



نظریهٔ اعداد

مقدمه

نظریهٔ اعداد یکی از شاخه‌های زیبا و جالب ریاضی است که ریشه در تاریخ بشر دارد و به دلیل زیبایی و کارایی همواره مورد علاقه بوده است. پیشرفت‌های علوم دیگر مانند کامپیوتر و رمزنگاری که تکیه بر نظریهٔ مقدماتی اعداد دارند، به شادابی و زنده بودن این شاخه از دانش بشری کمک کرده‌اند.

در این قسمت مباحثی مقدماتی از نظریهٔ اعداد را ارائه می‌دهیم و انتظار داریم دانش‌آموزان عزیز با توجه به محتوای غنی این رشته و نیز تأثیر مثبت حل مسائل آن در جهت تقویت تفکر ریاضی، مسائلی جالب از نظریهٔ اعداد را انتخاب و حل کنند.

کلیات و تقسیم‌پذیری

فصل ۴

۴-۱- برخی از اصول نظریه اعداد

نظریه اعداد شاخه‌ای از ریاضیات است که بیشتر به خواص اعداد طبیعی

$۱, ۲, ۳, \dots$

می‌پردازد. در مورد چگونگی به وجود آمدن اعداد طبیعی اطلاع درستی در دست نیست، اما شواهدی وجود دارند که نشان می‌دهند بشر اولیه اعداد طبیعی را برای شمارش مورد استفاده قرار داده است و به تدریج روش‌هایی را برای نمایش اعداد و انجام محاسبات اختراع کرده است.

شمارش گوسفندان قبل از رفتن به چرا و پس از بازگشت آنها با استفاده از مفهوم تناظر یک به یک بین مجموعه گوسفندها و زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی، یا به صورت یک انگشت، یا یک علامت روی سنگ و یا کنار گذاشتن یک تکه چوب به جای هر گوسفند، حتی هنوز هم گاهی به طور ابتدایی معمول است. این عمل که برای تهیه آمار و حتی رأی‌گیری‌های ساده هم به کار می‌رود از شواهد اولیه شناخت اعداد طبیعی است.

دنباله اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شود و هر عضو دیگر آن با افزودن یک واحد به عدد قبلی به دست می‌آید.

در سال‌های گذشته، با مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

و عمل‌های جمع و ضرب آنها و با ویژگی‌های این دو عمل اصلی و نیز با عمل تفریق روی مجموعه اعداد صحیح

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

آشنا شده‌ایم.

ما در اینجا ساختار اعداد صحیح را به روش اصل موضوعی مطرح نکرده بلکه فقط اصل موضوع «خوش‌ترتیبی» و یا معادل آن اصل موضوع «استقرای ریاضی» را به عنوان زیربنای قضیه‌های نظریه اعداد بیان می‌کنیم.

اصل خوش‌ترتیبی

هر زیرمجموعه ناتهی از اعداد طبیعی دارای کوچک‌ترین عضو است، یعنی اگر $S \subset \mathbb{N}$ و $S \neq \emptyset$ ، آن‌گاه عضوی از S مانند s_0 وجود دارد که به ازای هر s متعلق به S ،

$$s_0 \leq s$$

(کوچک‌ترین عضو مجموعه A را عضو ابتدای مجموعه A هم می‌نامند).^۱

اصل استقرای ریاضی

هر زیرمجموعه S از \mathbb{N} که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعه \mathbb{N} برابر است:

$$1 \in S \quad (\text{الف})$$

$$n \in S \Rightarrow n + 1 \in S \quad (\text{ب})$$

با پذیرفتن هریک از اصل‌های فوق می‌توان اصل دیگر را به عنوان یک قضیه اثبات کرد.

۲-۴- معادل‌های اصل استقرای ریاضی

معادل‌های دیگری برای اصل استقرای ریاضی وجود دارند که برخی را در اینجا مطرح می‌کنیم:

الف) فرض کنیم $P(n)$ عبارتی درباره عدد طبیعی n باشد. اگر $P(1)$ درست باشد و به ازای هر

عدد طبیعی n از درستی $P(n)$ ، درستی $P(n+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n

درست است.

۱- نماد $s_0 = \min S$ برای کوچک‌ترین عضو مجموعه S به کار می‌رود.

تعمیم این مطلب به صورت زیر است :

ب) فرض کنیم $P(n)$ عبارتی دربارهٔ عدد صحیح n باشد. اگر به ازای یک $m \in \mathbb{Z}$ ، $P(m)$ درست باشد و اگر به ازای هر $n \geq m$ ، از درستی $P(n)$ درستی $P(n+1)$ نتیجه شود، آن گاه $P(n)$ به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$ درست است.

می توان ثابت کرد که الف، ب و اصل استقرای ریاضی دو به دو معادل اند.

در کتاب جبر و احتمال، مثال های متعددی وجود دارند که ما را با نحوهٔ استفاده از اصل استقرای ریاضی آشنا می کنند. در اینجا ذکر یک نکته را ضروری می دانیم :

در اثبات به روش استقرا باید درستی هر دو شرط بررسی شوند. مثلاً، عبارت زیر را در نظر بگیرید :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 + 3$$

اگر چه گام دوم استقرای ریاضی (یعنی اثبات درستی به ازای $n+1$ ، با فرض درست بودن به ازای n) برقرار است ولی هیچ عدد طبیعی n در این عبارت صدق نمی کند.

همان طور که گفتیم می توان ثابت کرد که اصل خوش ترتیبی و اصل استقرای ریاضی معادل اند. یعنی می توان به دلخواه یکی را اصل گرفت و دیگری را به عنوان قضیه ثابت کرد؛ مثلاً داریم :

قضیهٔ ۱ : اصل استقرای ریاضی از اصل خوش ترتیبی نتیجه می شود.

اثبات : فرض کنیم $P \subset \mathbb{N}$ ، $1 \in P$ و اگر $n \in P$ آن گاه $n+1 \in P$. می خواهیم ثابت کنیم $P = \mathbb{N}$.

اگر چنین نباشد پس $T = \mathbb{N} - P \neq \emptyset$. لذا T کوچک ترین عضوی دارد که آن را t_0 می نامیم. $t_0 \neq 1$ (چرا؟)، پس $t_0 - 1 \in \mathbb{N}$ و $t_0 - 1 < t_0$ ، لذا $t_0 - 1 \notin T$ ، یعنی $t_0 - 1 \in P$ پس $t_0 - 1 + 1 = t_0 \in P$ که با $t_0 \in T$ در تناقض است. در نتیجه $P = \mathbb{N}$. ■

اصل استقرای قوی ریاضی

هر زیرمجموعهٔ S از \mathbb{N} که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ \mathbb{N} برابر است :

$$1 \in S \text{ (الف)}$$

ب) اگر اعداد طبیعی کوچک تر از n در S باشند، آن گاه $n \in S$.

اصل استقرای قوی ریاضی با اصل استقرای ریاضی و در نتیجه با اصل خوش ترتیبی معادل است. برای نشان دادن نحوهٔ استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی، به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱ : چند جملهٔ اول دنبالهٔ موسوم به دنبالهٔ اعداد لوکا عبارت اند از :

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$$

اگر جمله n ام را با L_n نمایش دهیم این دنباله از به اصطلاح «رابطه بازگشتی» زیر

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad n \geq 3$$

و شرایط اولیه

$$L_2 = 3, L_1 = 1$$

به دست می آید. با استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی ثابت می کنیم که به ازای هر عدد طبیعی n ,

$$L_n < \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

اگر $S = \left\{ n \in \mathbb{N} : L_n < \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}$ ، آن گاه $1 \in S$ و $2 \in S$ (چرا؟) حال اگر $n \geq 3$ و به ازای هر k وقتی که $k \in S$ ، $k < n$ ، آن گاه $L_{n-1} < \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ و $L_{n-2} < \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$ پس

$$L_n < \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right) < \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

یعنی $n \in S$. پس $S = \mathbb{N}$. لذا برای هر عدد طبیعی n داریم، $L_n < \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ▲

۳-۴- تقسیم پذیری

یکی از چهار عمل اصلی روی اعداد صحیح، تقسیم است. می دانیم حاصل تقسیم دو عدد صحیح الزاماً یک عدد صحیح نیست. مثلاً، حاصل تقسیم $12 - 5$ بر 5 ، عدد صحیح نیست. در مواردی حاصل تقسیم عددی بر عددی دیگر یک عدد صحیح می شود مثل 12 و 6 . در این حالت می گوئیم عدد 6 عدد 12 را می شمارد، یا عدد 12 بر 6 تقسیم پذیر است. در واقع 12 یک مضرب 6 است: $12 = 6 \times 2$. در حالت عمومی تعریف زیر را ارائه می دهیم:

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح b ، $b \neq 0$ ، تقسیم پذیر یا (بخش پذیر) گوئیم هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه ای که $a = bq$. در این صورت می نویسیم $b|a$ و چنین می خوانیم: a بر b تقسیم پذیر است^۱ و یا b یک شمارنده یا مقسوم علیه a است. هرگاه a بر b تقسیم پذیر نباشد می نویسیم $b \nmid a$. در حالت $b = 0$ ، چون به ازای هر $q \in \mathbb{Z}$ ، $0 = 0 \times q$ ، می توان تعریف تقسیم پذیری را گسترش داد و عبارت « 0 بر 0 تقسیم پذیر است» را نیز پذیرفت.

۱- هرگاه a بر b تقسیم پذیر باشد می گوئیم b عدد a را می شمارد (عاد می کند)، یا a مضرب b است، یا b یک سازه (عامل) a است.

در مثال فوق $b = 6$ ، $a = 12$ ، $q = 2$ و $q = 2 \times 6 = 12$ و می‌نویسیم $6|12$. از تعریف بالا نتایج زیر به دست می‌آیند:

الف) صفر بر هر عدد b ، تقسیم پذیر است.

ب) اعداد 1 و -1 ، هر عدد صحیح را می‌شمارند. (چرا؟)

با توجه به مفهوم رابطه که در سال‌های قبل با آن آشنا شده‌ایم، می‌توان تقسیم پذیری را به عنوان یک رابطه با ویژگی‌های زیر بر مجموعه اعداد صحیح در نظر گرفت.

۱- این رابطه بازتابی است، زیرا برای هر عدد صحیح a داریم $a = a \times 1$ ، پس $a|a$.

۲- این رابطه ترابلی است، یعنی اگر $a|b$ و $b|c$ ، آن‌گاه $a|c$. برای اثبات می‌گوییم: یک عدد

صحیح q وجود دارد که $b = aq$ و یک عدد صحیح q' وجود دارد که $c = bq'$. در نتیجه

$$c = (aq)q' = a(qq')$$

یعنی $a|c$.

۳- این رابطه متقارن نیست، چون مثلاً $6|2$ ولی $2 \nmid 6$.

۴- این رابطه پاد متقارن نیست، چون مثلاً $2|2$ و $2|-2$ ولی $-2 \nmid 2$.

۴-۴ چند ویژگی تقسیم پذیری

با قضیه‌های زیر ویژگی‌های عمده تقسیم پذیری را ارائه می‌دهیم:

قضیه ۲: به ازای اعداد صحیح a و b ، اگر $a|b$ ، آن‌گاه

الف) $a|b$ ب) $a|-b$ پ) $-a|-b$

ت) به ازای هر عدد صحیح m ، $a|mb$ ث) اگر $b \neq 0$ ، آن‌گاه $|a| \leq |b|$.

اثبات: اگر $a|b$ بنا به تعریف $b = aq$. در نتیجه

و نیز

$$-b = a(-q) = (-a)q$$

پس الف، ب و پ برقرارند. علاوه بر آن برای $m \in \mathbb{Z}$

$$mb = m(aq) = a(mq)$$

پس $a|mb$.

برای اثبات قسمت آخر چون $b = aq$ پس $|b| = |a||q|$ ولی $b \neq 0$ در نتیجه $q \neq 0$ ، پس $|q| \geq 1$

یعنی $|a| \leq |b|$.

قضیه ۳: به ازای اعداد صحیح a ، b و c

(الف) اگر $a \mid b$ ، آن گاه $a \mid \pm b$ (تنها مقسوم علیه‌های عدد a ، اعداد a و $-a$ هستند).

(ب) اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ ، آن گاه $a \mid \pm b$.

(پ) اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ ، آن گاه به ازای اعداد صحیح و دلخواه m و n ، داریم $a \mid mb + nc$.

اثبات: (الف) اگر $a \mid b$ ، آن گاه $|a| \leq b$ یعنی $|a| = 0$ یا $|a| = 1$. اما اگر $|a| = 0$ ، آن گاه $a = 0$.

ولی $1 \mid \pm b$ پس $|a| = 1$. در نتیجه $a = \pm 1$.

(ب) اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ آن گاه عدد صحیح q وجود دارد که $b = aq$ و عدد صحیح q' وجود دارد

که $a = bq'$. پس:

$$b = aq = b(qq')$$

اگر $b = 0$ الزاماً $a = 0$ و در نتیجه $a = b = 0$. اگر $b \neq 0$ آن گاه $qq' = 1$ ، یعنی $q \mid 1$ و لذا $q' = \pm 1$.

پس $a = \pm b$

(پ) اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ آن گاه عدد صحیح q وجود دارد که $b = aq$ و عدد صحیح q' وجود دارد که

$c = aq'$. به ازای اعداد صحیح دلخواه m و n داریم

$$mb + nc = maq + naq'$$

$$= (mq + nq')a$$

پس:

$$a \mid mb + nc$$



۴-۵ - الگوریتم تقسیم

اگر عدد صحیح a بر عدد طبیعی b تقسیم پذیر نباشد، در انجام تقسیم باقیمانده‌ای به جز صفر

پیدا می‌شود. کلیت مسئله اگرچه یک الگوریتم نیست ولی هنوز اسم سنتی خود «الگوریتم تقسیم» را

حفظ کرده و عبارت است از:

قضیه ۴: (الگوریتم تقسیم): اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، آن گاه اعداد

یکتای $q \in \mathbb{Z}$ و r وجود دارند که

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

(q خارج قسمت، r باقیمانده، a مقسوم و b مقسوم علیه نامیده می‌شوند.)

اثبات: نخست نشان می‌دهیم که $r, q \in \mathbb{Z}$ وجود دارند و پس از آن یکتا بودن آنها را ثابت می‌کنیم. چون a, b و q اعداد صحیح‌اند، $S = \{a - bq > 0 : q \in \mathbb{Z}\}$ یک زیرمجموعه از اعداد طبیعی است. نشان می‌دهیم که S تهی نیست و اصل خوش‌ترتیبی را به کار می‌بریم. به ازای عدد صحیح $a - bq > 0, q = -|a| - 1$ زیرا

$$a - bq = a + b|a| + b \geq a + |a| + 1 \geq 1 > 0$$

پس به ازای این مقدار $q, a - bq \in S$. لذا S دارای کوچک‌ترین عضو است. کوچک‌ترین عضو این مجموعه را r می‌نامیم. در این صورت عددی صحیح مانند q وجود دارد که $r = a - bq$. یعنی:

$$a = bq + r$$

اگر $r > b$ ، آن‌گاه

$$r - b = a - b(q + 1) \in S$$

ولی چون $b > 0$ پس $r - b < r$ که متناقض با کوچک‌ترین بودن r است، پس $r \leq b$. حال اگر $r = b$ مقدار $q_1 = q + 1$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$a = bq_1$$

که به جای $r, r_1 = 0$ را در نظر می‌گیریم. پس همواره $0 \leq r < b$. برای اثبات یکتا بودن، فرض کنیم چنین نباشد، یعنی

$$a = bq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b, \quad a = bq_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < b$$

پس:

$$0 = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$

یا

$$r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$$

یعنی $b |r_2 - r_1|$. اگر $r_2 - r_1 \neq 0$ ، آن‌گاه $b \leq |r_2 - r_1|$. از سوی دیگر

$$-b < r_2 - r_1 < b$$

یعنی:

$$|r_2 - r_1| < b$$

که این با $b \leq |r_2 - r_1|$ تناقض دارد. پس $r_2 - r_1 = 0$. یعنی $r_2 = r_1$ و چون $b \neq 0, q_1 - q_2 = 0$ یعنی

$$q_2 = q_1$$

توجه کنید که هرگاه $r = 0$ ، آن‌گاه $b|a$.

مثال ۲: برای $a = 1028$ و $b = 34$ ، داریم $q = \left\lfloor \frac{1028}{34} \right\rfloor = 30$.

(در اینجا منظور از نماد $\lfloor x \rfloor$ ، جزء صحیح عدد حقیقی x است.)

و $r = 1028 - 30 \times 34 = 8$

پس:

$1028 = 34 \times 30 + 8$

یکی از کاربردهای قضیه الگوریتم تقسیم، دسته بندی اعداد بر حسب باقیمانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی و ثابت b است.

مثال ۳: باقیمانده هر عدد صحیح بر ۲، عدد ۰ یا ۱ است. این مطلب اعداد صحیح را به دو دسته تقسیم می کند. تمام اعدادی را که باقیمانده آنها بر ۲، ۰ است، یعنی ۲ آنها را می شمارد زوج و

بقیه اعداد را فرد می نامند. یعنی می توان نوشت:

$\mathbb{Z} = [0]_2 \cup [1]_2$ که در آن

$[0]_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n = 2q, q \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} : 2|n\}$

مجموعه اعداد زوج، و

$[1]_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n = 2q + 1, q \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} : 2 \nmid n\}$

مجموعه اعداد فرد است.

به همین ترتیب هر عدد صحیح را می توان تنها به یکی از صورت های

$4q, 4q+1, 4q+2, 4q+3$

نوشت، که در آن $q \in \mathbb{Z}$. این مطلب اساس مبحث همنهشتی است که در سال گذشته با آن آشنا شده ایم.

۴-۶ - نمایش اعداد صحیح

استفاده از دستگاه دهدهی (اعشاری) متداول ترین صورت نمایش اعداد است. اعداد طبیعی را

می توان به صورت ضرایب توان های ۱۰ نمایش داد. مثلاً عدد ۳۴۷۶۵ عبارت است از:

$3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

شاید یکی از دلایل نمایش اعداد در دستگاه دهدهی یا به اصطلاح در «مبنای یا پایه ۱۰» وجود

۱۰ انگشت دست بوده که در شمارش طبیعی به کار می رفته است. این نحوه نمایش را ابتدا هندی ها

قبل از سال ۸۰۰ میلادی اختراع کرده‌اند. این مطلب را محمدبن موسی خوارزمی در کتاب «جمع و تفریق، بر طبق حساب هندی» شرح داده و نمایش رقم صفر با نماد ۰ هم برای اولین بار در این کتاب آمده است. اروپایی‌ها این دستگاه را هندی - عربی می‌نامند. دستگاه دیگری که در ریاضیات اسلامی وجود داشته، دستگاه شصت شصتی بوده که مسلمان‌ها فکر آن را از بابلی‌ها گرفتند و آن را تکمیل کردند. مبنای این نمایش عدد شصت بوده است، که در ارتباط با محاسبات نجومی و تقسیم ساعت به ۶۰ دقیقه و دقیقه به ۶۰ ثانیه است. با نمایش اعداد در مبنای ۲ هم که در نمایش داخلی کامپیوتر به کار می‌رود آشنا هستیم.

به طور کلی هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ می‌تواند مبنا باشد.

قضیه ۵: اگر b یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، هر عدد طبیعی n را می‌توان به طریقی

یکتا به صورت

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

نمایش داد، که در آن k یک عدد حسابی^۱ است و برای هر $k, j = 0, 1, 2, \dots$ ، $0 \leq a_j \leq b-1$ و $a_k \neq 0$.

اثبات: اگر الگوریتم تقسیم را متوالیاً به صورت زیر به کار گیریم، قضیه ثابت می‌شود. ابتدا

n را بر b تقسیم می‌کنیم.

$$n = bq_0 + a_0 \quad 0 \leq a_0 \leq b-1$$

$$q_0 = bq_1 + a_1 \quad 0 \leq a_1 \leq b-1$$

حال q_0 را بر b تقسیم می‌کنیم

این عمل را ادامه می‌دهیم

$$q_1 = bq_2 + a_2 \quad 0 \leq a_2 \leq b-1$$

$$q_j = bq_{j+1} + a_{j+1} \quad 0 \leq a_{j+1} \leq b-1$$

⋮

⋮

$$n > q_0 > q_1 > q_2 > \dots \geq 0$$

در دنباله q_0, q_1, q_2, \dots داریم:

(دقت کنید: $q_j > q_{j+1}$ مگر وقتی که $q_{j+1} = 0$ ، چون در غیر این حالت، $b > 1$ ، $a_{j+1} \geq 0$ و

$q_{j+1} \geq 1$ پس

$$(q_j = bq_{j+1} + a_{j+1} > q_{j+1})$$

لذا این کار را حداکثر تا n مرحله می‌توان ادامه داد. چون دقیقاً $n-1$ عدد صحیح مختلف بین

۱- هر عدد صحیح نامنفی را حسابی گویند.

صفر و n وجود دارند. پس در مرحله‌ای $q_k = 0$ و داریم:

$$q_{k-1} = b \times 0 + a_k, \quad 0 \leq a_k \leq b-1$$

اگر به ترتیب به جای هر $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, q_{k-1}$ حاصل تقسیم آن را بنویسیم، فرمول مورد نظر به دست می‌آید و بدیهی است که $a_k \neq 0$ ، زیرا اگر $a_k = 0$ آن‌گاه $q_{k-1} = 0$ ، و یک مرحله قبل از آن توقف می‌کردیم. اثبات یکتایی این نمایش را در مقاطع تحصیلی بالاتر خواهید دید. ■
در این حالت n را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$n = (a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0)_b$$

این نمایش را 1 ، نمایش عدد n در مبنای b می‌نامند. هریک از a_i ها را یک رقم در مبنای b گویند و $k+1$ ، تعداد ارقام عدد n در مبنای b است و می‌گویند n در مبنای b ، $k+1$ (رقم دارد). نمایش اعداد در دستگاه دودویی، یا در مبنای 2 ، به دلیل کاربرد آن در کامپیوتر و نیز تناظری که در رابطه با پرتاب سکه در احتمال دارد بسیار جالب است. علاوه بر آن، قضیه 5 در رابطه با پیدا کردن باقیمانده تقسیم بر برخی از اعداد به کار می‌رود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴: قاعده پیدا کردن باقیمانده تقسیم بر ۳ یا ۹

اگر $A = (a_n \dots a_1 a_0)_b$ می‌دانیم این عدد برابر است با

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$= \underbrace{(99 \dots 9)}_n a_n + \underbrace{(99 \dots 9)}_{n-1} a_{n-1} + \dots + (9+1)a_1 + a_0$$

$$= 9(11 \dots 1)_n a_n + 9(11 \dots 1)_{n-1} a_{n-1} + \dots + a_1 + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

پس باقیمانده تقسیم A بر ۹ (یا ۳) برابر است با باقیمانده مجموع

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

بر ۹ (یا ۳). به روش مشابه، قاعده پیدا کردن باقیمانده تقسیم یک عدد بر ۱۱ را نیز می‌توان پیدا کرد.

▲ (چگونه؟)

۱- در برخی از کتاب‌ها نمایش این عدد به صورت $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ است.

۴-۷- تمرین‌ها

۱- کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < 5\} \text{ (الف)}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x \leq 1\} \text{ (ب)}$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < 1\} \text{ (پ)}$$

(بزرگ‌ترین عضو مجموعه S عبارت است از $s_1 \in S$ ، که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s \leq s_1$).

۲- زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح مثال بزنید که کوچک‌ترین عضو نداشته باشد.

۳- ثابت کنید که هر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح و از پایین کراندار، دارای کوچک‌ترین

عضو و هر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح و از بالا کراندار دارای بزرگ‌ترین عضو است.

(یادآوری می‌کنیم که $A \subset \mathbb{Z}$ از بالا کراندار است اگر عددی مانند $n \in \mathbb{Z}$ یافت شود که به

ازای هر $a \in A$ و $a \leq n$ ، همچنین $A \subset \mathbb{Z}$ از پایین کراندار است اگر عددی مانند $n \in \mathbb{Z}$ یافت شود

که برای هر $a \in A$ ، $n \leq a$.)

۴- خاصیت ارشمیدسی :

ثابت کنید اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که

$$na \geq b$$

۵- ثابت کنید $\binom{n}{k}$ برای اعداد طبیعی n و $0 \leq k \leq n$ همیشه عدد طبیعی است.

۶- الف) برای $n \geq 2$ ، ثابت کنید :

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

ب) با استفاده از قسمت الف و اینکه برای هر عدد طبیعی $m \geq 2$ ،

$$2 \binom{m}{2} + m = m^2$$

ثابت کنید که

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

۱- نماد $s_1 = \max S$ برای بزرگ‌ترین عضو مجموعه S به کار می‌رود.

۷- کدام یک از اعداد زیر بر ۲۲ تقسیم پذیرند؟

الف) ۰ (ب) ۴۴۴

پ) ۱۷۱۶ (ت) ۳۲۵۱۶-

۸- الف) اگر a, b, c, d اعداد صحیح باشند و $a \neq 0, c \neq 0, a|b$ و $c|d$ ثابت کنید $ac|bd$.

ب) نشان دهید اگر a, b و $c \neq 0$ اعداد صحیح باشند، آنگاه $a|b$ اگر و تنها اگر $ac|bc$.

پ) ثابت کنید اگر برای هر $i = 1, 2, \dots, n, a|b_i$ آنگاه برای اعداد صحیح دلخواه $m_1, m_2, \dots,$

و m_n داریم

$$a | m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n$$

۹- خارج قسمت و باقیمانده را در الگوریتم تقسیم هریک از اعداد زیر، وقتی که بر ۱۷ تقسیم

شوند به دست آورید.

الف) ۱۰۰ (ب) ۴۴-

۱۰- الف) ثابت کنید حاصل جمع دو عدد صحیح زوج و همچنین حاصل جمع دو عدد صحیح

فرد، زوج است.

ب) ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد فرد، فرد است.

۱۱- الف) ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $4q + 1$ و همچنین حاصل ضرب هر

دو عدد به صورت $4q + 3$ ، به صورت $4q + 1$ است. ($q \in \mathbb{Z}$)

ب) ثابت کنید منبع هر عدد فرد به صورت $8q + 1$ است.

۱۲- نشان دهید حاصل ضرب دو عدد به صورت $6q + 5$ به صورت $6q + 1$ است.

۱۳- ثابت کنید حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم پذیر است.

۱۴- الف) عدد ۲۳۶ را در مبنای ۷ بنویسید.

ب) عدد $(10010011)_2$ برابر چه عددی در مبنای ۱۰ است؟

پ) عدد ۱۸۶۴ را در مبنای ۲ بنویسید.

ت) عدد $(a35b06)_{16}$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

(دقت کنید که اگر مبنا بیشتر از ۱۰ باشد، ارقام بیشتر از ۹ را به ترتیب با a, b, c, d و ... نمایش

می دهند، یعنی مثلاً در مبنای ۱۶، $a = 10, b = 11, c = 12, d = 13, e = 14$ و $f = 15$. البته گاهی

هم عدد بالا را با (61035110) هم نمایش می دهند.)

مجله ریاضی

دستگاه اعداد رمزی را ابتدا یونانی‌ها به کار گرفتند. در این دستگاه، اعداد را با حروف نمایش می‌دادند. در دوره بعد از ظهور اسلام نیز به وفور از حروف ابجد استفاده می‌شد و محاسباتی با آنها صورت می‌گرفت. این طریقه محاسبه را حساب جمل می‌گویند و جدول آن به شرح زیر است:

الف	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ی
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	ک	ل	م	ن	س	ع	ف	ص	
	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	
ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰

حساب جمل (حساب ابجدی) در ضبط تاریخ حوادث به عنوان ماده تاریخ

به کار می‌رود.