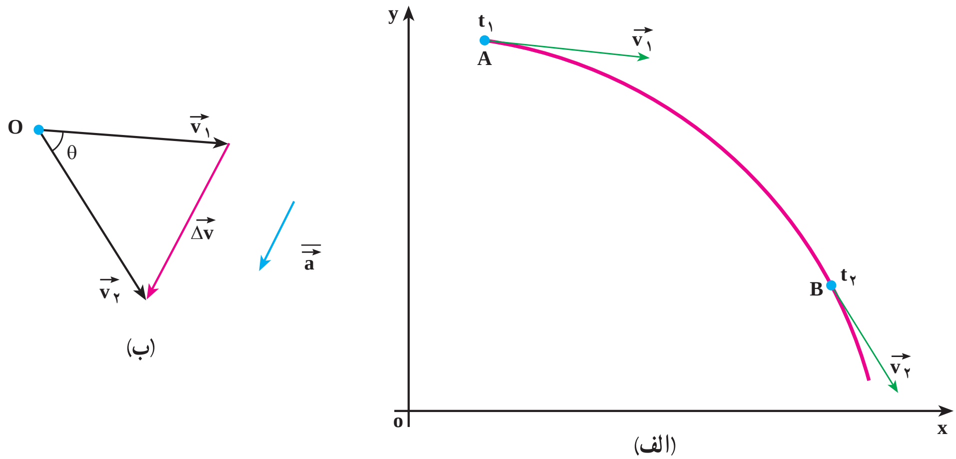


شکل ۱ــ۲۶ــ بردار شتاب متوسط با $\Delta \vec{v}$ هم‌جهت است.

شتاب لحظه‌ای در لحظهٔ $t_۱$ را نیز می‌توان به‌صورت حدّ شتاب متوسط، هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، تعریف کرد؛ یعنی :

$$\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حدّ}} \left(\vec{\bar{a}}\right) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حدّ}} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right) \qquad (۱ــ۳۰)$$

با توجه به مفهوم مشتق، رابطهٔ ۱ــ۳۰ به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۱ــ۳۱)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2(\vec{r})}{dt^2} \qquad (۱ــ۳۲)$$

به کمک رابطهٔ ۱ــ۲۹ می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{a} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\vec{j} \qquad (۱ــ۳۳)$$

که در آن، $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ و $\frac{dv_y}{dt} = a_y$ مؤلفه‌های شتاب لحظه‌ای‌اند.

درنتیجه، می‌توان نوشت :

$$\vec{a} = (a_x)\,\vec{i} + (a_y)\,\vec{j} \qquad (۱ــ۳۴)$$

رابطهٔ ۱ــ۲۸ نشان می‌دهد که $\vec{\bar{a}}$ و $\Delta\vec{v}$ هم‌جهت‌اند ولی همان‌طور که در شکل ۱ــ۲۶ــ ب نشان داده شده است، در حرکت روی مسیر خمیده، معمولاً بردار شتاب متوسط $\vec{\bar{a}}$ ، با بردارهای سرعت، ($\vec{v}_1$ یا $\vec{v}_2$) هم‌جهت نیست. درحالتی هم که Δt به سمت صفر میل می‌کند و بردار $\vec{v}_2$ به بردار $\vec{v}_1$ بسیار نزدیک می‌شود، شتاب لحظه‌ای با سرعت لحظه‌ای نیز معمولاً هم‌جهت نخواهد بود. ولی به کمک رابطهٔ ۱ــ۳۳ و با داشتن معادلهٔ سرعت، جهت بردار شتاب لحظه‌ای را، که از این پس آن را به اختصار **شتاب** خواهیم نامید، می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۱ــ۱۸

معادلهٔ حرکت دو بعدی جسمی در SI به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = ۲۰t^{۲} \\ y = -۵t^{۳} \end{cases}$$

بردار سرعت و بردار شتاب این جسم را در لحظهٔ $t=۱s$ به‌دست آورید. آیا این دو بردار هم‌جهت‌اند؟

پاسخ

برای تعیین بردار سرعت، ابتدا مؤلفه‌های v_x و v_y را در $t=۱s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۴۰t \xrightarrow{t=۱s} v_x = ۴۰\,m/s$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -۱۵t^{۲} \xrightarrow{t=۱s} v_y = -۱۵\,m/s$$

بنابراین، بردار سرعت لحظه‌ای در $t=۱s$ چنین خواهد بود:

$$\vec{v} = ۴۰\vec{i} - ۱۵\vec{j}$$

برای تعیین بردار شتاب نیز ابتدا مؤلفه‌های شتاب، یعنی a_x و a_y، را به دست می‌آوریم. مؤلفهٔ افقی شتاب، ثابت است:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = ۴۰\,m/s^{۲}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -۳۰t$$

a_y تابع زمان است و در $t=۱s$ برابر است با :

$$a_y = -۳۰ m/s^۲$$

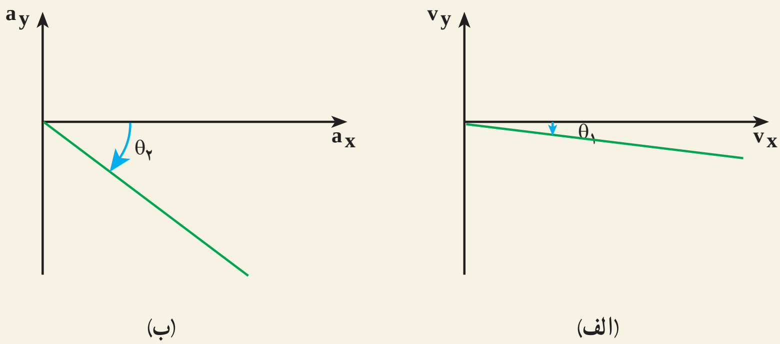
با توجه به مقدارهای a_x و a_y در لحظهٔ $t=۱s$، بردار شتاب در این لحظه برابر است با :

$$\vec{a} = ۴۰\vec{i} - ۳۰\vec{j}$$

زاویه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب در لحظهٔ $t=۱s$ با محور افقی می‌سازند، به ترتیب برابرند با :

$$\tan\theta_۱ = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-۱۵}{۴۰} \Rightarrow \theta_۱ = \tan^{-۱}\frac{-۳}{۸} \simeq -۷^\circ$$

$$\tan\theta_۲ = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{۳۰}{۴۰} \Rightarrow \theta_۲ = \tan^{-۱}\frac{-۳}{۴} \simeq -۳۷^\circ$$



شکل ۱ــ۲۷

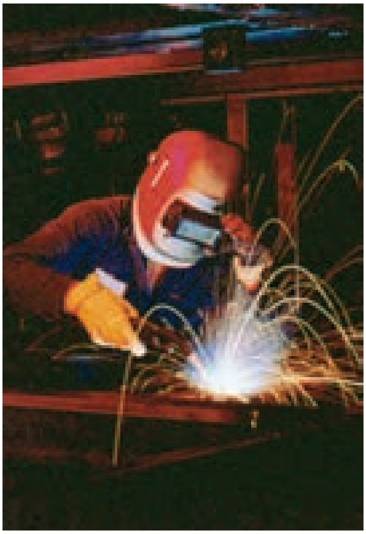
با مقایسهٔ زاویه‌های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ در شکل ۱ــ۲۷ می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای سرعت و شتاب در این لحظه هم‌جهت نیستند.

حرکت با شتاب ثابت در صفحه ــ حرکت پرتابی

وقتی حرکت در یک صفحه با شتاب ثابت باشد، بزرگی و جهت بردارِ شتاب ثابت می‌ماند؛ از این‌رو، مؤلفه‌های $\vec{a}$ در طول حرکت تغییری نمی‌کنند و مقدار ثابتی دارند. از سوی دیگر، طبق قانون

دوم نیوتون، شتاب هنگامی ثابت است که نیروی وارد بر جسم ثابت باشد. در این نوع حرکت برای سادگی، محورهای x و y را طوری انتخاب می‌کنیم که راستای شتاب حرکت بر راستای یکی از محورهای مختصات منطبق باشد؛ بنابراین، مؤلفهٔ شتاب در یک راستا صفر و در راستای دیگر، ثابت است؛ مثلاً اگر محور y با شتاب هم‌راستا باشد، داریم :

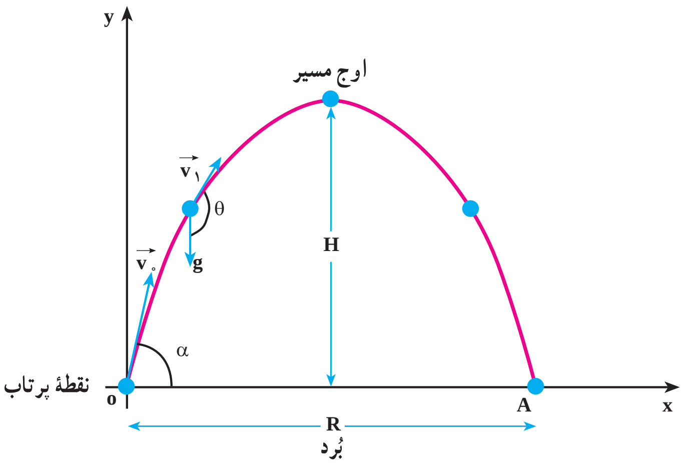
$a_x = ۰$ و $a_y =$ ثابت



شکل ۱ــ۲۸

ساده‌ترین نوع حرکتِ با شتاب ثابت در صفحه، حرکت پرتابی است. اگر جسم کوچکی را چنان پرتاب کنیم که زاویهٔ سرعت اولیه‌اش با امتداد قائم، مخالف صفر باشد این حرکت را پرتابی و جسم پرتاب شده را **پرتابه** می‌نامیم. اگر از مقاومت هوا صرف نظر کنیم، تنها نیروی وارد بر پرتابه، وزن آن $m\vec{g}$ و شتاب حاصل از این نیرو $\vec{g}$ است که در نزدیکی سطح زمین، بزرگی آن ثابت و جهت آن به‌طرف مرکز زمین است.

نتیجهٔ فعالیت ۱ــ۷ نشان می‌دهد که حرکت پرتابی در یک صفحهٔ قائم انجام می‌شود. برای بررسی این حرکت، محور ox را در راستای افق و محور oy را در راستای g درنظر می‌گیریم. درنتیجه، حرکت پرتابی را می‌توان به‌صورت ترکیب دو حرکت، یکی در راستای افق و دیگری در راستای قائم دانست. در این حرکت، نقطهٔ پرتاب جسم را مبدأ مختصات ($x_۰ = ۰$ و $y_۰ = ۰$) جهت مثبت محور y را ، به‌طرف بالا فرض می‌کنیم.



شکل ۱ــ۲۹

در شکل ۱ــ۲۹ مسیر حرکت یک پرتابه، روی صفحهٔ مختصات xoy، همراه با بردار شتاب $\vec{g}$ و نیز بردار سرعت اولیهٔ جسم $\vec{v}_\circ$ که با افق زاویهٔ α می‌سازد، نشان داده شده است. در این شکل، مؤلفه‌های بردار شتاب $\vec{g}$ با رابطه‌های زیر داده می‌شوند :

$$a_x = \circ \quad \text{و} \quad a_y = -g \qquad (۱ــ۳۵)$$

مؤلفه‌های سرعت اولیهٔ $\vec{v}_\circ$ نیز برابرند با :

$$v_{\circ x} = v_\circ \cos\alpha \quad \text{و} \quad v_{\circ y} = v_\circ \sin\alpha \qquad (۱ــ۳۶)$$

چون $a_x = \circ$ است ، حرکت در راستای محور x با سرعت ثابت $(v_\circ \cos\alpha)$ انجام می‌شود.

بنابراین، با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۷، معادله‌های حرکت و سرعت پرتابه در راستای محورx، به‌صورت زیر است :

$$x = (v_\circ \cos\alpha)\, t \qquad (۱ــ۳۷)$$

$$v_x = v_\circ \cos\alpha = \text{ثابت} \qquad (۱ــ۳۸)$$

حرکت در راستای قائم y، یک حرکت با شتاب ثابت $(-g)$ است؛ بنابراین، با استفاده از رابطه‌های ۱ــ۱۴ و ۱ــ۱۵ معادله‌های حرکت پرتابه در راستای محور y را نیز به‌صورت زیر خواهیم داشت :

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + (v_\circ \sin\alpha) t \qquad (۱ــ۳۹)$$

$$v_y = -gt + v_\circ \sin\alpha \qquad (۱ــ۴۰)$$

معادله‌های ۱ــ ۳۵ تا ۱ــ۴۰ مؤلفه‌های بردار شتاب و سرعت و مکان پرتابه را در هر لحظه روی محورهای x و y مشخص می‌کنند. می‌دانیم که اگر در معادله‌های حرکت، برای x و y در حرکت دو بعدی، زمان حذف شود، معادلهٔ مسیر حرکت به‌دست خواهد آمد؛ بدین ترتیب، معادلهٔ مسیر حرکت پرتابی روی صفحهٔ xoy نیز چنین است :

$$t = \frac{x}{v_\circ \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{۱}{۲} g \left(\frac{x}{v_\circ \cos\alpha}\right)^{۲} + v_\circ \sin\alpha \left(\frac{x}{v_\circ \cos\alpha}\right)$$

$$y = -\frac{g x^{۲}}{۲ v_\circ^{۲} \cos^{۲}\alpha} + x \tan\alpha \qquad (۱ــ۴۱)$$

رابطهٔ ۱ــ۴۱ نشان می‌دهد که مسیر حرکت پرتابی در شرایط خلأ، سهمی است (چرا؟). در حرکت پرتابی، فاصلهٔ افقی‌ای را که پرتابه طی می کند تا دوباره به ارتفاع اولیهٔ پرتاب برگردد، **بُرد پرتابه**

می‌نامند. بُرد پرتابه را با R نمایش می‌دهیم (شکل ۱ــ۲۹). مختصات نقطهٔ بازگشت به ارتفاع اولیه با توجه به شکل ۱ــ۲۰ به‌صورت $y = ۰$ و $x = R$ است. با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۴۱ داریم :

$$۰ = -\frac{-g(R)^{۲}}{۲v_{۰}^{۲}\cos^{۲}\alpha} + (R)\tan\alpha$$

$$R = \frac{۲v_{۰}^{۲} \times \sin\alpha \times \cos\alpha}{g}$$

$$R = \frac{v_{۰}^{۲}\sin ۲\alpha}{g} \qquad (۱ــ۴۲)$$

تمرین ۱ــ۵

زاویهٔ پرتاب چقدر باشد تا بُرد پرتابه به مقدار بیشینهٔ خود برسد؟

در حرکت پرتابی، بالاترین نقطه‌ای که پرتابه به آن می‌رسد، **نقطهٔ اوج** نام دارد. در شکل ۱ــ۲۹ ارتفاع نقطهٔ اوج با H نشان داده شده است. سرعت در راستای محور y در نقطهٔ اوج صفر است (چرا؟)؛ درنتیجه، با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۴۰ داریم :

$$۰ = -gt + v_{۰}\sin\alpha$$

$$t = \frac{v_{۰}\sin\alpha}{g}$$

t زمانِ رسیدن به نقطهٔ‌اوج است. با جای‌گذاری این زمان در معادلهٔ ۱ــ۳۹، ارتفاع نقطهٔ اوج به‌دست می‌آید :

$$H = -\frac{۱}{۲}g\left(\frac{v_{۰}\sin\alpha}{g}\right)^{۲} + (v_{۰}\sin\alpha)\left(\frac{v_{۰}\sin\alpha}{g}\right)$$

$$H = \frac{v_{۰}^{۲}\sin^{۲}\alpha}{۲g} \qquad (۱ــ۴۳)$$

فعالیت ۱ـ۶

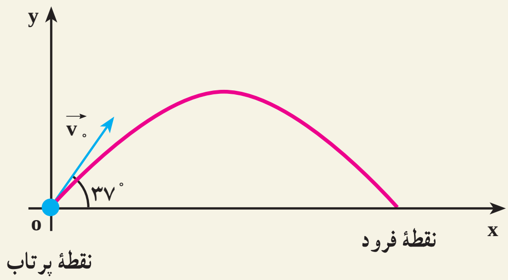
آزمایشی پیشنهاد کنید که به کمک آن بتوان سرعت آب را در لحظهٔ خارج شدن از شیلنگ اندازه گرفت.

مثال ۱ـ۱۹

یک بازیکن فوتبال، توپی را تحت زاویهٔ ۳۷° نسبت به افق، با سرعت اولیهٔ ۱۰m/s شوت می‌کند. با فرض اینکه توپ در صفحهٔ xoy حرکت کند و مقاومت هوا ناچیز باشد :

الف) زمان رسیدن توپ به نقطهٔ اوج را به دست آورید.

ب) پس از چه زمانی توپ به زمین برمی‌گردد؟ ($\sin ۳۷ = ۰/۶$)



شکل ۱ـ۳۰

پاسخ

الف) در نقطهٔ اوج مسیر داریم :

$$v_y = -gt + v_\circ \sin\alpha$$

$$۰ = -۹/۸t + ۱۰ \times ۰/۶ \quad \Rightarrow \quad t = \frac{۶}{۹/۸} \simeq ۰/۶s$$

ب) در بازگشت به زمین $y = ۰$ است.

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + (v_\circ \sin\alpha)t$$

$$۰=-۴/۹t^۲+(۱۰\times۰/۶)t$$

$$t(-۴/۹t+۶)=۰\Rightarrow t=۰\ ,\ t=۱/۲s$$

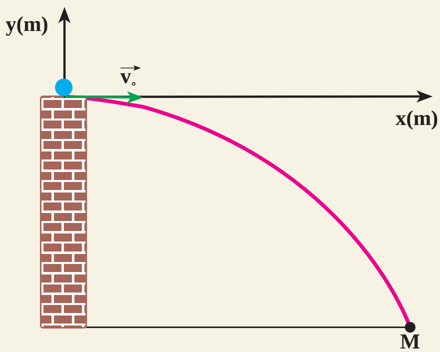
که در آن $t=۰$ لحظهٔ پرتاب توپ و $t=۱/۲s$ لحظهٔ برخورد توپ به زمین (زمان کلّ حرکت) است.

تمرین ۱ــ۶

ارتفاع نقطهٔ اوج و نیز بُرد توپ را در مثال ۱ــ۱۹ محاسبه کنید.

مثال ۱ــ۲۰

از بالای برجی به ارتفاع ۴۹ متر، توپی با سرعت افقی ۲۲m/s پرتاب می شود. الف)چه مدت طول می کشد تا توپ به زمین برسد؟ ب) فاصلهٔ نقطهٔ برخورد توپ با زمین تا پای برج چندمتر است؟ پ) سرعت توپ هنگام برخورد به زمین چه‌قدر است؟



شکل ۱ــ۳۱

پاسخ

الف) نقطهٔ پرتاب را مبدأ مختصات می گیریم. نقطهٔ M محل فرود توپ بر روی زمین است که برای آن $y_m=-۴۹m$. با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۳۹ داریم :

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+(v_{\circ}\sin\alpha)t$$

$$-۴۹=-۴/۹t^{۲}+\circ$$

$$t=\sqrt{۱\circ}\simeq ۳/۲s$$

ب) برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ فرود تا پای برج از معادلهٔ ۱ــ۳۷ استفاده می کنیم :

$$x=(v_{\circ}\cos\alpha)t$$

$$x=(۲۲\times۱)\times۳/۲=۷\circ/۴m$$

پ) مؤلفه‌های سرعت را در لحظهٔ برخورد با زمین از رابطه‌های ۱ــ۳۸ و ۱ــ۴۰ به دست می‌آوریم :

$$v_x=v_{\circ}\cos\alpha=۲۲\times۱=۲۲m/s$$

و

$$v_y=-gt+v_{\circ}\sin\alpha=-۹/۸\times۳/۲+\circ=-۳۱/۳۶m/s$$

$$v=\sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}}=\sqrt{۲۲^{۲}+(۳۱/۳۶)^{۲}}\simeq\sqrt{۴۸۴+۹۸۳/۴}$$

$$v\simeq ۳۸\ m/s$$

تمرین‌های فصل اوّل

۱ــ معادلهٔ حرکت جسمی در SI به‌صورت $x=t^{۳}-۳t^{۲}$ است. مطلوب است :

الف) بزرگی سرعت متوسط جسم در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه.

ب) بزرگی سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۴s$.

پ) بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۲ تا ۳ ثانیه.

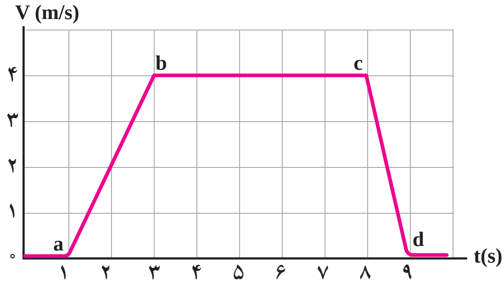
ت) بزرگی شتاب متحرک در لحظهٔ $t=۴s$.

۲ــ خودرویی در پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب $۲m/s^{۲}$ شروع به حرکت می کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت $۳۶km/h$ از کنار آن می گذرد.

الف) نمودارهای مکان ــ زمان و سرعت ــ زمان را برای اتومبیل و کامیون رسم کنید.

ب) پس از چه مدتی، اتومبیل به کامیون می‌رسد؟

۳ــ نمودار سرعت ــ زمان آسانسوری مطابق شکل ۱ــ۳۲ است. نمودار شتاب ــ زمان آن چگونه می‌شود و در مورد کندشونده یا تندشونده بودن حرکت اظهارنظر کنید.

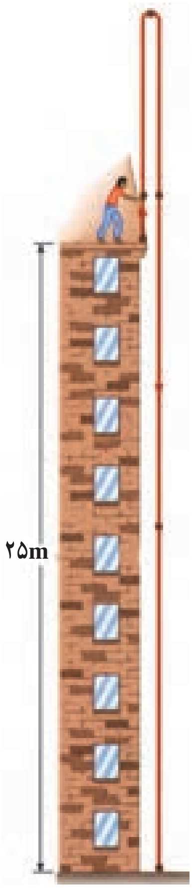


شکل ۱ــ۳۲

۴ــ در شکل ۱ــ۳۳ توپی در راستای قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود و پس از ۴ ثانیه به نقطهٔ پرتاب برمی‌گردد. توپ :

الف) با چه سرعتی پرتاب شده است؟ ب) تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

پ) با چه سرعتی به زمین می‌رسد؟ ت) بعد از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟ $(g=10\,m/s^2)$



شکل ۱ــ۳۳

۵ــ بردارهای مکان ذرهٔ متحرکی در لحظه‌های $t_1=5\,s$ و $t_2=25\,s$ به‌ترتیب $\vec{r}_1=2\vec{i}+14\vec{j}$ و $\vec{r}_2=8\vec{i}+6\vec{j}$ است. بزرگی سرعت متوسط این ذره را بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 به‌دست آورید. با رسم یک نمودار جهت $\vec{\bar{v}}$ را نشان دهید.

۶ــ معادلهٔ حرکت جسمی با دو رابطهٔ زیر، در SI داده شده است :

$$y=2t^2+1\ ,\ x=6t$$

الف) معادلهٔ سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t=2s$ محاسبه کنید.

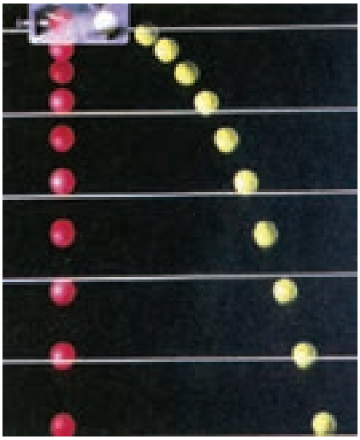
ب) معادلهٔ مسیر حرکت را به‌دست آورید.

پ) بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه‌های $t=1$ و $t=2$ ثانیه برحسب بردارهای یکّهٔ $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

۷ــ الف) سرعت یک پرتابه را در نقطهٔ اوج آن، برحسب v_0 و α به‌دست آورید.

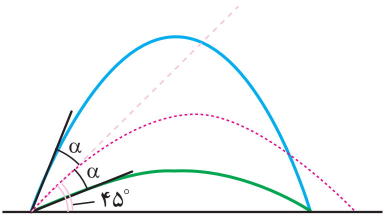
ب) اگر نقطهٔ فرود و نقطهٔ پرتاب در یک صفحهٔ افقی باشند، بردار سرعت پرتابه را هنگام فرود برحسب α و v_0 به‌دست آورید.

۸ــ در شکل ۱ــ۳۴، گلولهٔ زرد رنگ در امتداد افق پرتاب شده است. اگر گلولهٔ قرمز رنگ نیز هم‌زمان با گلولهٔ زرد رنگ رها شده باشد، نشان دهید که ارتفاع این دو، در حین سقوط در تمام لحظه‌ها، یکسان خواهد بود.



شکل ۱ــ۳۴

۹ــ گالیله در یکی از کتاب‌های خود نوشته است:
«برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از زاویهٔ ۴۵° بیشتر یا کمترند، بُردها مساوی‌اند...» (شکل ۱ــ ۳۵).
درستی این گفته را اثبات کنید.



شکل ۱ــ۳۵

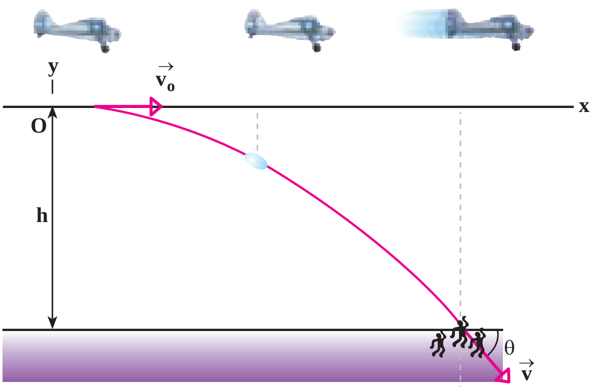
۱۰ــ از روی پلی به ارتفاع ۲۰ متر، بالای سطح آب یک رودخانه، جسمی را در راستای افقی با سرعت ۳۰m/s پرتاب می‌کنیم.

الف) چه زمانی طول می‌کشد تا جسم به آب برخورد کند؟

ب) فاصلهٔ افقی نقطهٔ برخورد به آب تا نقطهٔ پرتاب چه مقدار است؟

پ) بزرگی سرعت جسم هنگام برخورد با آب، چه مقدار است؟

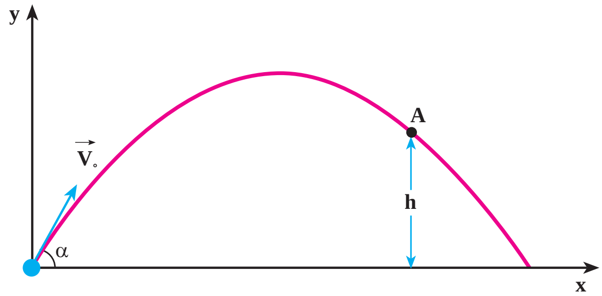
۱۱ــ هواپیمایی که با سرعت ۳۶۰km/h در ارتفاع ۲۴۵m موازی با سطح زمین پرواز می‌کند، می‌خواهد بسته‌ای را برای سیل‌زدگان به پایین بیندازد (شکل ۱ــ۳۶). خلبان در چه فاصلهٔ افقی، بسته را رها کند تا به سیل‌زدگان برسد؟



شکل ۱ــ۳۶

۱۲ــ مطابق شکل ۱ــ ۳۷ جسمی به جرم m را با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ و با زاویهٔ α نسبت به افق، پرتاب می‌کنیم. فرض کنید نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت جسم قابل چشم‌پوشی است.

الف) با استفاده از قانون پایستگی انرژی مکانیکی، بزرگی سرعت جسم را در نقطهٔ A در ارتفاع h، از نقطهٔ پرتاب به‌دست آورید.

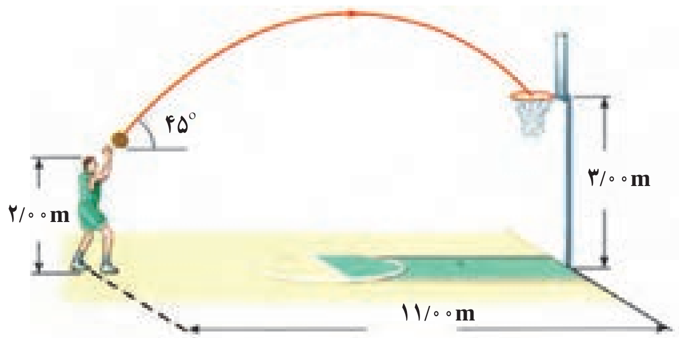


شکل ۱ــ۳۷

ب) بزرگی سرعت جسم را در نقطهٔ A با استفاده از معادله‌های حرکت پرتابی به‌دست آورید و آن را با نتیجهٔ قسمت «الف» مقایسه کنید.

۱۳ــ در شکل ۱ ــ ۳۸ سرعت اولیهٔ توپ را طوری حساب کنید که توپ داخل سبد بیفتد.

$g = ۱۰ m/s^2$



شکل ۱ــ۳۸