

فصل ۱

دنباله‌ها

۱-۱- مقدمه

وقتی در یک برنامه تلویزیونی به حرکات و تکاپوی انبوهی از ماهی‌ها می‌نگریم، به این فکر وادار می‌شویم که رشد جمعیت ماهی‌ها از چه مدل و رابطه‌ای پیروی می‌کند. آیا می‌توانیم با توجه به شرایط زیست محیطی و تغییرات آن رشد و زوال گونه خاصی از ماهی‌ها را پیش‌بینی کنیم؟ فرض کنیم مدل جمعیتی نوع خاصی از ماهی‌ها از رابطه

$$P_{n+1} = \frac{bP_n}{a + P_n}$$

پیروی کند که در آن P_n جمعیت ماهی‌ها در سال n ام، P_{n+1} جمعیت ماهی‌ها در سال $n+1$ ام و a و b دو عدد ثابت اند که به شرایط محیطی ماهی‌ها وابسته‌اند.

با استفاده از این رابطه چنانچه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی P_1 معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم و سال‌های بعد به دست می‌آید. یعنی اعداد

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را دنباله می‌نامیم. مطالعه دنباله‌ها و خواص آنها موضوع این فصل می‌باشد.

مسئله

(الف) به نظر شما براساس مدل داده شده فوق تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها افزایش می‌یابد؟

(ب) تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها کاهش یافته و جمعیت فنا می‌شود؟

با مطالعه مبحث دنباله‌ها و بررسی خواص آنها به این پرسش‌ها می‌توان پاسخ داد.

۲-۱- دنباله‌های عددی

در سال‌های قبل با اعداد اعشاری و تبدیل کسرها به اعداد اعشاری آشنا شده‌اید. برای مثال برای آن که کسر $\frac{1}{3}$ را به کسر اعشاری تبدیل کنیم کافی است عدد ۱ در صورت کسر را به عدد ۳ مخرج تقسیم کنیم در ابتدا عدد $\frac{0}{3}$ حاصل می‌شود. اگر تقسیم را ادامه دهیم اعداد $\frac{0}{33}$ ، $\frac{0}{333}$ و نظایر این‌ها به دست می‌آیند. چون باقیمانده هرگز صفر نمی‌شود این اعشار همچنان ادامه دارند. آیا $\frac{1}{3}$ با اعداد به دست آمده برابر است؟

هرگاه $\frac{1}{3}$ را برابر $\frac{0}{3}$ اختیار کنیم، مقداری تقریبی برای $\frac{1}{3}$ به دست آورده‌ایم که خطای این تقریب کمتر از $\frac{0}{1}$ است: زیرا

$$\frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{0}{333} \dots$$

و $\frac{0}{1} < \frac{0}{333} \dots$ هرگاه $\frac{1}{3}$ را برابر $\frac{0}{33}$ اختیار کنیم، خطای تقریب از $\frac{0}{1}$ نیز کوچک‌تر است. به همین نحوه هرگاه $\frac{1}{3}$ را برابر $\frac{0}{333}$ بگیریم، خطای تقریب از $\frac{0}{1}$ کوچک‌تر است. در عمل و محاسبات کاربردی خطای تقریب را از پیش معین کرده و متناسب با آن مقدار تقریب $\frac{1}{3}$ را به صورت اعشاری، با اعشار خاتمه یافته، مشخص می‌کنند.

❖ مسئله

ممکن است چنین به نظر رسد که برای آن که خطای تقریب را به صفر برسانیم بهتر است بنویسیم

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{33333} \dots$$

اما نوشتن کسر اعشاری با نمایش $\frac{0}{33333000}$ که در آن رقم اعشاری ۳، برای همیشه ادامه دارد، چه معنا و مفهومی می‌تواند داشته باشد؟ برخی برای آنکه ۳ صدم و ۳ هزارم و ... را تکرار نکنند

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{\overline{3}} \quad \text{می‌نویسند.}$$

اگر منظورمان از نوشتن سه نقطه «...» به دنبال آخرین ۳ این است که این رقم تا ابد ادامه دارد چگونه می‌توانیم تساوی فوق را تفسیر کنیم؟

در واقع دنباله‌ای از اعداد اعشاری به صورت

$$\frac{0}{3}, \frac{0}{33}, \frac{0}{333}, \dots, \frac{0}{\overbrace{333}^n \dots 3}, \dots$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$a_n = \frac{0}{\overbrace{333}^n \dots 3}, \dots, a_3 = \frac{0}{33}, a_1 = \frac{0}{3} \quad \text{در دست داریم که در آن}$$

a_1 را جمله اول این دنباله، a_2 را جمله دوم و در حالت کلی، a_n را جمله n ام این دنباله یا جمله عمومی دنباله می‌نامیم.

اکنون شما احمد بفرمایید که یک دنباله را به زبان ریاضی چگونه تعریف می‌کنید؟

احمد: یک دنباله عددی مجموعه‌ای از اعداد است که این اعداد با اعداد طبیعی شماره‌گذاری شده‌اند.

دبیر: بسیار خوب. آیا می‌توانی به زبان دقیق‌تری دنباله را تعریف کنی؟

احمد: آری، هر دنباله عددی، یا به اختصار دنباله، تابعی است با دامنه مجموعه اعداد طبیعی N و هم دامنه مجموعه اعداد حقیقی R .

دبیر: بسیار خوب. شما تعریف دقیق دنباله را ارایه دادید. می‌توانی با علامات

ریاضی توضیح بیشتری بدهی؟

$$a: N \rightarrow R \quad (1)$$

احمد: فرض کنیم

یک تابع، یعنی یک دنباله باشد، در این صورت $a(1)$ ، $a(2)$ ، \dots ، $a(n)$ مقادیر تابع a بوده که اعدادی حقیقی‌اند. در موقعیت کاری با دنباله‌ها، به جای $a(1)$ می‌نویسیم a_1 ، به جای $a(2)$ می‌نویسیم a_2 و به طور کلی به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n . لذا نماد تابعی نمایش داده شده در (۱) به صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

دبیر: اکنون شما حسین دو دنباله دیگر نام ببرید.

حسین: این پرسش ساده‌ای است؛ می‌توانم بنویسم:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \quad (2)$$

دبیر: اکنون این دنباله را در نظر بگیرید:

$$7, -8, 9, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots \quad (3)$$

آیا می‌توانی جمله عمومی این دنباله و یا شکل تابعی آن را بیان کنی؟
 حسین: آری، ۷ اولین جمله این دنباله است، همین ۸- دومین و ۹ سومین و $\frac{5}{6}$
 چهارمین جمله آن است. اگر نام این دنباله را b بنامیم، داریم
 $b_1 = 7, b_2 = -8, b_3 = 9, b_4 = \frac{5}{6}, b_5 = \frac{6}{7}, \dots$
 اما از شماره ۴ به بعد جملات دنباله، که همان مقادیر تابع اند، منظم هستند، پس
 می‌نویسیم

$$b_1 = 7, b_2 = -8, b_3 = 9, b_n = \frac{n+1}{n+2}, n \geq 4 \quad (4)$$

دبیر: فرق این دنباله با دنباله نموده شده در (۲) چیست؟
 حسین: دنباله‌های (۳) و (۲) فقط در سه جمله نخست با هم متفاوت‌اند. از
 شماره ۴ به بعد دو دنباله متحدند.

دبیر: آیا می‌توانیم بگوییم این دو دنباله یکی‌اند؟
 حسین: خیر؛ اما تفاوت در سه جمله تأثیری کلی در اعداد دو دنباله ندارد.
 دبیر: از دنباله‌های آشنای دیگر خاطرتان هست؟ دنباله هندسی را به خاطر دارید؟
 احمد: آری، می‌توانم چند مثال بزنم، برای نمونه یک دنباله هندسی می‌سازم:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

دبیر: درست است. این دنباله یک دنباله هندسی است که قدر نسبت آن $q = \frac{1}{2}$
 است. جملات آن مرتب کوچک و کوچکتر می‌شوند زیرا قدر نسبت آن کوچکتر از
 واحد است.

حسین: منظورتان از کوچکتر شدن چیست؟
 دبیر: منظورمان این است که جملات دنباله به عدد صفر گرایش دارند، اصطلاحاً
 گوییم حد دنباله برابر صفر است.

حسین: اما هر کسر به شکل $\frac{1}{2^{n-1}}$ ولو n خیلی بزرگ باشد، هرگز برابر صفر
 نمی‌شود.

دبیر: آری درست است. منظور از آن که حد دنباله برابر صفر است، این نیست که
 جملات دنباله برابر صفر می‌شوند، بلکه خطای آنها تا صفر به دلخواه کوچک می‌گردد.
 اجازه دهید به این مبحث بعداً بپردازیم. فعلاً به تعاریف و مقدمات دنباله ادامه می‌دهیم.

نماد دنباله : وقتی با یک دنباله مانند

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

سر و کار داریم، آن را با نماد آکولاد یعنی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و یا مختصراً $\{a_n\}_{n=1}$ و یا حتی مختصتر با $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم. برای مثال، دنباله‌هایی را که قبلاً حسین نام برد با $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}$ ، $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}$ نشان می‌دهیم، لذا جمله عمومی دنباله را در درون آکولاد قرار می‌دهیم و $n=1$ نشانگر آن است که شماره جملات از عدد طبیعی ۱ شروع می‌شود.

البته هرگاه دنباله، فاقد ضابطه و قانون مشخص باشد، یعنی جمله عمومی آن را نتوانیم با فرمول ساده و معین مانند $a_n = \frac{1}{n}$ بیان کنیم، چاره‌ای نداریم جز آنکه جملات دنباله را یکی یکی و به دنبال هم نام ببریم و از نماد دنباله نمی‌توانیم استفاده کنیم. از این نوع دنباله‌ها، می‌توانیم به دنباله اعدادی که نمایشگر عدد π است اشاره کنیم (یعنی اعداد آن به عدد π گرایش دارند).

$$3, 3/14, 3/1415, \dots$$

برای این دنباله هیچ قاعده و یا قانونی که بر طبق آن بتوان جملات دنباله را تولید کرد وجود ندارد (چرا؟).

♦♦ نکته ♦♦ : ممکن است با یک توالی متناهی از اعداد سر و کار داشته باشیم. در این صورت این توالی را یک دنباله متناهی می‌نامیم، مانند

$$1, 2, 3, 4, \dots, 20$$

$$-5, 5, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$$

که اولی دنباله‌ای متناهی با 20 جمله و دومی دنباله‌ای متناهی با 6 جمله می‌باشد. اما وقتی از یک دنباله بدون قید نام برده می‌شود مرادمان یک دنباله نامتناهی است. اکنون به ذکر مثال جالبی از دنباله‌ها می‌پردازیم که نظیر تابع ثابت می‌باشد.

♦♦ مثال ♦♦ : فرض کنیم $C \in \mathbb{R}$ عدد ثابتی باشد. دنباله C, C, C, \dots, C, \dots

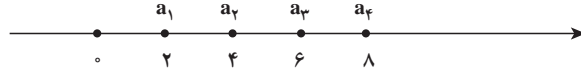
که در آن هر جمله آن برابر C ، یعنی برای هر عدد طبیعی n ، $C_n = C$ ، دنباله ثابت C نامیده می‌شود برای نمونه دنباله

$$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}, \dots$$

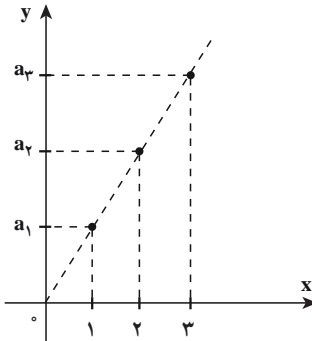
دنباله ثابت $\sqrt{2}$ یعنی $\{\sqrt{2}\}$ می‌باشد.

۳-۱- نمودار دنباله‌ها

یک دنباله را به دو صورت می‌توانیم نمایش دهیم. یک راه آن مشخص کردن جملات دنباله روی خط اعداد حقیقی است. برای نمونه دنباله اعداد زوج، یعنی $\{2n\}_{n=1}$ به صورت نقاطی روی محور اعداد نمایش داده می‌شود (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱- جملات دنباله $a_n = 2n$ ، یعنی اعداد طبیعی زوج با نقاط توپیر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده است.



راه دوم نمایش دنباله با استفاده از صورت تابعی آن است، همانند یک تابع نقاط دنباله را در صفحه مختصات نشان می‌دهیم. نمودار دنباله $a_n = 2n$ در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.

شکل ۲-۱- وقتی با خط به معادله $f(x) = 2x$ مقایسه می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که نمودار دنباله با ضابطه $a_n = 2n$ به صورت نقاط مجزا و توپیر روی این خط قرار دارند.

۴-۱- انواع دنباله‌ها

در درس حسابان با انواع مهمی از توابع آشنا شده‌اید. مفاهیم تابع صعودی، تابع نزولی، تابع کراندار در حسابان از اهمیت اساسی برخوردارند. این مفاهیم را بار دیگر یادآوری می‌نماییم.

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی باشد، تابع f را بر A صعودی می‌نامیم، در صورتی که همواره از $x_1 < x_2$ نتیجه شود $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، همچنین تابع f را بر A از بالا کراندار نامیم در صورتی که عدد حقیقی U یافت شود به طوری که برای هر $x \in A$ $f(x) \leq U$

مفاهیم نزولی بودن و از پایین کراندار بودن مشابهاً تعریف می‌شوند تابع f را بر A کراندار می‌نامیم در صورتی که از بالا و از پایین کراندار باشد، یعنی عددی مثبت مانند U یافت شود به طوری که برای هر $x \in A$ $-U \leq f(x) \leq U$

چون هر دنباله ماهیتاً یک تابع است، همین مفاهیم را می‌توانید در مورد دنباله‌ها تکرار کنید. در اینجا کار ساده‌تر است، زیرا دامنه هر دنباله مجموعه اعداد طبیعی است که به طور مرتب شده، از

کوچک به بزرگ، در نظر گرفته می‌شود:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \dots < n < n+1 \dots$$

$$\downarrow a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

پس هرگاه دنباله $\{a_n\}$ بخواهد صعودی باشد، چون $1 < 2$ ، باید $a_1 \leq a_2$. همچنین چون $2 < 3$ باید داشته باشیم $a_2 \leq a_3$ و به طور کلی چون $n < n+1$ ، لازم است که $a_n \leq a_{n+1}$ ، یعنی هرگاه از سمت چپ به جملات دنباله بنگریم، هر جمله باید از جمله بعدی کوچکتر یا مساوی باشد.

برای دنباله نزولی وضعیت برعکس است، دنباله‌ای نزولی است که وقتی از چپ بدان می‌نگریم هر جمله از جمله بعدی بزرگتر یا مساوی است به عبارت دیگر دنباله $\{a_n\}$ صعودی است هرگاه برای هر n ، $a_n \leq a_{n+1}$ و دنباله $\{b_n\}$ نزولی است هرگاه برای هر n ، $b_n \geq b_{n+1}$ ، هر دنباله که یا صعودی و یا نزولی باشد یک دنباله یکنوا نامیده می‌شود.



به دنباله‌های زیر توجه کنید.

الف) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots, 2^{n-1}, \dots$

ب) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$

ج) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$

د) $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \dots$

اکنون مشخص کنید کدام دنباله صعودی و کدامیک نزولی است.

❖ **نکته:** در بحث دنباله، از ویژگی‌های حسابی دنباله چنان است که با افزایش شماره جمله دنباله، مقدار جملات افزایش می‌یابد، یا آن‌که وقتی دنباله‌ای از بالا کراندار است، جملات دنباله از یک عدد ثابتی بزرگتر نخواهند شد.

بررسی و مطالعه رفتار دنباله‌ها و همچنین توابع در واقع پیش‌بینی رفتار آنها است.

به دنباله‌های زیر توجه کنید.

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots \quad (\text{الف})$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots \quad (\text{ب})$$

$$2, -3, 4, -5, 6, -7, \dots \quad (\text{ج})$$

ویژگی این دنباله‌ها چنان است که جملات آن یک در میان مثبت و منفی هستند. جملات دنباله (الف) همگی حول دو نقطه ۱ و -۱ گرد آمده‌اند و در واقع برابر ۱ یا -۱ هستند. جملات دنباله (ب) نیز حول یک عدد معین گرد آمده‌اند، در حالی که جملات دنباله (ج) فاقد چنین ویژگی هستند. هیچ‌یک از این سه دنباله نه صعودی اند و نه نزولی، پس یکنوا نیستند.

مسائل

۱- چهار دنباله زیر را در نظر بگیرید :

$$\left\{ (-1)^{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{ب}) \qquad \left\{ n+1 \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{الف})$$

$$\left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{د}) \qquad \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{ج})$$

ابتدا تعدادی از جملات هر دنباله را بنویسید. این که چه تعداد از جمله‌های نخست را انتخاب می‌کنید به خودتان بستگی دارد. سپس مشخص کنید که کدامیک صعودی و کدامیک نزولی اند. همچنین تجمع احتمالی جملات هر دنباله را حول یک عدد معین بررسی کنید.

۲- یک دنباله بسازید که کراندار باشد اما صعودی نباشد.

۳- یک دنباله بسازید که هم کراندار و هم نزولی باشد.

۴- نشان دهید که هیچ‌کدام از دو جمله از دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ برابر نیستند.

۵- ده عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۶- دنباله‌ای از اعداد گویا بسازید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۷- با بررسی جملات (اولیه) دنباله‌های زیر رفتار آنها را حدس زده و حدس خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ ب) $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ ج) $\{1 + (-1)^n\}$

د) $\left\{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ه) $\left\{\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^n}\right\}$ ز) $\left\{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$

۸- دنباله $a_n = \frac{n}{n+1}$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

اکنون ۵ جمله نخست آن را تعویض می‌کنیم و دنباله جدید را $\{b_n\}$ می‌نامیم؛ بنابراین، برای مثال،

$$b_1=1, b_2=5, b_3=10, b_4=10, b_5=-15$$

و برای $n \geq 6$ ، قرار می‌دهیم $b_n = a_n$. رفتار دو دنباله $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ را مقایسه کنید. چه نتیجه کلی از این بررسی عایدتان می‌شود؟ آن را بیان کنید.

۹- دنباله $c_n: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

را در نظر می‌گیریم. رابطه بین جملات متوالی این دنباله را پیدا کنید.

$\{c_n\}$ یک نمونه از دنباله‌هایی است که به دنباله‌های فیبوناتچی^۱ معروف‌اند.

۱۰- ثابت کنید هرگاه دنباله $\{a_n\}$ کراندار باشد، عدد مثبتی مانند M هست به قسمی که

$$|a_n| \leq M, n \text{ برای هر } n \text{ و بالعکس.}$$

۱۱- برای چندین جمله اولیه، فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ را تا ۲ حساب کنید. n از

$$\text{چه عددی باید بزرگتر باشد تا نابرابری } \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < 0.0001 \text{ برقرار باشد.}$$

۱- لئوناردو فیبوناتچی یک ریاضیدان ایتالیایی بود که در رابطه با مطالعه زاد و ولد خرگوش‌ها و افزایش جمعیت آنها این گونه دنباله‌ها را شناسایی کرده است. در واقع مدل افزایش جمعیت خرگوش‌ها را صورت‌بندی کرده است.

پرسش‌های مفهومی

پرسش‌های زیر را بررسی کنید، اگر فکر می‌کنید درست‌اند، آنها را توضیح دهید و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند مثالی ارائه دهید.

- (الف) هرگاه n جمله نخست یک دنباله را تغییر دهیم در رفتار آن تغییری حاصل نمی‌شود.
(ب) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.
(ج) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.
(د) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز یکنوا است.

۵-۱- همگرایی دنباله‌ها

سرچشمه بسیاری از اندیشه‌های جدید ریاضی در اندیشه‌های کشف شده قبلی یا تجربه‌های گذشته نهفته است. با این حال، در بیشتر موارد چنین سرچشمه‌هایی در لایه‌های زیرین مفاهیم مربوطه پنهان بوده و به آسانی نمی‌توان آنها را ملاحظه کرد. در واقع، دیدن و یافتن آنها نگاهی تیزبین و شجاعت در تفکر می‌خواهد؛ در بعضی موارد نیز ظرافت‌هایی دیده می‌شود ولی در بدو امر به نظر نمی‌رسد که اندیشه جدید ریاضی در ورای آنها وجود داشته باشد.

با چنین نگرشی به بحث‌ها و توصیف‌های مربوط به دنباله‌ها باز می‌گردیم و به کندوکاو سرچشمه‌ها، ظرافت‌ها یا اندیشه‌های نو می‌پردازیم.

برحسب هر ویژگی و یا مفهومی که تعریف کرده‌ایم دنباله‌ها را می‌توانیم به دو دسته تقسیم

کنیم:

دنباله‌های کراندار و دنباله‌های بیکران (کراندار نیستند).

دنباله‌های یکنوا و دنباله‌هایی که یکنوا نیستند.

یک ویژگی دیگر در مجموعه دنباله‌های بررسی شده وجود دارد که کمتر خودنمایی می‌کند. برخی از دنباله‌ها این ویژگی را دارند که جملات آن به یک عدد مشخص نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند و از روی نمودار نیز شهود می‌شود که به یک نقطه می‌گریند. بنابراین معیار دسته‌بندی جدید را از این دنباله‌هایی که جملات دنباله، به یک عدد معین می‌گریند و دنباله‌هایی که جملات آنها، به یک عدد معین نمی‌گریند. برای مثال از دنباله‌های دسته اول به دنباله‌های زیر توجه می‌کنیم:

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \left\{ \frac{1}{n+1} \right\} \quad \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

و به عنوان نمونه از دنباله‌های دسته دوم، یعنی دنباله‌هایی که با افزایش شماره جمله دنباله، به یک عدد معین نمی‌گرایند، دنباله‌های زیر را نام می‌بریم:

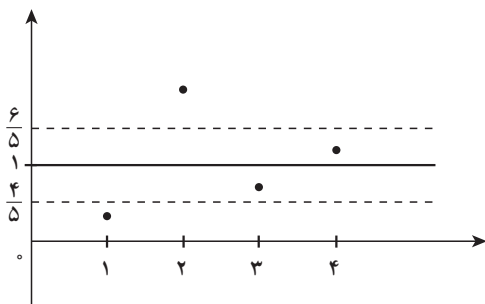
دنباله اعداد زوج $\{2n\}$ ، دنباله اعداد فرد $\{2n-1\}$ ، دنباله $\{(-1)^{n+1}\}$
 ملاحظه می‌کنیم که دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ به صفر میل می‌کند به عبارت دیگر جملات این دنباله با افزایش شماره جمله‌ها، به طرز دلخواهی به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. همچنین با محاسبه جملات دنباله $\left\{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ ملاحظه می‌کنیم که وقتی n بزرگ و بزرگتر می‌شود جملات این دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. برای آنکه این مفهوم «نزدیکی جملات دنباله به عدد ۱» را به لحاظ ریاضی واضح و روشن کنیم به نمودار این دنباله بار دیگر دقت می‌کنیم.
 قبل از این، جدولی برای تعیین مقادیر این دنباله تنظیم می‌کنیم.

| | | | | | | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----|
| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ... |
| a_n | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{17}{16}$ | $\frac{31}{32}$ | $\frac{65}{64}$ | $\frac{127}{128}$ | ... |

می‌دانیم میزان نزدیکی دو عدد با قدر مطلق تفاضل آن دو عدد سنجیده می‌شود. پس هرگاه بخواهیم $|a_n - 1| < \frac{1}{5}$ ، کافی است به جای a_n عبارت $1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ را قرار دهیم:

$$|a_n - 1| = \left|1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1\right| = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

حال برای آن که $\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{5}$ کافی است $2^n > 5$ (۱) پس هرگاه مثلاً $2^3 = 8 \geq 5$ به طور قطع نامساوی (۱) نیز برقرار است؛ در این صورت باید $n \geq 3$.



شکل ۱-۳

در جدول نیز ملاحظه می‌کنیم که از شماره $n = 3$ به بعد اختلاف جملات دنباله تا عدد ۱ از $\frac{1}{5}$ کوچکتر است. به نمودار این دنباله نیز توجه می‌کنیم:

شکل ۱-۳ نقاط معرف جملات دنباله از جایی به بعد در درون نوار به مرکز $y=1$ قرار دارند وقتی نواری به مرکز خط $y=1$ و به شعاع $\frac{1}{5}$ در نظر می‌گیریم مقادیر جملات دنباله از مرتبه ۳ به بعد در

این نوار قرار می گیرند؛ به زبان فنی تر هرگاه $n \geq 3$ ، یعنی $a_n \in (1 - \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5})$ ، یعنی $a_n \in (\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$

$$n = 3, |a_n - 1| = \left| \frac{7}{8} - 1 \right| = \frac{1}{8} < \frac{1}{5}$$

$$n = 4, |a_n - 1| = \left| \frac{17}{16} - 1 \right| = \frac{1}{16} < \frac{1}{5}$$

$$n = 5, |a_n - 1| = \left| \frac{31}{32} - 1 \right| = \frac{1}{32} < \frac{1}{5}$$

$$n = 6, |a_n - 1| = \left| \frac{65}{64} - 1 \right| = \frac{1}{64} < \frac{1}{5}$$

بار دیگر به دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ برمی گردیم. می دانیم که با بزرگ و بزرگتر شدن n جملات دنباله به عدد صفر می گرایند. اکنون از شما خواسته می شود که با محاسبات ریاضی این معنی را روشن تر سازید. برای نمونه به یک مورد توجه می کنیم:

هرگاه $a_n = \frac{1}{n}$ ، از چه شماره و یا مرتبه ای به بعد اختلاف جملات دنباله تا صفر از $\frac{1}{100}$ کوچکتر است؟

در واقع می خواهیم جواب های نامساوی $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ را پیدا کنیم. این نامساوی معادل نامساوی $n > 100$ می باشد، پس داریم.

برای مثال $n > 100 \Rightarrow |a_n - 0| < \frac{1}{100}$

$$n = 101 \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

$$n = 105 \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{105} < \frac{1}{100}$$

$$n = 1000 \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{1000} < \frac{1}{100}$$

حال با اختیار کردن $\frac{1}{1000}$ به جای $\frac{1}{100}$ ، مرتبه مربوطه را پیدا کنید.
 سپس با اختیار کردن $\frac{1}{100000000}$ به جای $\frac{1}{100}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.
 همچنین با اختیار کردن $\frac{1}{1000000000000000000}$ به جای $\frac{1}{100}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سؤال: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک نظیر یک صد میلیون، و یک میلیارد برقرار

است؟

❖ نکته: برای پاسخگویی به پرسش اخیر به بررسی بیشتر دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ می پردازیم. برخی از مقادیر این دنباله را برای n های بزرگ در جدول زیر درج کرده ایم.

| | | | | | | | |
|---------------|------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----|
| n | ۱۰, | ۱۰۰, | ۱۰۰۰, | ۱۰ ^۶ , | ۱۰ ^۸ , | ۱۰ ^۹ , | ... |
| $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{10}$, | $\frac{1}{100}$, | $\frac{1}{1000}$, | $\frac{1}{10^6}$, | $\frac{1}{10^8}$, | $\frac{1}{10^9}$, | ... |

این جدول برخی مقادیر دنباله $\frac{1}{n}$ را نشان می دهد.

با توجه به مقادیر دنباله مشاهده می کنیم که هر اندازه n بزرگتر اختیار شود مقدار $\frac{1}{n}$ کوچکتر می شود و نقاط نمایش دهنده مقادیر این دنباله، روی محور اعداد، به نقطه صفر نزدیک و نزدیکتر می شوند.

از طرف دیگر می دانیم که همه مقادیر دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ مثبت هستند و لذا نقاط متناظر این مقادیر روی محور حقیقی سمت راست مبداء، یعنی صفر، قرار دارند. می توان چنین تصور کرد که چون مقادیر این دنباله از صفر کمتر نمی شوند، عدد صفر مانند یک نقطه که مانع عبور نقاط دنباله به سمت چپ خودش است، ایستادگی می کند و نقاط دنباله هرگز به صفر نمی رسند گرچه به دلخواه به آن نزدیک می شوند و گویی نقطه صفر حد نقاط این دنباله است. باید توجه کنیم که شهود بصری، در مواردی، با دقت ریاضی تفاوت دارد؛ در مورد دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و نمودار هندسی نقاط آن روی محور اعداد به نظر می رسد که نقاط نمایش مقادیر $\frac{1}{n}$ برای n های بزرگ در نزدیک های نقطه صفر به هم می چسبند و گویی طولی پیوسته می سازند! در صورتی که این شهود هندسی کاملاً نادرست است. زیرا هیچ دو نقطه ای از این دنباله بر هم منطبق نیستند تا آن که طولی پیوسته به وجود آید، مهم تر از این می دانیم که در واقع بین هر دو کسر گویای بی شمار عدد حقیقی گویای دیگر وجود دارد.

با توجه به این که فاصله دو نقطه روی محور با قدر مطلق تفاضل آن دو نقطه سنجش می‌شود، از منظر جبری و محاسباتی قدر مطلق تفاضل دو عدد، اختلاف و نزدیکی آن دو عدد را مشخص می‌کند. بنابراین به جاست که مفاهیم مربوط به رفتار دنباله را با استفاده از نماد و مفهوم قدر مطلق صورت بندی کنیم.

در حالت کلی هرگاه عددی را که تصور می‌شود جملات یک دنباله به آن می‌گیرند و یا حول آن تجمع می‌کنند («L») بنامیم، آنگاه به آسانی می‌توانیم عبارت‌هایمان را به زبان ریاضی برگردانیم:

اختلاف جمله nام دنباله $\{a_n\}$ با مقدار حدی L به زبان ریاضی می‌شود $|a_n - L|$ و یا فاصله جمله nام دنباله تا نقطه حدی دنباله می‌شود $|a_n - L|$

در حالت خاص دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ ، عبارت قدر مطلق مربوطه به صورت زیر است:

$$|a_n - L| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$$

در انجام فعالیت قبلی ملاحظه کردیم که اگر بخواهیم $\frac{1}{n} < \frac{1}{1,000,000}$ باشد، باید $n > 1,000,000$ ؛ و هرگاه بخواهیم $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^9}$ کافی است مقادیر n در نامساوی $n > 10^9$ صدق کنند.

احمد: آیا می‌توان گفت که اختلاف جملات این دنباله از عدد صفر از مقدار $\frac{1}{1,000,000,000,000}$ (یک صد میلیارد) نیز کمتر می‌شود.

دبیر: آری، کافی است که n را از $1,000,000,000,000$ بزرگتر بگیریم، مثلاً $n = 10^{11} + 1$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 1} < \frac{1}{10^{11}}$$

در این صورت

احمد: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک و کوچکتر از یکصد میلیارد نیز صادق است؟

دبیر: آری هر عدد کوچک (مانند $\varepsilon > 0$ اسیلن) که انتخاب کنیم از شماره‌ای به بعد اختلاف جملات مربوطه از صفر کمتر از ε است که در مثال بالا $\varepsilon = \frac{1}{10^{11}}$ اختیار شد.

اما چون نمی‌توانیم این وضعیت را برای همه اعداد کوچک نظیر یک میلیون، یک میلیارد و یا یکصد میلیارد امتحان کنیم به ناچار باید متوسل به ε شویم (بخوانید اسیلن)

ε در واقع نماینده همه اعداد کوچک و مثبت است و چون در عمل دلخواه فرض می‌شود ما را از تجربه‌ها و محاسباتی که پایان ندارد بی‌نیاز می‌سازد.

احمد: این بسیار جالب است، اما شماره جمله‌ها چگونه عددی خواهد شد؟
 دبیر: طبیعی است شماره جملات مربوطه که باید برای آنها نامساوی $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ برقرار باشد به ε بستگی خواهد داشت. برای نمونه وقتی $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ، $M = 101$ به دست آمد، یعنی هرگاه $n \geq 101$ ، $M = 101$ نماینده شماره مربوطه است.

وقتی $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ، شماره مربوطه یعنی $M = 1001$ به دست آمد.

وقتی $\varepsilon = \frac{1}{10^{11}}$ شماره مربوطه یعنی $M = 10^{11} + 1$ به دست آمد، زیرا دیدیم از این شماره به بعد، یعنی هرگاه $n > 10^{11}$ مثلاً $n = 10^{11} + 1$ ، $n = 10^{11} + 2$ ، $n = 10^{11} + 3$ ، ...

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 1} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 2} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 3} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

و به طور کلی برای هر n که $n \geq 10^{11} + 1$ ، $\frac{1}{n} < \varepsilon$
 اکنون می‌توانیم تجربه‌مان را در خصوص دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ ریاضی وارتر بیان کنیم، برای هر عدد مثبت (ولو بسیار کوچک) ε فاصله a_n ها از صفر از شماره‌ای مانند M به بعد کمتر از ε می‌شود.
 به عبارت دقیق‌تر

برای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند M هست که هرگاه $n \geq M$ ، $|a_n - 0| < \varepsilon$ و بالاخره به این مفهوم کلیت داده و آن را برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ و عدد حقیقی مانند L که تصور می‌کنیم جملات دنباله به آن گرایش دارند، بیان می‌کنیم:

تعریف: گوئیم دنباله $\{a_n\}$ دارای حد L است، هرگاه برای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n که $n \geq M$ ، نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار باشد.

این جمله را که «دنباله $\{a_n\}$ دارای حدی برابر L است» با نماد ریاضی به شکل $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ نوشته و آن را چنین می خوانیم.

«حد دنباله a_n وقتی n به ∞ میل می کند برابر L است»

یا آن که می گوییم «دنباله $\{a_n\}$ به L همگراست» و در این صورت دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله همگرا می نامیم.

وقتی برای دنباله ای مانند $\{a_n\}$ چنین عددی حقیقی مانند L که در تعریف فوق صدق می کند وجود نداشته باشد دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله واگرا می نامیم.

❖ **مثال:** دنباله $\{(-1)^n\}_{n=1}$ را در نظر می گیریم، جملات این دنباله یک در میان اعداد -1 و 1 را اختیار می کنند. در واقع جملات این دنباله به عنوان نقاط خط حقیقی روی دو نقطه -1 و 1 قرار گرفته و لذا به این دو نقطه گرایش دارند. اما معلوم است که این دنباله همگرا نمی باشد، زیرا مقدار L می بایست یک عدد منحصر به فرد بوده و همه جملات به همین یک عدد گرایش کنند. حال هرگاه $L=1$ اختیار کنیم جملات این دنباله با n های فرد هرگز به L (به مقدار دلخواه) نزدیک نمی شوند. همین وضعیت برای $L=-1$ نیز صادق است، پس یک عدد مشخص L که در تعریف همگرایی صدق کند وجود ندارد.



۱- توضیح دهید که چرا دنباله $a_n = 2n + 1$ همگرا نمی باشد.

۲- دنباله $1, -\frac{1}{2}, 2, -\frac{2}{3}, 3, -\frac{3}{4}, 4, -\frac{4}{5}, 5, -\frac{5}{6}, \dots$ را در نظر بگیرید، ابتدا ضابطه

این دنباله را معلوم کنید، سپس از این دنباله دو دنباله استخراج کنید که یکی همگرا و دیگری واگرا باشد.

❖ **نکته:** مسأله های مربوط به تشخیص همگرایی و یا پیدا کردن حد دنباله ها را می توان چنین طبقه بندی کرد.

الف) مسأله هایی که در آنها از پیش همگرایی دنباله بررسی شده و از شما خواسته می شود تا مطابق تعریف تساوی حدی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad (1)$$

را محقق سازید، برای اثبات (۱) طبق تعریف می‌بایست نشان دهیم که حکم منطقی زیر برقرار و درست است.

(۲) برای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند M هست به قسمی که برای هر $n \geq M$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$ در اثبات (۲)، $\varepsilon > 0$ به عنوان یک عدد حقیقی مثبت معلوم مسأله است.

همچنین در اینجا M به عنوان یک عدد طبیعی (شماره جملات مورد نظر) مجهول مسأله است.

M را باید چنان پیدا کنیم که در گزاره شرطی زیر صدق کند:

اگر n عددی طبیعی و $n \geq M$ آنگاه $|a_n - L| < \varepsilon$

معنای این گزاره شرطی آن است که از شماره M به بعد جملات دنباله در نامساوی $|a_n - L| < \varepsilon$

صدق کرده و لذا در اطراف L تجمع می‌کنند.

در مسائل مربوط به اجرای دستورالعمل فوق، چون می‌خواهیم نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار

باشد و ε بر ما معلوم است. با این نابرابری کار می‌کنیم تا بتوانیم به نحوی M را پیدا کنیم.

ب) دسته دوم مسأله‌های مربوط به حد مسأله‌هایی است که در آن L بر ما معلوم نیست. در واقع

در این نوع مسأله‌ها از شما خواسته می‌شود با بررسی جملات دنباله چنانچه فکر می‌کنید دنباله مورد

نظر همگراست ابتدا L را حدس بزنید و سپس در صورت واقعیت امر و درست بودن حدس خود،

مطابق بند الف تساوی حدی، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ را ثابت کنید.

ضمناً همیشه یادتان باشد که:

تسلط بر خواص نابرابری‌ها و درک درست حکم منطقی (۲)، که همان مفهوم حد است،

از ملزومات اساسی حل مسأله‌های مربوط به همگرایی است.

❖ مثال: همگرایی دنباله $\left\{ 3 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}_{n=1}$ را بررسی کنید.

حل: باید معلوم کنیم که آیا این دنباله همگراست یا و اگر و اگر همگراست به چه عددی

همگراست؟

با اندکی کنکاش در مقادیر این دنباله ملاحظه می‌کنیم که جملات دنباله، برای n های به قدر کافی

بزرگ، به عدد ۳ گرایش دارند. دلیل این امر آن است که مقادیر $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ برای n های بزرگ، کوچک

و کوچکتر شده و مقدار آن به صفر نزدیک می‌شود.

حدس: $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - (\frac{1}{4})^n) = 3$ ، در این جا $L=3$.
برهان: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ عدد دلخواهی باشد باید M ی پیدا کنیم که

$$\left| \left(3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| < \varepsilon, \quad n \geq M \quad (1)$$

$$\left| \left(3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| < \left(\frac{1}{4} \right)^n \quad \text{داریم}$$

در نتیجه باید معلوم کنیم که از چه شماره ای به بعد نابرابری $(\frac{1}{4})^n < \varepsilon$ برقرار می گردد و همین شماره مورد نظر مجهول M را به دست می دهد. این نابرابری معادل نابرابری $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ است. از طرفین

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{لگاریتم در پایه ۲ می گیریم}$$

چون معلوم نیست که $\log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ عددی طبیعی باشد، M را به صورت زیر معرفی می کنیم.

$$M = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

و بدین ترتیب مجهول M به دست می آید.

احمد: از کجا معلوم است که این مقدار M در گزاره شرطی (۱) صدق می کند؟

دبیر: می توانیم M را آزمون نماییم، برای این کار فرض کنیم n عددی طبیعی و $n \geq M$ باید

نشان دهیم

$$\left| \left(3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| < \varepsilon \quad (2)$$

$$n \geq M = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1, \quad \text{چون } a_n = 3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{پس } [x] + 1 > x, \quad x, \text{ هر } x$$

$$2^n > 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\frac{1}{4^n} < \varepsilon \quad \text{با معکوس کردن جملات، جهت نابرابری تغییر می کند:}$$

$$\left(\frac{1}{4} \right)^n < \varepsilon \quad \text{و یا}$$


$$\left| \left(3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| = \left(\frac{1}{4} \right)^n < \varepsilon \quad \text{اما}$$

یعنی برای هر n که $n \geq M$ ، نابرابری (۲) برقرار است.

محسن: نیازی به آزمایش M نیست زیرا برای یافتن M ، همه عملیات برگشت پذیرند.

دبیر: درست است، اگر به برگشت پذیری عملیات و کار با نابرابری‌ها توجه بکنید لزومی به آزمایش M به دست آمده نمی‌باشد.

❖ مثال: آیا دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ همگراست؟

حل: برخی مقادیر این دنباله را بررسی می‌کنیم. 

$$n = 1, a_1 = \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

$$n = 2, a_2 = \sin \pi = 0$$

$$n = 3, a_3 = \sin \frac{3\pi}{4} = -1$$

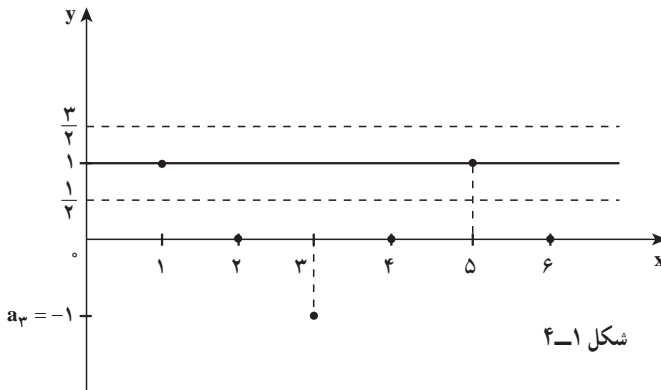
$$n = 4, a_4 = \sin 2\pi = 0$$

$$n = 5, a_5 = \sin \frac{5\pi}{4} = -1$$

با ادامه محاسبات ملاحظه می‌کنیم که مقدارهای این دنباله منحصر به اعداد 1 و 0 و -1 هستند پس این دنباله نمی‌تواند همگرا بوده باشد.

احمد: بسیاری از جملات دنباله برابر 1 بوده و لذا در 1 مجتمع می‌شوند، آیا ممکن نیست که دنباله همگرا به عدد 1 باشد.

دبیر: خیر. در این مورد ساده‌ترین راه استفاده از نمودار دنباله است و کافی است بازه‌ای مانند $(\frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4})$ یعنی نواری به مرکز 1 و به شعاع $\frac{1}{4} = \epsilon$ را حول خط $y=1$ در نظر بگیریم (شکل ۴-۱)



هرقدر M را بزرگ اختیار کنیم، $n \geq M$ را می‌توان به صورت $n = 2k$ در نظر گرفت و لذا
 $a_{2k} = \sin_{k\pi} = 0$ یعنی تعداد زیادی از جملات که با شماره زوج هستند خارج از بازه $(1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$
 قرار می‌گیرند.

احمد: اما تعداد زیادی از جملات دنباله که با شماره فرد هستند برابر ۱ بوده و لذا در بازه
 $(1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$ هستند.

دبیر: درست است. اما اگر بخواهد تساوی حدی $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{2} = 1$ اتفاق بیفتد باید نظیر
 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ که در اینجا $\varepsilon = \frac{1}{p}$ ، طبق تعریف عدد طبیعی M یافت شود که برای هر $n \geq M$ ،
 $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ (و یا $|a_n - 1| < \varepsilon$)

توجه کنید که این یک حکم کلی است: برای هر n که $n \geq M$ باید نابرابری برقرار باشد. درحالی
 که گفته شد هرقدر که M را اختیار کنیم n هایی هست، $n = 2k$ که $n \geq M$ اما $|a_n - 1| \geq \varepsilon = \frac{1}{p}$ زیرا
 $a_n \notin (1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$ ، و این با تعریف همگرایی در تناقض است.

مسائل

۱- ابتدا حد دنباله $\left\{ \frac{n-1}{n} \right\}_{n=1}$ را حدس بزنید و سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.

۲- فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}$ یک دنباله همگرا باشد. همچنین فرض کنیم K عدد صحیح و ثابت
 است به قسمی که $n+k \geq 1$ ، دنباله $\{b_n\}_{n=1}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $b_n = a_{n+k}$ برای مثال هرگاه
 $k=2$ و $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ باشد، دنباله $\{b_n\}$ چنین است:

$$b_1 = a_3, b_2 = a_4, b_3 = a_5, \dots, b_n = a_{n+2}, \dots$$

$$a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n+2}, \dots$$

یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \text{ و آنگاه } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ ثابت کنید هرگاه}$$

۳- کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست. آنهایی را که فکر می‌کنید همگرا نیستند، واگرایی
 دنباله را توضیح دهید.

$$\left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}_{n=1} \quad (\text{الف}) \quad \left\{ 3^n \right\}_{n=1} \quad (\text{ب}) \quad \left\{ \log n \right\}_{n=1} \quad (\text{ج}) \quad \left\{ \log \frac{1}{n} \right\}_{n=1} \quad (\text{د})$$

کسانی که مفهوم حد دنباله و حد توابع را به درستی درک کنند ریاضیات را بهتر درک می‌کنند. (استاد دکتر غلامحسین مصاحب ۱۳۵۸-۱۲۸۹).

۱-۶- دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$

دنباله‌های واگرا را به دو دسته می‌توان تقسیم‌بندی کرد:

دنباله‌هایی مانند $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ که برای آنها هیچ عدد حقیقی، و $\pm\infty$ یافت نمی‌شود به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

دنباله‌های واگرایی مانند $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ گرچه جملات دنباله، برای n های بزرگ، حول یک عدد

حقیقی تجمع ندارند، لیکن دنباله به نوعی خوش‌رفتار است!

ادعای ما از خوش‌رفتاری این دنباله چیست؟

وقتی برای n های بزرگ جملات دنباله را بررسی می‌کنیم (با مقداردهی به n) ملاحظه می‌کنیم

که مقادیر جملات از هر عدد حقیقی که بخواهیم بزرگتر می‌شوند و این یک نوع خوش‌رفتاریست!

مثلاً هرگاه بخواهیم $2n > 10^6$ کافی است $n > 500,000$

هرگاه بخواهیم $2n > 10^8$ کافی است $n > 50,000,000$

معنی این گزاره شرطی آن است که جملات دنباله از شماره $50,000,000$ بعد از عدد

(از پیش تعیین شده) $100,000,000$ بزرگترند، زیرا از $n > 50,000,000$ نتیجه می‌گیریم که

$$2n > 100,000,000$$

به طور کلی فرض کنیم k عدد حقیقی کاملاً دلخواهی باشد برای آنکه $2n > k$ کافی است $n > \frac{k}{2}$

و چون می‌خواهیم n طبیعی باشد (شماره جملات) کافی است که $n \geq \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ اختیار کنیم زیرا واضح

$$\text{است که } \left[\frac{k}{2}\right] + 1 > \frac{k}{2}$$

حال می‌توانیم تعریف خاصی از واگرایی ارائه دهیم.

تعریف: گوئیم دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا به ∞ (یا $+\infty$) است هرگاه گزاره منطقی زیر برقرار

باشد.

برای هر عدد حقیقی مثبت K ، عددی طبیعی مانند M یافت شود به قسمتی که هرگاه

$$a_n > K, n \geq M$$

در این صورت می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

به زبان ساده واگرایی به ∞ دلالت بر آن دارد که جملات دنباله بزرگ و بزرگتر می‌شوند به نحوی که برای هر عدد حقیقی (بزرگ) k ، از شماره‌ای به بعد همه جملات از k بزرگترند.

نکته‌ای که فوراً از واگرایی به ∞ حاصل می‌شود این است که هرگاه تساوی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ اتفاق بیفتد، جملات دنباله، از جایی به بعد الزاماً مثبت‌اند، نه تنها مثبت‌اند بلکه بزرگ و بزرگتر می‌شوند و به صورتی مجازی می‌توان گفت که در حول و حوش ∞ گرد می‌آیند!

مشابه وضعیت فوق وقتی است، که جملات دنباله، از جایی به بعد منفی‌اند، لیکن از نظر قدرمطلق بزرگ و بزرگتر می‌شوند.

تعریف: گوئیم دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا به $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ هرگاه گزاره زیر برقرار باشد.

برای هر عدد حقیقی منفی K ، عدد طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $n \geq M$ آنگاه $a_n < K$

پس هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ اتفاق افتد جملات دنباله می‌بایست از جایی به بعد منفی بوده و از نظر قدرمطلق بزرگ و بزرگتر شوند.

پرسش: آیا دنباله‌ای که جملات آن به صورت نوسانی مثبت و منفی می‌شوند می‌تواند واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ باشد؟

تمرین در کلاس

ابتدا با حدسیه‌سازی مشخص کنید که کدامیک از دنباله‌ها واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ است و سپس حدس خود را ثابت کنید.

$$\left\{ \frac{1}{1.6^n} (n+1) \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (۳) \qquad \{ 1000 - n^2 \}_{n=1}^{\infty} \quad (۲) \qquad \{ n^2 \}_{n=1}^{\infty} \quad (۱)$$

برای نمونه و راهنمایی به (۱) می‌پردازیم

وقتی n مقادیر بزرگ اختیار می‌کند، قطعاً n^2 نیز بزرگتر می‌شود، در نتیجه حدسمان این است که $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ (۱)

❖ **برهان (۱):** فرض کنیم $K > 0$ عدد مثبت دلخواهی باشد. باید نشان دهیم از شماره ای

به بعد $n^2 > K$ ، پس شماره ای مانند M است که هرگاه $n \geq M$ ، $n^2 > K$ در اینجا K معلوم مسأله است.

اما نامساوی $n^2 > k$ معادل $n > \sqrt{k}$ می باشد. می توانیم شماره M مجهول را $M = \lceil \sqrt{k} \rceil + 1$

اختیار کنیم. اکنون می توانیم حکم مسأله را آزمون نماییم: فرض کنیم $n \geq \lceil \sqrt{k} \rceil + 1$ پس $n > \sqrt{k}$ در نتیجه $n^2 > K$

$$a_n = n^2 > K$$

و یا

یک بار دیگر حل مسأله را به اختصار مرور می کنیم.

ادعا داشتیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ ، برای اثبات این ادعا، می بایست ثابت کنیم (*) برای هر

عدد $K > 0$ ، M بی هست که هرگاه $n \geq M$ ، $n^2 > k$ در اثبات (*)، k معلوم و M مجهول است. M باید

چنان پیدا شود که برای هر $n \geq M$ ، $n^2 > k$

با استفاده از خواص نامساوی ها از نامساوی $n^2 > K$ ، که مطلوب ماست، راه افتادیم و به

$$M = \lceil \sqrt{k} \rceil + 1 \text{ به عنوان شماره مجهول رسیدیم.}$$

یادتان باشد، که در حل مسأله های مربوط به حد دنباله ها:

استفاده از خواص نابرابری ها و درک صحیح گزاره های شرطی اگر ... آنگاه در

یادگیری حسابان نقش اساسی دارد.

مسائل

۱- ثابت کنید الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n} = \infty$

ب) دنباله $\left\{ (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n} \right\}$ نه به $+\infty$ و نه به $-\infty$ واگراست.

۲- ثابت کنید هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

۳- فرض کنیم همواره $a_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

۴- فرض کنیم همواره $a_n < 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

$$c_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 7}, b_n = \frac{n^2 - 1}{6n^3 + 1}, a_n = \frac{5n^2 - 3n + 11}{2n + 1} \text{ فرض کنیم}$$

دنباله‌هایی از اعداد باشند. ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{2}$$

۱-۲- اصل موضوع تمامیت

مطالعه حد دنباله‌ها ارتباط تنگاتنگی با ویژگی‌های مجموعه اعداد حقیقی یعنی R دارد. پس از کشف نظریه حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط دانشمندان آلمانی و انگلیسی در قرن هفدهم ناسامانی‌هایی در برخی موارد و نتایج آن بروز کرد. ریاضیدانان چندی در رفع این ناسامانی‌ها تلاش کردند و سرانجام پس از طی بیش از یک قرن و ایراشتراس توانست به رفع آن نایل شود. و ایراشتراس دریافت که صورت‌بندی دقیق و منطقی بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بر شناخت عمیق‌تر دستگاه اعداد حقیقی استوار است. اصل تمامیت یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های R است که دستگاه اعداد گویا، یعنی Q ، فاقد آن است، گرچه Q همه خواص جبری و ترتیبی مربوط به R را داراست. در این بخش قصدمان این نیست تا نقص Q را بررسی کنیم، لیکن به دلیل نیاز به استفاده از اصل تمامیت، این اصل را بیان خواهیم کرد. اصل تمامیت، همانند بیشتر اصول دیگر، گرچه به لحاظ شهودی درکی ساده دارد، اما به لحاظ نظری اثبات آن ناممکن جلوه می‌کند.

ابتدا دو ویژگی در باب زیر مجموعه‌های R بیان می‌کنیم که منبعت از رابطه ترتیبی روی R می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم A یک زیرمجموعه ناتهی R باشد.

تعریف ۱: عدد حقیقی U را یک کران بالای A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ ، $x \leq U$.

$b \in R$ را کوچکترین کران بالای A می‌نامیم هرگاه a یک کران بالای A بوده و برای هر کران بالای دیگر A مانند U ، $a \leq U$.

مشابه‌ها می‌توانیم از پایین به مجموعه A نگاه کنیم:

تعریف ۲: عدد حقیقی V را یک کران پایین A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ ، $v \leq x$.

$b \in R$ را بزرگترین کران پایین A نامیم هرگاه b یک کران پایین A بوده و برای هر کران پایین

دیگر A مانند v ، $v \leq b$.

کوچکترین کران بالا را سوپریموم و بزرگترین کران پایین را اینفیموم می‌نامند.
 دقت کنید که تعریف ۲ چگونه از روی تعریف ۱ ساخته شده است!
 برای مثال، فرض کنیم $A = [1, 2]$: در این صورت ۳ یک کران بالای A است.
 $3/5$ نیز یک کران بالای A است.
 $2/5$ چطور؟ A چند کران بالا دارد؟

کوچکترین کران بالای A کدام است؟ آری $a=2$ کوچکترین کران بالای A است.
 مشابهاً به آسانی معلوم است که $b=1$ بزرگترین کران پایین A است. در این مثال هم a و هم b
 به A تعلق دارند، اما ممکن است کوچکترین کران بالا و یا بزرگترین کران پایین یک مجموعه به آن
 مجموعه تعلق نداشته باشند.

هرگاه $B = (1, 2)$ (بازه باز) آنگاه کوچکترین کران بالای B برابر ۲ و بزرگترین کران پایین B نیز
 برابر ۱ است درحالی که هیچ‌یک به B تعلق ندارند. (چرا؟)
 سؤال: آیا همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی R دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین
 هستند؟ نظرتان را در مورد $A = [1, +\infty)$ و $B = (-\infty, 2)$ بیان کنید.

تمرین در کلاس

- الف) در مورد احکام زیر فکر کنید، می‌توانید با مثال‌ها کار کنید. اگر فکر می‌کنید درست‌اند
 آنها را توضیح دهید. و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند، نیز توضیح دهید.
 ۱- هر مجموعه از بالا کراندار دارای کوچکترین کران بالا است.
 ۲- هر مجموعه از پایین کراندار دارای بزرگترین کران پایین است.
 ۳- هرگاه A یک مجموعه کراندار و ناتهی باشد هم کوچکترین کران بالا و هم بزرگترین
 کران پایین دارد.
 ۴- هرگاه $A \subseteq B$ و $U \in B$ یک کران بالای B باشد، U یک کران بالای A نیز می‌باشد.
 ۵- حکمی نظیر ۴ در باب کران‌های پایین بیان کنید.

اکنون اصل موضوع تمامیت را بیان می‌کنیم، باید توجه داشت «اصل موضوع» و یا اختصاراً
 «اصل» در ریاضیات به گزاره‌ای گفته می‌شود که بدون اثبات پذیرفته می‌شود اصل موضوع
 تمامیت در باب اعداد حقیقی.

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا است.

این اصل معادل است با اصل زیر :

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگترین کران پایین است.

اکنون با استفاده از این اصل به اثبات مهمترین قضیه این فصل می پردازیم

❖ **قضیه ۱:** فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود دارد. به عبارت دیگر هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست.

❖ **برهان:** قرار می دهیم $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، یعنی S مجموعه مقادیر عددی جملات دنباله مورد بحث است پس $S \neq \emptyset$ و دارای کران بالایی مانند K است. بنابر اصل موضوع تمامیت S دارای کوچکترین کران بالاست. این کوچکترین کران بالای S را L می نامیم. نشان می دهیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

برای هر n ، $a_n \leq L$ ، حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$ عدد دلخواهی باشد. پس $L - \varepsilon$ یک کران بالای S نیست، زیرا $L - \varepsilon < L$ و L کوچکترین کران بالای S فرض شده است.

چون $L - \varepsilon$ کران بالای S نیست، حداقل یک عضو S مانند a_N وجود دارد. به طوری که $L - \varepsilon < a_N$. حال برای هر $n \geq N$.

$$a_n \geq a_N > L - \varepsilon$$

از طرف دیگر $a_n < L$ در نتیجه برای هر $n \geq N$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

یعنی برای هر $n \geq N$ ،

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، همچنان که ادعا شده است.

قضیه فوق یک زوج دارد که از تبدیل مفاهیم موجود در قضیه به مفاهیم زوج آن به دست می آید!

آن را بیان می کنیم.

❖ **قضیه ۲:** هر دنباله نزولی و کراندار از پایین همگراست.

❖ **مثال:** ثابت کنید دنباله $\left\{ \sin \frac{\pi}{2n} \right\}_{n=1}$ همگراست.

حل: با توجه به شناختی از رفتار تابع $y = \sin \frac{\pi}{2n}$ به ویژه در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ داریم، معلوم است که این دنباله یک دنباله نزولی است. به علاوه برای هر n ، $0 < \sin \frac{\pi}{2n}$ پس عدد 0 یک کران پایین این دنباله است. بنابراین بر طبق قضیه ۲، این دنباله همگراست.

تمرین در کلاس

ابتدا نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا هستند

$$\left\{ 1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right\} \text{ (الف)} \quad \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\} \text{ (ب)}$$

سپس حد آنها را حساب کنید.

این بخش را با یک قضیه مهم به پایان می‌رسانیم که در حسابان و آنالیز نقشی کلیدی دارد.

❖ **قضیه:** هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویا است.

❖ **اثبات:** فرض کنیم u عدد حقیقی دلخواهی باشد. دو حالت وجود دارد.

حالت اول: u عددی گویا است. قرار می‌دهیم $u_n = u$ ، (برای هر $n \in \mathbb{N}$)

پس $\{u_n\}$ دنباله‌ای ثابت و متشکل از اعداد گویای U بوده و معلوم است که $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

حالت دوم: $0 < u < \infty$ عددی گنگ است، بسط اعشاری u را در نظر می‌گیریم.

$$u = u_0 . u_1 u_2 u_3 \dots u_n \dots$$

که در آن u_0 جزء صحیح u بوده و عددی صحیح است. چون u گنگ است بسط اعشاری u

نامتناهی و البته نامنظم می‌باشد. قرار می‌دهیم.

$$r_1 = U_0 / U_1$$

$$r_2 = U_0 / U_1 U_2$$

⋮

$$r_n = U_0 / U_1 U_2 \dots U_n$$

⋮

لذا هر r_n عددی گویا است زیرا بسط اعشاری مختوم دارد: به علاوه

$$0 < u - r_n = \underbrace{0.0\dots0}_{n \text{ بار صفر}} U_{n+1} U_{n+2} \dots$$