



مباحثی دیگر از ترکیبیات

مقدمه

در قسمت اول با نظریهٔ گراف‌ها که یکی از مباحث ترکیبیات است آشنا شدیم. در این قسمت با مباحثی دیگر از ترکیبیات آشنا می‌شویم. ترکیبیات معمولاً با مجموعه‌های متناهی سرو کار دارد و لذا یکی از مباحث ترکیبیات، شمارش است. در اینجا با بعضی از ابزارهای شمارش آشنا می‌شویم. کلاً به مقدمات بسنده می‌کنیم، با این امید که دانش‌آموزان با این آشنایی اولیه انگیزهٔ کافی پیدا کنند که خود در این مباحث به مطالعه بپردازند.

در فصل ۷ نشان می‌دهیم گراف‌ها چگونه می‌توانند به فهم مطالب دیگر ریاضی کمک کنند. گراف‌ها و ماتریس‌های متناظر با آنها با شکل و شمایل شهودی که دارند به تجسم مفاهیم انتزاعی کمک می‌کنند. یکی از دلایلی که همهٔ ما از هندسه خوشمان می‌آید شهودی بودن آن است. گراف نیز همان امتیاز را دارد. به علاوه چون در رسم نمودار گراف طول یال‌ها و یا مکان رأس‌ها مطرح نیست درک شهودی ساده‌تر می‌شود. در بخش ۷-۱ بعضی از این استفاده‌های شهودی را مطرح می‌کنیم. در مطالعهٔ مجموعه‌ها نیز می‌توان نمودارهایی به آنها نسبت داد. این نمودارها به درک مفاهیم کمک زیادی می‌کنند. با استفاده از این نمودارها حتی می‌توانیم مفاهیمی را که یاد گرفته‌ایم تعمیم دهیم. بخش ۷-۳ به این موضوع اختصاص دارد. با تعمیم این مفاهیم یک ابزار شمارشی به نام اصل شمول و عدم شمول را خواهیم دید. در فصل ۸ یکی دیگر از مباحث ریاضی به نام دنباله‌های بازگشتی را به عنوان یک ابزار شمارشی به کار خواهیم گرفت.

مدل‌های شهودی و تجسمی در ترکیبیات

۱-۷- رابطه‌ها و گراف‌ها

مفاهیم مربوط به رابطه را که در کتاب جبر و احتمال سال سوم دیده‌ایم یادآوری می‌کنیم. **تعریف:** هرگاه A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه یک رابطه از A به B عبارت است از زیرمجموعه‌ای از $A \times B$. زیرمجموعه‌های $A \times A$ را **رابطه‌های روی A** می‌گویند.

مثال ۱: روی مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} یک رابطه R را می‌توان چنین تعریف کرد:
 aRb یا $(a,b) \in R$ هرگاه $a \leq b$.

این رابطه همان رابطه معمولی «کوچک‌تر از یا مساوی با» روی \mathbb{Z} است که روی Q ، مجموعه اعداد گویا، و روی \mathbb{R} ، مجموعه اعداد حقیقی، نیز تعریف می‌شود. ▲

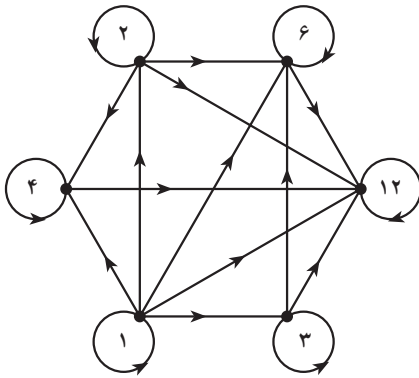
مثال ۲: برای هر دو عضو $x,y \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم:
 xRy یا $(x,y) \in R$ هرگاه $x - y$ مضربی از ۷ باشد.

پس داریم: $9R2$ و $11R-3$ ، ولی $7 \nmid 3$. ▲

مثال ۳: مجموعه $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ مفروض است. به‌ازای هر دو عضو $a,b \in A$ تعریف

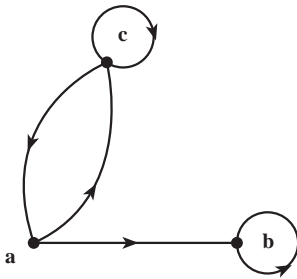
می‌کنیم: aRb هرگاه $a|b$. ▲

حال فرض کنید A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه روی A باشد. به R گراف جهت‌دار G را به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم. رأس‌های G اعضای A هستند و رأس a به رأس b متصل است هرگاه aRb .



شکل ۱- گراف جهت دار رابطه عادی کردن

به عنوان مثال، شکل ۱، گراف مربوط به رابطه‌ای را که در مثال ۳ داده شده است نشان می‌دهد. مثلاً رأس ۱ به تمام رؤوس، حتی به خود ۱، وصل است زیرا عدد ۱ تمام اعداد صحیح را می‌شمارد.



شکل ۲- گراف جهت دار یک رابطه

متقابلاً هرگراف جهت دار نشانگر یک رابطه است. مثلاً از گراف شکل ۲ نتیجه می‌شود که رابطه‌ای مانند R روی مجموعه $A = \{a, b, c\}$ تعریف شده است و داریم:

$$aRb, aRc, bRb, cRa, cRc$$

این تناظر بین گراف‌های (جهت دار) و رابطه‌ها به درک بسیاری از ویژگی‌های رابطه‌ها کمک می‌کند. مثلاً می‌توانید بازتابی، متقارن بودن یا نبودن رابطه‌ها را فوراً از روی گراف جهت دار مربوط تشخیص دهید. این ویژگی‌ها در درس‌های سال‌های قبل تعریف شده‌اند. یکی از ویژگی‌های رابطه‌ها که کاربرد فراوان دارد خاصیت پاد متقارن است. رابطه R را وقتی پاد متقارن گوئیم که به ازای هر زوج مرتب (a, b) ، اگر $(a, b) \in R$ و $(b, a) \in R$ آن‌گاه $a = b$. مثلاً رابطه «کوچک‌تر از یا مساوی با» در مثال ۱ و رابطه «عادی کردن» در مثال ۳ دو رابطه پاد متقارن اند ولی رابطه مثال ۲ پاد متقارن نیست. حال ارتباط این ویژگی‌ها را با گراف‌های جهت دار بیان می‌کنیم.

یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن در هر رأس دارای یک طوقه باشد. طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی مانند b یک یال موجود باشد آن‌گاه از رأس b به رأس a نیز یالی موجود باشد.

یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد آنگاه از رأس b به رأس a یالی موجود نباشد.

یک رابطه ترایی است اگر و تنها اگر در گراف جهت دار متناظر با آن اگر از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد و از رأس b به رأسی مانند c یالی موجود باشد آنگاه از رأس a به رأس c نیز یک یال وجود داشته باشد.

مثال ۴: با توجه به شکل ۲ معلوم می شود که رابطه متناظر با این گراف جهت دار هیچ یک از ویژگی های فوق را ندارد (چرا؟). در صورتی که گراف جهت دار شکل ۱ متناظر با رابطه ای است که دارای ویژگی های بازتابی، پادمتقارن بودن و ترایی است. ▲

۲-۷- رابطه ها و ماتریس ها

در قسمت گراف ها به هر گراف یک ماتریس صفر و یک به نام ماتریس مجاورت نسبت داده شد. ماتریس مجاورت گراف های جهت دار هم به طور مشابه تعریف می شود. مثلاً ماتریس مجاورت گراف جهت دار شکل ۲ به صورت زیر است:

$$a \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس می توان این ماتریس را متناظر با رابطه مربوط به شکل ۲ گرفت. توجه کنید که درایه ij ام ماتریس متناظر مساوی با 1 است اگر و تنها اگر iRj .

اکنون می توانیم ویژگی های مربوط به رابطه ها را به زبان ماتریس ها بیان کنیم. مثلاً ویژگی بازتابی یعنی اینکه همه درایه های قطر اصلی ماتریس 1 باشند. بقیه ویژگی ها را به زبان ماتریس بیان کنید.

در این فصل صرفاً ماتریس های صفر و یک را در نظر می گیریم. اکنون یک عمل جمع و یک عمل ضرب برای اعضای مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ تعریف می کنیم که از روی آن «توان دوم» را برای ماتریس ها تعریف خواهیم کرد. این توان دوم با آنچه که در جبر خطی دیده ایم فرق دارد.

تعریف: روی مجموعه $\{0, 1\}$ دو عمل $+$ و \odot موسوم به عمل‌های بولی را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1, \quad 0 + 0 = 0, \quad 1 + 1 = 1$$

$$1 \odot 1 = 1, \quad 1 \odot 0 = 0 \odot 1 = 0 \odot 0 = 0$$

با توجه به تعریف بالا، توان دوم ماتریس $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M^{(2)} = [m_{i1} \odot m_{1j} + m_{i2} \odot m_{2j} + \dots + m_{in} \odot m_{nj}]_{n \times n}$$

به عبارت دیگر برای به دست آوردن توان دوم یک ماتریس که در اینجا تعریف کردیم مانند توان دوم معمولی در ماتریس‌ها عمل می‌کنیم ولی در نهایت به جای هر درایه غیر صفر که به دست آمده باشد عدد ۱ قرار می‌دهیم.

مثال ۵: اگر $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه داریم: $M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

تعریف: هرگاه R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد ترکیب رابطه RoR ، رابطه‌ای روی A است که با قاعده زیر تعریف می‌شود:

$$a(\text{RoR})c \text{ هرگاه عضو } a \in A \text{ وجود داشته باشد که } b \text{ و } aRb \text{ و } bRc$$

با توجه به تعریف‌های فوق قضیه زیر را می‌توان به سادگی اثبات کرد.

قضیه ۱: فرض کنید A یک مجموعه n عضوی، $n \in \mathbb{N}$ و R یک رابطه روی A باشد. هرگاه

$M(R)$ ماتریس متناظر R باشد داریم:

(الف) $M(R) = [0]_{n \times n}$ (یعنی همه درایه‌های $M(R)$ صفرند) اگر و تنها اگر $R = \emptyset$;

(ب) $M(R) = [1]_{n \times n}$ (یعنی همه درایه‌های $M(R)$ یک‌اند) اگر و تنها اگر $R = A \times A$;

(پ) $M(\text{RoR}) = [M(R)]^{(2)}$.

اثبات: بند (الف) و (ب) بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شوند. برای اثبات بند (پ)، اول فرض

کنید $i(\text{RoR})j$. پس عضوی مانند $k \in A$ وجود دارد به طوری که iRk و kRj . پس درایه‌های ik و

jk در ماتریس M مساوی با ۱ هستند. در نتیجه درایه ij در ماتریس $M^{(2)}$ برابر با ۱ است. حال

به عکس اگر درایه ij در ماتریس $M^{(2)}$ برابر با ۱ باشد یعنی

$$m_{i1} \odot m_{1j} + m_{i2} \odot m_{2j} + \dots + m_{in} \odot m_{nj} = 1$$

آن‌گاه حداقل یکی از جمعوندها باید مساوی با ۱ باشد. مثلاً $m_{ik} \odot m_{kj} = 1$ از آنجا $m_{ik} = m_{kj} = 1$ ،
 که نتیجه می‌شود: kRj و iRk . پس بنا به تعریف خواهیم داشت $i \in (RoR)$.



مثال ۶: مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و رابطه R روی A به صورت

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,3), (3,4)\}$$

مفروض است. مطلوب است محاسبه RoR .

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{داریم}$$

$$[M(R)]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(RoR) \quad \text{پس:}$$



$$RoR = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$$

تعریف: فرض کنید ماتریس‌های صفر و یک $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ از اندازه $m \times n$ باشند. گوئیم A کوچک‌تر از یا مساوی B است و می‌نویسیم $A \ll B$ هرگاه به ازای هر $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $a_{ij} \leq b_{ij}$.

روشن است که اگر M_1 و M_2 ماتریس‌های متناظر با رابطه‌های R_1 و R_2 روی یک مجموعه A باشند، آن‌گاه $R_1 \subseteq R_2$ اگر و تنها اگر $M_1 \ll M_2$.

قضیه ۲: مجموعه n عضوی A ، $n \in \mathbb{N}$ ، و رابطه R روی آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید M ماتریس متناظر با این رابطه باشد. آن‌گاه

(الف) R بازتابی است اگر و تنها اگر $I_n \ll M$. (I_n ماتریس همانی $n \times n$ است).

(ب) R متقارن است اگر و تنها اگر $M = M^T$. (ماتریس M^T ترانژاده M است و آن ماتریسی است که از قراردادن سطرهای M به جای ستون‌های M ، با حفظ ترتیب، به دست می‌آید).

(پ) R تراییبی است اگر و تنها اگر $M^{(2)} \ll M$.

(ت) R پاد متقارن است اگر و تنها اگر $M \wedge M^T \ll I_n$. (ماتریس $M \wedge M^T$ با عمل روی درایه‌های M و M^T نظیر به نظیر با ضرب مؤلفه به مؤلفه تشکیل می‌شود).

اثبات : هر کدام از حکم های فوق با توجه به تعریف های مربوط به سادگی اثبات می شوند. ما دو حکم آخر را ثابت می کنیم.

برای اثبات (پ)، فرض کنید $M \ll M^{(2)}$. باید نشان دهیم R تراپایی است. هر گاه xRy و yRz ، آن گاه در ماتریس M ، درایه سطر x ام و ستون y ام و همچنین درایه سطر y ام و ستون z ام برابر ۱ است. در نتیجه درایه واقع در سطر x ام و ستون z ام در ماتریس $M^{(2)}$ برابر ۱ است. چون $M \ll M^{(2)}$ پس درایه سطر x ام و ستون z ام ماتریس M نیز باید ۱ باشد یعنی xRz .

به عکس، فرض کنید R تراپایی باشد. باید نشان دهیم که $M \ll M^{(2)}$. فرض کنید m_{xz} ، درایه واقع در سطر x ام و ستون z ام در ماتریس $M^{(2)}$ ، مساوی ۱ باشد، آن گاه باید $y \in A$ وجود داشته باشد که در ماتریس M : $m_{yz} = 1$ و $m_{xy} = 1$. در نتیجه باید xRy و yRz و چون R تراپایی است xRz . پس $m_{xz} = 1$ یعنی نشان داده ایم که $M \ll M^{(2)}$.

برای اثبات حکم (ت)، فرض کنید R پاد متقارن باشد. اگر به ازای دو عضو متمایز i و j داشته باشیم $(i, j) \notin R$ آن گاه درایه i ام در M و در نتیجه در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. اگر $(i, j) \in R$ آن گاه $(j, i) \notin R$. یعنی اگر درایه i ام در M مساوی با ۱ باشد آن گاه درایه j ام در M مساوی با ۰ است. پس در این صورت نیز درایه i ام در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. یعنی $M \wedge M^T \ll I_n$.

به عکس از $M \wedge M^T \ll I_n$ نتیجه می شود که همه درایه های غیر قطری $M \wedge M^T$ صفرند. یعنی به ازای $i \neq j$ داریم $m_{ij} \cdot m_{ji} = 0$. در این صورت فقط سه حالت زیر امکان پذیرند : $m_{ij} = m_{ji} = 0$ یا $m_{ij} = 1, m_{ji} = 0$ و یا $m_{ij} = 0, m_{ji} = 1$. اگر iRj و jRi آن گاه $i = j$.

اثبات بقیه حکم ها را به عنوان تمرین به عهده دانش آموزان می گذاریم. ■

قضیه های ۱ و ۲ ارتباط بین رابطه ها و ماتریس های صفر و یک را نشان می دهند. این قضیه ها با وجود سادگی اهمیت زیادی دارند. زیرا بهترین راه معرفی یک رابطه به کامپیوتر از طریق ماتریس صفر و یک است. از طریق حکم های فوق می توان با کامپیوتر ویژگی های هر رابطه ای را بررسی کرد.

مثال ۷ : با استفاده از قضیه ۲ می توان یک الگوریتم نوشت و با برنامه کامپیوتری هم ارزی بودن رابطه ای را که روی یک مجموعه متناهی A داده شده است امتحان کرد. یعنی رابطه R یک رابطه هم ارزی است اگر و تنها اگر M ، ماتریس صفر و یک متناظر با آن، دارای شرایط زیر باشد :

(الف) $I_n \ll M$

(ب) $M = M^T$

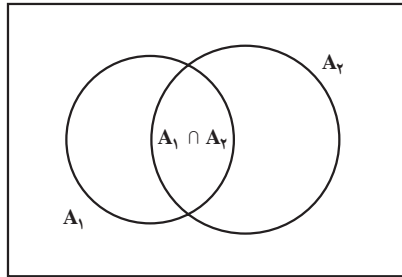
(پ) $M^{(2)} \ll M$

۳-۷- اصل شمول و عدم شمول

یکی از ابزارهای شمارش به اصل شمول و عدم شمول معروف است. حالت خاص آن را قبلاً در کتاب جبر و احتمال دیده‌اید. اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد تعداد عناصر آن را با $|A|$ نشان می‌دهیم. فرض کنید A_1 و A_2 دو مجموعهٔ متناهی باشند. داریم:

$$(۱) \quad |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

با توجه به شکل ۳ رابطهٔ (۱) درست است، زیرا در مجموع $|A_1| + |A_2|$ هر عضوی که فقط به یکی از مجموعه‌های A_1 یا A_2 متعلق باشد یک بار به حساب می‌آید ولی هر عضوی که به هر دو مجموعهٔ A_1 و A_2 تعلق داشته باشد دو بار شمرده می‌شود. پس با کم کردن $|A_1 \cap A_2|$ از حاصل جمع $|A_1| + |A_2|$ هر عضو از $A_1 \cup A_2$ دقیقاً یک بار به حساب می‌آید.



شکل ۳- نمودار ون برای دو مجموعه

رابطهٔ (۱) وجه تسمیهٔ «شمول و عدم شمول» را نیز توجیه می‌کند. زیرا در شمارش اعضای مجموعهٔ $A_1 \cup A_2$ ، اول همهٔ اعضای A_1 و A_2 را به حساب می‌آوریم (شمول)، ولی چون در این صورت اعضای $A_1 \cap A_2$ دوبار به حساب می‌آیند آنها را از شمارش خود خارج می‌کنیم (عدم شمول).

مثال ۸: چند عضو از مجموعهٔ $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 6300\}$ نه بر ۵ تقسیم پذیرند و نه بر ۳؟

فرض کنید A_1 زیرمجموعهٔ A متشکل از مضارب ۳ و A_2 زیرمجموعهٔ A متشکل از مضارب ۵ باشند. می‌خواهیم $|A_1 \cup A_2|$ را پیدا کنیم (\bar{B} متمم مجموعهٔ B را نمایش می‌دهد). داریم:

$$|A_1| = \frac{6300}{3} = 2100$$

$$|A_2| = \frac{6300}{5} = 1260$$

۱- متمم مجموعهٔ B را گاهی با B' یا B^c هم نمایش می‌دهند. به جای متمم گاهی اصطلاح مکمل را به کار می‌برند.

و چون $A_1 \cap A_2$ مجموعه اعدادی هستند که هم بر ۳ و هم بر ۵ تقسیم پذیرند پس :

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{6300}{(3)(5)} = 420$$

در نتیجه با توجه به رابطه (۱) داریم :

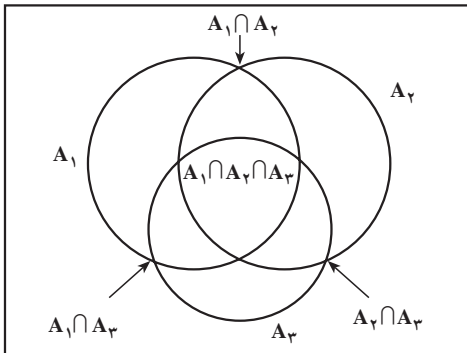
$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= 2100 + 1260 - 420 \\ &= 2940 \end{aligned}$$

$$\cdot |A_1 \cup A_2| = 6300 - 2940 = 3360$$

حال برای $n = 3$ اصل شمول و عدم شمول را مطالعه می کنیم. ▲

قضیه ۳ : فرض کنید A_1 و A_2 و A_3 سه زیرمجموعه متناهی از یک مجموعه A باشند. داریم

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۴- نمودار ون برای سه مجموعه

اثبات : نشان می دهیم که هر عضو x از A به تعداد مساوی در دو طرف رابطه (۲) به حساب می آید. به شکل ۴ توجه کنید.

دو حالت داریم :

حالت ۱ : اگر x متعلق به هیچ کدام از مجموعه های A_1 و A_2 و A_3 نباشد، آن گاه x در دو طرف رابطه (۲)، صفر بار به حساب می آید.

حالت ۲ : فرض کنید x به s مجموعه از مجموعه های A_1 و A_2 و A_3 تعلق داشته باشد $(1 \leq s \leq 3)$. آن گاه x یک بار در طرف چپ به حساب می آید، و در طرف راست نیز

اگر $s=1$ ، یک بار به حساب می آید،

اگر $s=2$ ، باز هم $2-1=1$ بار به حساب می آید و

اگر $s=3$ ، در این صورت هم $3-3+1=1$ بار به حساب می آید.

اثبات بالا را می‌توان به n مجموعه تعمیم داد و قضیه‌ای بیان کرد که به اصل شمول و عدم شمول معروف است. در مثال‌های زیر خواهیم دید که چگونه بعضی از مسائل کلاسیک شمارش را می‌توان با اصل شمول و عدم شمول حل کرد.

مثال ۹: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی B به یک مجموعه ۳ عضوی A را پیدا کنید. باید توجه کرد که منظور از تابع $f: B \rightarrow A$ تابعی است که روی همه اعضای B تعریف شده است و تابع $f: B \rightarrow A$ را پوشا می‌نامیم هرگاه $R_f = A$.

فرض کنید $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ و $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. مجموعه تمام توابع $f: B \rightarrow A$ را با S نمایش می‌دهیم و ابتدا $|S|$ را محاسبه می‌کنیم. به ازای هر $b_j \in B$ برای $f(b_j)$ سه امکان وجود دارد، زیرا $f(b_j)$ امکان دارد a_1 ، a_2 یا a_3 باشد. این امکان‌ها به ازای هر دو عضو متمایز B به هم وابسته نیستند یعنی مثلاً به ازای هر انتخاب برای هر سه عضو B ، عضو چهارم می‌تواند دارای سه انتخاب باشد. پس تعداد کل این توابع $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ است. حال فرض کنید A_i مجموعه توابعی باشد که هیچ عضوی از B را به a_i نسبت نمی‌دهند.

$$A_i = \{f \in S : a_i \notin f(B)\} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{یعنی:}$$

منظور شمارش تعداد اعضای مجموعه $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ است. از فرمول (۲) در قضیه ۳ استفاده می‌کنیم. مشابه استدلال فوق داریم

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$$

و

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

و

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 2^4 + 2^4 + 2^4 - (1+1+1) + 0 = 45$$

پس:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 81 - 45 = 36$$

و از آنجا

که تعداد توابع پوشای از B به A است.

برای حل معادلات با جواب‌های صحیح و با محدودیت‌های مختلف، می‌توان از اصل شمول و عدم شمول استفاده کرد. برای توضیح این روش، اول به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰: فرض کنید k نوع مختلف گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. می‌توان ثابت کرد که تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن تکرار نیز مجاز است برابر است با تعداد

جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ و مساوی است با $\binom{n+k-1}{n}$.

اگر x_i را تعداد گل‌های انتخاب‌شده از نوع i ام بگیریم به سادگی دیده می‌شود که یک تناظر یک به یک بین انتخاب‌ها و جواب‌های معادله فوق موجود است. اثبات برابری تعداد انتخاب‌ها با مقدار داده شده را به عنوان تمرین به عهده دانش‌آموزان گذاشته‌ایم. باید دقت کرد که در این مثال حالت‌هایی را هم در نظر گرفته‌ایم که یک یا چند نوع گل را اصلاً انتخاب نکرده باشیم. ▲

مثال ۱۱: تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ را به طوری که به ازای $i = 1, 2, 3$ $0 \leq x_i \leq 2$ باشد پیدا کنید.

مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{ \text{جواب‌های معادله فوق به شرطی که } x_i > 2 \text{ باشد} \}, i = 1, 2, 3$$

باید تعداد مجموعه $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ را پیدا کنیم. بنابر فرمول (۲) از قضیه ۳ داریم:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \\ &\quad |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

که در آن S مجموعه تمام جواب‌های صحیح و نامنفی معادله فوق است. پس بنا به مثال ۱۰ داریم.

$$|S| = \binom{3+4-1}{4} = 15$$

از طرف دیگر مثلاً تعداد A_1 مساوی است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. زیرا کافی است که در جواب معادله اخیر به x_1 عدد ۳ اضافه کنیم تا یک جواب معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ با شرط $x_1 > 2$ به دست آید و برعکس. اما به سادگی دیده می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ مساوی است با ۳. پس $|A_1| = 3$ و به همین ترتیب $|A_2| = |A_3| = 3$.

از طرف دیگر داریم

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \phi$$

همین طور $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$. پس $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 - 3 - 3 - 3 = 6$. در حقیقت جواب فوق چنین اند:

$$(\circ, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, \circ, 2), (2, 1, 1), (2, 2, \circ)$$

در قسمت نظریه اعداد با تابع حسابی اویلر ϕ به عنوان «مجله ریاضی» آشنا شده ایم. منظور از $\phi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد صحیح و مثبت m که کوچک تر از n یا مساوی با آن بوده و m و n نسبت به هم اول باشند. قضیه زیر حالت خاصی از قضیه ای کلی درباره این تابع است.

قضیه ۴: فرض کنید عدد صحیح و مثبت n برابر با حاصل ضرب سه عدد اول و متمایز به صورت زیر باشند:

$$n = p_1 p_2 p_3$$

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \quad \text{در این صورت}$$

اثبات: مجموعه های A_i را به ترتیب زیر تعریف می کنیم:

$$A_i = \{m: 1 \leq m \leq n, p_i | m\}, \quad i = 1, 2, 3$$

حال اصل شمول و عدم شمول را برای مجموعه های A_i می نویسیم. داریم:

$$\phi(n) = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \quad \text{و برای } i = 1, 2, 3$$

$$A_i = \left\{ p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, \left(\frac{n}{p_i}\right)p_i \right\}$$

پس $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. به همین ترتیب به ازای $i \neq j$ ، $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$ و

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{n}{p_1 p_2 p_3} \quad \text{اکنون از رابطه (۲) در قضیه ۳ نتیجه می گیریم که:}$$

$$n - \phi(n) = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_3} - \frac{n}{p_1 p_2} - \frac{n}{p_1 p_3} - \frac{n}{p_2 p_3} + \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$$

$$\phi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_3} + \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \frac{n}{p_2 p_3} - \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$$

$$= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right)$$

مثال ۱۲: ثابت کنید $\phi(42) = 12$.

چون $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ، حکم از قضیه ۴ به دست می‌آید:

$$\phi(42) = 42 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 12$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً هم بررسی کرد. زیرا تمام اعداد صحیح و مثبت نایبتر از ۴۲ که نسبت به آن اول هستند عبارت‌اند از:

۱، ۵، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۵، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱



۴-۷- تمرین‌ها

۱- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$. برای هر یک از حالت‌های زیرگرافی رسم کنید که رابطه متناظر

با آن

(الف) بازتابی و متقارن باشد ولی ترایابی نباشد،

(ب) بازتابی و ترایابی باشد ولی متقارن نباشد،

(پ) متقارن و ترایابی باشد ولی بازتابی نباشد.

جواب‌های خود را با ماتریس‌های متناظر امتحان کنید.

۲- فرض کنید $A = \{w, x, y, z\}$. تعداد رابطه‌های روی A با ویژگی‌های داده‌شده در هر یک

از حالت‌های زیر را بیابید:

(الف) بازتابی؛

(ب) متقارن؛

(پ) بازتابی و متقارن؛

(ت) بازتابی و شامل (x, y) ؛

(ث) پاد متقارن؛

(ج) پاد متقارن و شامل (x, y) ؛

(چ) متقارن و پاد متقارن؛

(ح) پاد متقارن، متقارن و بازتابی؛

(خ) هم‌ارزی (راهنمایی: تعداد افرازهای مختلف را پیدا کنید).

۳- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$. دو رابطه R و S روی A به صورت زیر داده شده‌اند.

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 4)\},$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$$

رابطه‌های RoR و SoS را پیدا کنید.

۴- بندهای (الف) و (ب) از قضیه ۱ را اثبات کنید.

۵- بندهای (الف) و (ب) از قضیه ۲ را اثبات کنید.

۶- فرض کنید R یک رابطه بازتابی روی مجموعه متناهی A باشد. نشان دهید که رابطه RoR

نیز بازتابی است.

۷- ماتریس صفر و یک $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. تعداد ماتریس‌های صفر و

یک F با شرط $E \ll F$ را بیابید.

۸- با استفاده از قضیه‌هایی که در این فصل خوانده‌اید نشان دهید که آیا رابطه زیر روی مجموعه

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ یک رابطه هم‌ارزی است یا خیر.

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 2), (2, 1), (3, 1)\}$$

۹- یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز مثلاً $1, 2, 3, \dots, n^2$ را یک مربع وقتی (یا مربع جادویی)

می‌نامیم، هرگاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، حاصل جمع درایه‌های هر ستون، حاصل جمع درایه‌های

قطر اصلی و حاصل جمع درایه‌های قطر فرعی با هم مساوی باشند. به عنوان مثال یک مربع وقتی 3×3

در زیر نشان داده شده است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

ثابت کنید که در هر مربع وقتی 3×3 که از اعضای $1, 2, 3, \dots, 9$ تشکیل شده است عضوی

که در مرکز مربع قرار می‌گیرد همیشه عدد ۵ است.

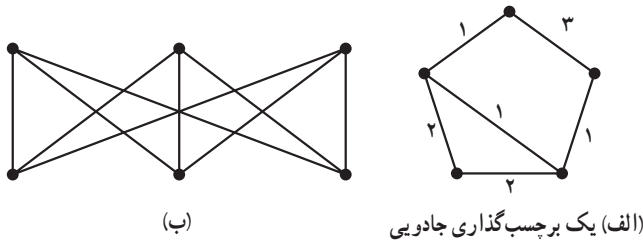
۱۰- گراف G داده شده است. یک برچسب‌گذاری جادویی G عبارت است از متناظر کردن

اعدادی، معمولاً صحیح و مثبت، به یال‌های G به طوری که حاصل جمع اعداد متناظر با یال‌های ماژ

بر هر رأس عددی ثابت باشد. در گرافی که در شکل ۵ (الف) داده شده است اعدادی که روی یال‌ها نوشته شده‌اند یک برچسب‌گذاری جادویی را نشان می‌دهد، زیرا حاصل جمع اعداد متناظر به یال‌های ماژ بر هر رأس مساوی با ۴ است.

با استفاده از مربع وقتی 3×3 یک برچسب‌گذاری جادویی برای گراف شکل ۵ (ب) به دست آورید.

۱۱- ثابت کنید که تعداد انتخاب n گل از k نوع مختلف گل، که تکرار نیز مجاز باشد مساوی است با $\binom{n+k-1}{n}$.



شکل ۵

۱۲- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت هریک از معادلات زیر را پیدا کنید.

(الف) $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

(ب) $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $2 \leq x_1 \leq 3$, $4 \leq x_2 \leq 8$, $x_3 \geq 1$

(پ) $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, $1 \leq x_i \leq 7$, $i = 1, 2, 3$

۱۳- مطلوب است تعداد شماره‌شناسنامه‌های پنج‌رقمی که در آنها هریک از رقم‌های ۱، ۳

و ۷ حداقل یک بار ظاهر می‌شوند.

۱۴- در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به دست آمده است: ۶۰ نفر آنها مجله

A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجله B، ۵۰ نفر مجله C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B، ۲۰ نفر مجله‌های B و

C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجله A و B و C را می‌خوانند. مطلوب است

تعداد دانش‌آموزانی که:

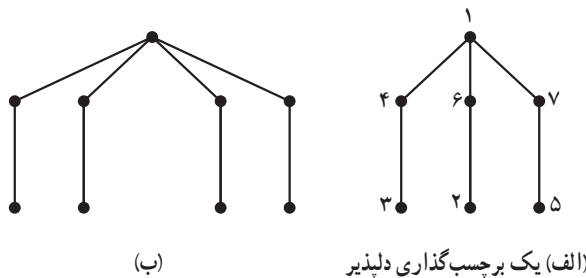
(الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؛

(ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند؛

(پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند.

۱۵- الف) اصل شمول و عدم شمول را در حالت چهار مجموعه بنویسید و آن را اثبات کنید.
 ب) در منطقه‌ای چهار روستا وجود دارد. قرار است راه‌هایی دوطرفه بین بعضی از روستاها ساخته شود به طوری که نهایتاً هیچ روستایی منفرد (یعنی بدون ارتباط با هیچ روستای دیگر) نماند. این کار به چند طریق امکان دارد؟

۱۶- برای درخت‌ها برچسب‌گذاری‌های مختلف تعریف می‌شود. یک برچسب‌گذاری دلبذیر برای یک درخت n رأسی عبارت است از نسبت دادن اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ به رئوس آن، به طوری که برچسب یال‌ها 1 تا $n-1$ عدد متمایز باشند و برچسب هر یال از قدرمطلق تفاضل برچسب رأس‌های دو انتهای آن به دست آید. مثلاً در شکل ۶ الف) یک برچسب‌گذاری دلبذیر را می‌بینیم.
 یک برچسب‌گذاری دلبذیر برای درخت شکل ۶ ب) پیدا کنید: حدس این است که «هر درخت یک برچسب‌گذاری دلبذیر دارد». ولی این حدس هنوز ثابت یا رد نشده است.



شکل ۶

مراجع

۱- ایوان نیون، ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم. ترجمه علی عمیدی و بتول جذبی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۸.

2 - R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, 2nd. ed., Addison- Wesley 1989.

مجله ریاضی

مربع وقتی یکی از ساختارهای ترکیباتی است که ریاضی دانان شوق درباره آن کارهای بسیاری انجام داده اند و روش های ساخت این مربع ها برای اندازه های مختلف منسوب به این دانشمندان است. اصولاً ساختارهای ترکیباتی یکی از مهم ترین مباحث ترکیبات است که دارای کاربردهای فراوان نیز هستند. از مهم ترین ساختارهای ترکیباتی مربع های لاتین و طرح های بلوکی است. یک مربع لاتین عبارت است از یک ماتریس $n \times n$ با درایه های $1, 2, 3, \dots, n$ به طوری که در هر سطر و در هر ستون درایه های تکراری نباشند.

مربع های لاتین با مربع های وقتی نیز ارتباط دارند. یکی از کاربردهای مربع های لاتین در مبحث رمزنگاری است. به ازای هر n داده شده می توان یک مربع لاتین از مرتبه n ساخت. از مربع هایی که در زیر به ازای $n = 4$ و $n = 5$ ساخته شده اند می توان به راحتی برای حالت کلی نیز ایده گرفت.

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

دقت کنید که در هر دو مربع فوق بعضی از درایه های واقع در دو گوشه چپ بالا و راست پایین را پررنگ نوشته ایم. در مربع اول ۴ تا و در مربع دوم ۶ تا از این درایه های پررنگ قرار دارند. جالب این است که اگر در هریک از این دو مربع فقط این درایه ها را به ما بدهند می توانیم بقیه درایه ها را به طور یکتا به دست آوریم.

تعداد درایه های پررنگ داده شده در حالت کلی $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ است. حال فرض کنید درایه های یک مربع لاتین اطلاعاتی است که می خواهید به یک شخص مورد اعتماد خود بدهید. یک مربع $n \times n$ از n^2 اطلاعات تشکیل می شود. الگوی فوق پیشنهاد می کند که فقط کافی است که حدود $\frac{1}{4}$ از اطلاعات را منتقل کنید. شخص مورد اعتماد می تواند بقیه را به طور یکتا پیدا کند.