسال $=A$

پیشامد تحویل به موقع سفارش، به مشتری $=B$

بنابر داده‌های مسأله، $P(A)=\circ/۹$ و $P(A\cap B)=\circ/۸$

زیرا پیشامد $A\cap B$ به معنای این است که سفارش هم به موقع آماده برای ارسال بوده و هم به‌موقع تحویل مشتری می‌شود. آنچه می‌خواهیم، $P(B|A)$ است، یعنی احتمال تحویل به موقع سفارش به مشتری به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد. بنابر تعریف احتمال شرطی

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\circ/۸}{\circ/۹}=\frac{۸}{۹}$$

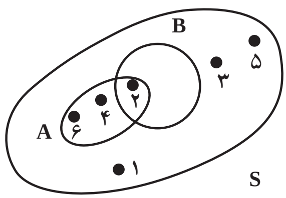
مثال ۵ : تاسی همگن را با چشم بسته انداخته‌ایم. برآمد حاصل را نگفته‌اند، ولی اعلام کرده‌اند که برآمد حاصل عددی زوج است. احتمال اینکه شمارهٔ ۲ ظاهر شده باشد چقدر است؟

قرار می‌دهیم :

پیشامد ظاهر شدن شمارهٔ زوج $=A$

پیشامد ظاهرشدن شمارهٔ ۲ $=B$

به شکل ۳ توجه کنید.



شکل ۳

لذا $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۲}}=\dfrac{۱}{۳}$ یا $P(B|A)=\dfrac{n(B\cap A)}{n(A)}=\dfrac{۱}{۳}$

زیرا $P(A)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}$. به عبارت دیگر می‌توانید تصور کنید که فضای نمونه‌ای $\{۲,۴,۶\}$ است که حتماً رخ داده است و لذا روی این فضا، رخ دادن ۲ دارای یک شانس از ۳ شانس است یعنی احتمال رخداد برآمد ۲ برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۸ـ۳ـ قاعدهٔ ضرب احتمال

از تعریف

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \qquad P(B)\neq ۰$$

نتیجه می‌شود که

$$P(A\cap B)=P(B).\,P(A|B), \quad P(B)\neq ۰$$

این رابطه به **قاعدهٔ ضرب احتمال** موسوم است. به کمک این قاعده می‌توان احتمال رخداد هم‌زمان دو پیشامد را تعیین کرد.

مثال ۶ : جعبه‌ای محتوی ۱۲ لامپ است که می‌دانیم ۳ تای آنها معیوب‌اند. از این جعبه به تصادف ۱ لامپ برمی‌داریم. سپس مجدداً بدون جای‌گذاری لامپ اول، لامپ دیگری به تصادف برمی‌داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند چقدر است؟

ابتدا قرار می‌دهیم :

A= پیشامد معیوب بودن لامپ اول

B= پیشامد معیوب بودن لامپ دوم

بنابراین $A\cap B$ پیشامد معیوب بودن هر دو لامپ است. واضح است که :

$$P(A)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

اگر لامپ اول معیوب باشد، لامپ دوم را از بین ۱۱ لامپ باقی مانده که **۲** تای آنها معیوب است برمی‌داریم پس :

$$P(B|A)=\frac{۲}{۱۱}$$

لذا از قاعدهٔ ضرب احتمال داریم :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=\frac{۱}{۴}.\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۲۲}$$

▲

۸ـ۴ـ استقلال دو پیشامد

پیشامدهای A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند که احتمال آنها مثبت است. اگر آگاهی از رخداد پیشامد B در احتمال رخداد پیشامد A مؤثر نباشد A را **مستقل** از B می‌گویند. پس برای مستقل بودن A از B باید

$$P(A|B)=P(A)$$

ولی می‌دانیم که

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

از مقایسهٔ دو برابری داریم :

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

یا

$$(۳)\quad P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

به سادگی می‌توان دید که اگر B از A مستقل باشد باز همین رابطه برقرار است. پس اگر A از B مستقل باشد یا B از A مستقل باشد باید رابطهٔ (۳) برقرار باشد. از طرفی با داشتن رابطهٔ (۳) می‌توان به رابطه‌های $P(B|A)=P(B)$ و $P(A|B)=P(A)$ رسید. (چرا؟) یعنی رابطهٔ (۳) شرط لازم و کافی برای استقلال A از B و B از A است. بر این اساس می‌گوییم A و B مستقل‌اند. پس :

تعریف : دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه‌ای مستقل‌اند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

اگر $P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$ می‌گویند دو **پیشامد وابسته**‌اند.

مثال ۷ : فرض کنید برای ریاست شرکتی ۴ داوطلب وجود دارند. احتمال انتخاب‌شدن همهٔ داوطلب‌ها یکی است. برآمدهای انتخاب افراد را به ترتیب با ۱، ۲، ۳ و ۴ نمایش می‌دهیم. نشان دهید که پیشامدهای $A=\{۱,۴\}$ و $B=\{۱,۳\}$ از هم مستقل‌اند.

فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ است. بنابر داده‌های مثال،

$$P(۱)=P(۲)=P(۳)=P(۴)=\frac{۱}{۴}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که پیشامد A یعنی انتخاب فرد اول یا چهارم، از پیشامد B یعنی از انتخاب فرد اول یا سوم مستقل است. واضح است که

$$A\cap B=\{۱,۴\}\cap\{۱,۳\}=\{۱\}$$

پس :

$$P(A\cap B)=P(۱)=\frac{۱}{۴}$$

از طرفی :

$$P(A)=P(B)=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۴}$$

یعنی پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند.

توجه : اگر دو پیشامد یک فضای نمونه‌ای ناسازگار باشند یعنی برآمدی مشترک نداشته باشند و احتمال هر دو مثبت باشد آن دو پیشامد از هم مستقل نیستند. به عبارت دیگر ناسازگاری دو پیشامد به استقلال دو پیشامد ربطی ندارد. زیرا اگر $A\cap B=\phi$، آن‌گاه

$$P(A\cap B)=P(\phi)=0$$

و اگر A و B مستقل باشند باید

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

از مقایسهٔ دو برابری اخیر نتیجه می‌شود که

$$P(A).P(B)=0$$

یعنی دو پیشامد ناسازگار وقتی مستقل‌اند که $P(A)=0$ یا $P(B)=0$، و اگر این دو احتمال صفر نباشند A و B مستقل نیستند.

۸ـ۵ـ فرمول احتمال کل

اگر فضای نمونه‌ای S به n پیشامد B_1، B_2، ...، B_n افراز شده باشد و اگر A پیشامدی از S باشد آن‌گاه به شرط $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...,n$ ،

$$(4)\quad P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

زیرا همان‌طور که در سال پیش دیده‌ایم

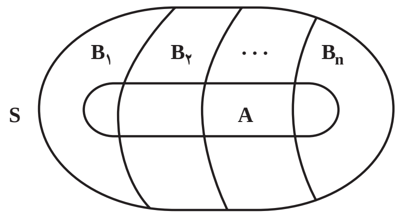
$$B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S$$

و هر دو پیشامد B_i و B_j وقتی $i\neq j$، ناسازگارند، یعنی $B_i\cap B_j=\phi$، $i\neq j$، بدیهی است که

$$A=A\cap S=A\cap(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$$

اما همه پیشامدهای طرف دوم رابطه بالا دو به دو ناسازگارند، پس، طبق اصل موضوع ۳، داریم :

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\ldots+P(A\cap B_n)$$



شکل ۴ــ افراز فضای نمونه‌ای

یا به صورت خلاصه، $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i)$. اما می‌دانیم که با توجه به تعریف احتمال شرطی و با فرض $P(B_i)\neq 0$، $P(A\cap B_i)=P(B_i)P(A|B_i)$، پس نتیجه می‌شود که $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$.

این فرمول به فرمول **احتمال کل** موسوم است.

مثال ۸ : سه ظرف همانند داریم. اولین ظرف شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۱۱ مهرهٔ سیاه است. دومین ظرف شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه است، و سومین ظرف تنها شامل مهره‌های سفید است. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای در می‌آوریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد چقدر است؟

پیشامد استخراج مهرهٔ سفید را با A نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(A)$ را حساب کنیم پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم

$B_1=\{$ظرف اول انتخاب شود$\}$

$B_2=\{$ظرف دوم انتخاب شود$\}$

$B_3=\{$ظرف سوم انتخاب شود$\}$

بدیهی است $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$. از طرفی

$$P(A|B_1)=\frac{5}{16},\ P(A|B_2)=\frac{1}{4},\ P(A|B_3)=1$$

حال با توجه به فرمول احتمال کل

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+P(B_3).P(A|B_3)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{5}{16}+\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\frac{1}{3}.1=\frac{25}{48}$$

▲

۸ ـ ۶ ـ قاعدهٔ بیز

(حالت ساده). در آزمایش‌های معمولی مواردی وجود دارند که برآمد نهایی آزمایش به آنچه در مراحل قبلی رخ می‌دهند بستگی دارد. برای توضیح این مطلب ابتدا به معرفی قاعدهٔ بیز می‌پردازیم.

دیدیم که اگر A و B دو پیشامد با احتمال مثبت از فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشند، آن‌گاه داریم

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

و

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

اگر از برابری دوم $P(A\cap B)$ یعنی $P(B|A).P(A)$ را در برابری اول قرار دهیم، نتیجه می‌شود که

$$(۵)\quad P(A\mid B)=\frac{P(A)}{P(B)}.P(B\mid A)$$

این رابطه را **قاعدهٔ بیز** می‌نامند. قاعدهٔ بیز در حالت کلی مفصل‌تر است. تامس بیز (۱۷۶۱ــ ۱۷۰۲) کشیشی انگلیسی بود که حالت کلی‌تر این قاعده را ارائه داد. در مثال زیر یک مورد استفاده از قاعدهٔ بیز را می‌بینید.

مثال ۹ : وقتی یک مرکز مخابرهٔ تلگراف، پیامی را به مرکز دیگر می‌فرستد گاهی خطاهایی در انتقال صورت می‌گیرد. به ویژه وقتی از الفبای مورس برای مخابره استفاده می‌شود و کدهای «نقطه» و «خط» را به کار می‌برند[1] این خطاها بدین صورت است که کدی که مرکز M به صورت نقطه می‌فرستد در مرکز N خط دریافت می‌شود و یا برعکس. به تجربه دریافته‌اند که به طور متوسط در هر متنی که مرکزی می‌فرستد نسبت فراوانی نقطه به فراوانی خط برابر ۳ به ۴ است. همچنین به طور تقریب می‌دانند که با احتمال $\frac{۱}{۸}$ نقطه‌ای که مرکز M می‌فرستد در مرکز N در اثر تداخل خطوط مخابره، اشتباهاً خط دریافت می‌شود و با همین احتمال خطی را که مرکز M می‌فرستد در مرکز N نقطه دریافت می‌شود. حال اگر در مرکز N کدی به صورت نقطه دریافت شده باشد چقدر احتمال دارد که این کد واقعاً به‌صورت نقطه فرستاده شده باشد؟

اگر در فرمول بیز قرار دهیم

پیشامد فرستادن نقطه $=A$

پیشامد دریافت نقطه $=B$

آن‌گاه فرمول

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)}{P(B)}.P(B\mid A)$$

به صورت زیر درمی‌آید

الف) $P(\text{فرستادن نقطه}|\text{دریافت نقطه})=\frac{P(\text{فرستادن نقطه})}{P(\text{دریافت نقطه})}.P(\text{دریافت نقطه}|\text{فرستادن نقطه})$

آنچه می‌خواهیم به‌دست آوریم طرف اول رابطه است. زیرا در مرکز N نقطه‌ای دریافت شده است و می‌خواهیم احتمال اینکه این کد به صورت نقطه فرستاده شده باشد را بدانیم. پس سه احتمال طرف دوم را حساب می‌کنیم.

۱ــ این روزها، در ارتباط‌های الکترونیکی از کدهای ۰ و ۱ استفاده می‌کنند.

(ب) $P(A)=P(\text{فرستادن نقطه})=\frac{۳}{۷}$

(پ) $P(B|A)=P(\text{دریافت نقطه} \mid \text{فرستادن نقطه})=\frac{۷}{۸}$

محاسبهٔ سومین احتمال یعنی (دریافت نقطه)P کمی مفصل تر است. وقتی نقطه‌ای دریافت می‌شود باید فکر کنیم که نقطه‌ای فرستاده‌اند و یا خطی فرستاده‌اند که به خطا نقطه دریافت شده است. پس

(ت) $P(B)=P(\text{دریافت نقطه})=P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن نقطه})+P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن خط})$

اما از فرمول حاصل‌ضرب احتمال می‌توانیم دو جملهٔ طرف دوم را حساب کنیم.

$$P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن نقطه})=P(\text{دریافت نقطه} \mid \text{فرستادن نقطه}).P(\text{فرستادن نقطه})$$

$$=\frac{۷}{۸}.\frac{۳}{۷}=\frac{۳}{۸}$$

$$P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن خط})=P(\text{دریافت نقطه} \mid \text{فرستادن خط}).P(\text{فرستادن خط})$$

می‌دانیم که طبق داده‌های مثال، $P(\text{فرستادن خط})=\frac{۴}{۷}$ و $P(\text{دریافت نقطه} \mid \text{فرستادن خط})=\frac{۱}{۸}$.

پس :

$$P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن خط})=\frac{۱}{۸}.\frac{۴}{۷}=\frac{۱}{۱۴}$$

اگر مقادیر این دو جمله را در (ت) قرار دهیم

(ث) $P(B)=P(\text{دریافت نقطه})=\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۱۴}=\frac{۲۵}{۵۶}$

حال اگر (ب)، (پ) و (ث) را در (الف) قرار دهیم جواب مسأله به دست می‌آید :

$$P(\text{فرستادن نقطه} \mid \text{دریافت نقطه})=\frac{\frac{۳}{۷}}{\frac{۲۵}{۵۶}}.\frac{۷}{۸}=\frac{۲۱}{۲۵}$$

پس اگر در مرکز N نقطه‌ای دریافت شود احتمال $\frac{۲۱}{۲۵}$ وجود دارد که این کد واقعاً به صورت نقطه فرستاده شده باشد.

مثال ۱۰ : در جعبهٔ $A_۱$ سه مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و در جعبهٔ $A_۲$ پنج مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب و ۱ مهره از آن خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم

که آبی است. چقدر احتمال دارد این مهره از جعبهٔ $A_۱$ باشد؟

پیشامد اینکه مهره از $A_۱$ باشد $=A$

پیشامد اینکه مهره آبی باشد $=B$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B\mid A)=\frac{\frac{\cancel{۱}}{\cancel{۲}}}{\frac{\cancel{۱}}{\cancel{۲}}\times(\frac{۴}{۷}+\frac{۳}{۸})}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۳۲}{۵۳}$$

۸ ـ۷ـ تمرین‌ها

۱ــ جعبه‌ای محتوی ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه است. متوالیاً دو مهره به تصادف از جعبه بدون جای‌گذاری برمی‌داریم.

الف) اگر اولین مهره سیاه باشد احتمال اینکه دومین مهره هم سیاه باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه مهرهٔ دوم هم‌رنگ مهرهٔ اول باشد چقدر است؟

۲ــ برحسب تجربهٔ گذشته می‌دانیم احتمال اینکه رتبهٔ اول سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستانی در مسابقهٔ ورودی دانشگاه قبول شود ۰/۹۵ است. با توجه به سوابق تحصیلی علی در این دبیرستان، احتمال اینکه او در سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستان رتبهٔ اول شود ۰/۹ است. احتمال اینکه علی هم رتبهٔ اول شود و هم در مسابقهٔ ورودی دانشگاه قبول شود چقدر است؟

۳ــ سکه‌ای همگن را ۳ بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد رخ‌دادن رو در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ‌دادن پشت در پرتاب سوم و C پیشامد رخ‌دادن دقیقاً دو پشت در سه پرتاب باشد، نشان دهید که A و B مستقل‌اند ولی B و C مستقل نیستند.

۴ــ احتمال زنده‌ماندن در یک عمل پیوند عضو برابر ۰/۵ است. اگر بیماری پس از عمل زنده باشد احتمال اینکه بدن او در طول یک ماه پیوند را قبول نکند و بمیرد ۰/۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی پس از این دو مرحله چقدر است؟

۵ــ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که ۳ تای آنها معیوب‌اند. اگر به تصادف ۳ لامپ متوالیاً بدون جای‌گذاری از جعبه برداریم احتمال اینکه هر ۳ لامپ معیوب باشند چقدر است؟

۶ــ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد a، b، c، d و e است. به شرط آنکه $P(\{a,b,c\})=\frac{۱}{۲}$، $P(a)=\frac{۱}{۴}$ مطلوب است :

الف) محاسبهٔ $P(\{b,c,d\}\mid\{a,b,c\})$

ب) محاسبهٔ $P(\{a\}\mid\{a,b,c\})$

۷ــ ۴ مهره به شماره‌های ۳،۲،۱ و ۴ را در ظرفی ریخته‌ایم. اگر بخواهیم دو مهره به تصادف از ظرف بیرون بیاوریم شش امکان (۱,۲)، (۱,۳)، (۱,۴)، (۲,۳)، (۲,۴) و (۳,۴) وجود دارند. تفاضل هر دو شماره را R و مجموع آنها را S فرض می‌کنیم.

الف) احتمال پیشامدی را که برای آن $R=۲$، به‌دست آورید.

ب) احتمال پیشامدی را که برای آن $S=۵$، به‌دست آورید.

آیا این پیشامدها مستقل‌اند؟

پ) اگر در قسمت الف، R برابر یک باشد و در قسمت ب، S همچنان ۵ باشد پیشامدها مستقل‌اند؟

۸ــ در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ عدد لامپ همانند وجود دارد. در جعبهٔ اول ۵ عدد لامپ معیوب و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب موجود است. از اولی ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و آنها را به صورت درهم در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم. از این جعبه به تصادف لامپی برمی‌داریم. احتمال اینکه این لامپ معیوب باشد چقدر است؟

۹ــ دو ظرف داریم. اولی شامل ۱۰ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است و دومی شامل ۱۲ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه است. از ظرف اول به تصادف مهره‌ای در می‌آوریم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف دوم به تصادف مهره‌ای درمی‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

۱۰ــ تکمیل بنای راهی ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ دهد ۰/۶۵ باشد و احتمال اینکه اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود ۰/۸ و احتمال اینکه اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود ۰/۳ باشد. احتمال اینکه کار بنای راه به موقع انجام شود چقدر است؟

۱۱ــ اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید

$$P(A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳) \leq P(A_۱)+P(A_۲)+P(A_۳)$$

۱۲ــ اگر $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S و با احتمال مثبت باشند، $P(B_۳|B_۲ \cap B_۱)$ به معنای احتمال رخداد پیشامد $B_۳$ به شرط رخداد هر دو پیشامد $B_۱$ و $B_۲$ است. با این تعریف ثابت کنید

$$P(B_۱ \cap B_۲ \cap B_۳) = P(B_۱)P(B_۲|B_۱)P(B_۳|B_۲ \cap B_۱)$$

۱۳ــ اگر $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ سه پیشامد دو به دو ناسازگار و با احتمال مثبت باشند که اجتماع آنها برابر با S است و اگر A پیشامدی از S باشد ثابت کنید.

$$P(B_۱ \mid A) = \frac{P(A \mid B_۱)P(B_۱)}{\sum_{i=۱}^{۳} P(A \mid B_i)P(B_i)} \ , \ i=۱,۲,۳$$