

# گراف‌ها و کاربردهای آن



## مقدمه

در این قسمت که شامل سه فصل است با الفبای نظریه گراف‌ها و کاربردهایش آشنا می‌شویم. عمدتاً از طبیعت جذاب گراف‌ها استفاده می‌کنیم، شهود را به کار می‌بندیم و با مثال‌های ملموس و معماهای گوناگون مفاهیم را روشن می‌سازیم. در عین حال در بست تسلیم شهود نمی‌شویم و در مواردی اثبات دقیق قضایا را ارائه می‌دهیم. گاه از کاربردهایی استفاده می‌کنیم که ممکن است تاحدی بدیهی به نظر برسند، اما هرگز معماها و مسائل ظاهراً کوچک را که انگیزه بخش‌اند دست‌کم نمی‌گیریم، زیرا در موارد بسیاری این‌گونه مسائل سرآغاز ایده‌ها و حتی نظریه‌های مهم ریاضی بوده‌اند. از دانش پژوهانی که دوره دبیرستان را پشت سر گذاشته‌اند انتظار داریم ذهن پویای خود را به کار اندازند و برای پاسخگویی به سؤال‌های عدیده‌ای که خود طرح می‌کنند، یاپرسش‌هایی که در متن مطرح می‌شوند ابتدا مثال‌های ساده و بعد رده‌های خاص گراف‌ها را مورد توجه قرار دهند و مطمئن باشند که در این زمینه می‌توانند مسائلی را مطرح کنند که در عین سادگی بیان، بزرگ‌ترین ریاضیدانان نیز از حل آنها عاجز باشند.

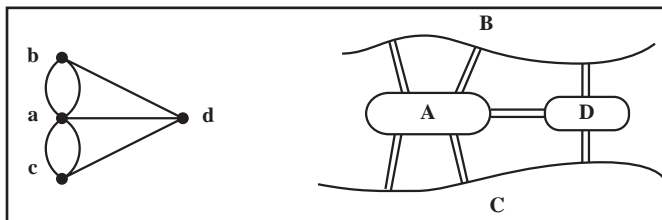


# آشنایی با گراف‌ها

در این فصل با بیان چند مثال زمینه را برای تعریف انواع گراف‌ها آماده می‌کنیم و آن را با ارائه چند تعریف و قرارداد پایان می‌دهیم.

## ۱-۱- چند مثال

در قرن هیجدهم میلادی شهر کونیگسبرگ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود. در آن زمان هفت پل این چهار منطقه را به هم وصل می‌کردند. معمای زیر سال‌ها شهروندان را سرگرم کرده بود: آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق در شهر گشتی زد، از هر پل یک بار و تنها یک بار گذشت، و به مکان اول بازگشت؟ اوپلر در سال ۱۷۳۶ با حل مسأله پل‌های کونیگسبرگ نظریه گراف‌ها را بنیان گذاشت. وی به هر یک از این چهار منطقه نقطه‌ای از صفحه را تخصیص داد و به ازای هر پل بین دو منطقه، پاره خطی یا کمانی بین دو نقطه متناظر با آنها رسم کرد. بدین ترتیب مطابق شکل ۱ به مدلی ریاضی دست یافت و به سادگی پاسخ معما را که منفی است دریافت.



شکل ۱- نمای شهر کونیگسبرگ و گراف مربوط به آن

امروزه این مدل را یک **گراف** یا، به سبب وجود «چند» به اصطلاح خط بین دو نقطه، به طور دقیق تر یک **گراف چندگانه** می نامند. اینک ما هم می توانیم مسائل مختلفی را به زبان نظریه گراف با بیان کنیم.

**مثال ۱:** فرض می کنیم پنج تیم به نام های  $a, b, c, d, e$  و باید دو به دو با یکدیگر مسابقه بدهند.

پس از چندی می بینیم که:

$a$  با  $b, c, e$  مسابقه داده (و بر همگی پیروز شده است).

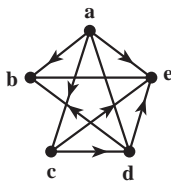
$b$  با  $a$  و  $d$  روبه رو شده (و از هر دو شکست خورده است).

$c$  با  $a, b, d, e$  مسابقه داده (بر  $d$  و  $e$  پیروز شده و از  $a$  شکست خورده است).

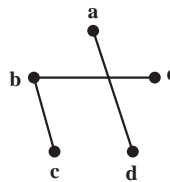
$d$  با  $b, c, e$  بازی کرده (و  $b$  و  $e$  را شکست داده و از  $c$  شکست خورده است).

$e$  با  $a, b, c, d$  مسابقه داده است (پیروزی ها و شکست های  $e$  قبلاً مشخص شده اند).

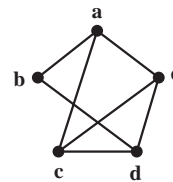
این وضعیت را می توانیم به صورت یک نمودار در صفحه مشخص کنیم. به ازای هر تیم یک نقطه در نظر می گیریم و دو نقطه را با پاره خط یا کمائی به هم وصل می کنیم هرگاه تیم های متناظر با هم مسابقه داده باشند. شکل ۲ مدل مربوط به این وضعیت را نشان می دهد.



شکل ۴



شکل ۳

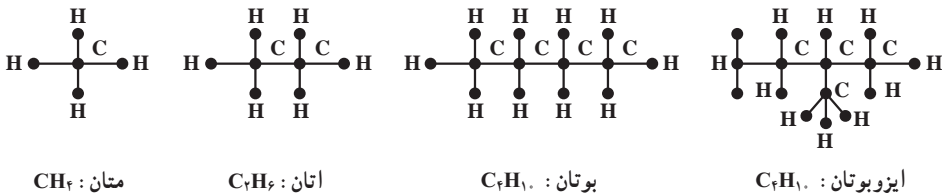


شکل ۲

### سه شکل مربوط به مثال ۱

ممکن است به این وضعیت نمودار دیگری هم نسبت داد و آن نمودار مربوط به مسابقات انجام نشده است. برای این کار باز هم به ازای هر تیم یک نقطه در نظر می گیریم و این بار دو نقطه را با پاره خطی به هم وصل می کنیم هرگاه دو تیم مربوط با هم بازی نکرده باشند. نمودار مربوط به این وضعیت که در شکل ۳ نمایش داده شده است نشان می دهد که برای تکمیل این دور از مسابقات سه مسابقه دیگر باید برگزار شوند. فرض می کنیم که این مسابقات حتماً باید برنده هم داشته باشند. (برندگان را قبلاً مشخص کرده ایم). لذا می توانیم هنگام رسم شکل ۲ به جای مثلاً پاره خط، پاره خطی جهت دار رسم کنیم که جهت آن از برنده به سوی بازنده باشد. با این ترتیب شکل ۴ به دست می آید. این گراف نشان می دهد که مثلاً تیم  $e$  از سه تیم  $a, c, d$  شکست خورده و هنوز برنده نشده است. چنین گرافی را **گراف جهت دار** می نامیم.

مثال ۲: در درس شیمی دیده ایم که به هیدروکربن های اشباع شده نمودارهایی نسبت می دهند تا ساختار شیمیایی آنها را به نمایش بگذارند. در شکل ۵ چند نمونه از این هیدروکربن ها را که فرمول عمومی آنها  $C_nH_{2n+2}$  است می بینید.



شکل ۵ - چند نمونه از هیدروکربن ها

مثلاً نمودار مربوط به اتان که چگونگی پیوند کربن ها و هیدروژن ها را نشان می دهد ظرفیت کربن و هیدروژن را نیز مشخص می کند. در شکل ۵ می بینیم که با چهار کربن و ده هیدروژن دو هیدروکربن اشباع شده «مختلف» وجود دارند. بیش از دو تا چی؟ طبیعتاً پاسخ به این سؤال برای  $n$  های بزرگتر از ۴ آسان نیست. ▲

مثال ۳: شرکتی مایل است برای چهار شغل تمام وقت  $A_1, A_2, A_3, A_4$  کارمند استخدام کند. پنج نفر به نام های  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  برای تصدی این شغل ها داوطلب می شوند که طبق فهرست زیر برخی صلاحیت تصدی بیش از یک کار را دارند:

$B_1$  می تواند سه شغل  $A_1, A_2, A_3$  را اداره کند.

$B_2$  می تواند دو شغل  $A_3$  و  $A_4$  را بپذیرد.

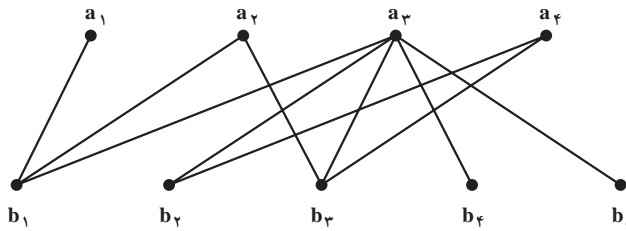
$B_3$  قادر است هر یک از شغل های  $A_1, A_2, A_3$  را انجام دهد.

$B_4$  و  $B_5$  هم می توانند تنها متصدی شغل  $A_3$  باشند.

آیا با این پنج نفر، شرکت می تواند برای پست های خالی متصدی پیدا کند؟ این مسأله چند جواب

دارد؟

برای بررسی این وضعیت باز هم یک مدل می سازیم. به این صورت که در صفحه، چهار نقطه متناظر با چهار شغل مورد نظر و پنج نقطه دیگر متناظر با پنج داوطلب مذکور در نظر می گیریم و مطابق شکل ۶ هر نقطه  $b_i, 1 \leq i \leq 5$  را با پاره خط یا پاره خط هایی به نقاطی چون  $a_j, 1 \leq j \leq 4$ ، در صورتی وصل می کنیم که داوطلب  $B_i$  که با نقطه  $b_i$  در تناظر است صلاحیت انجام شغل  $A_j$  را که با نقطه  $a_j$  در تناظر است داشته باشد.



شکل ۶- گراف مربوط به مثال ۳

واضح است که برای تصدی  $A_1$  تنها یک داوطلب وجود دارد و لذا این شغل به  $B_1$  تخصیص داده می‌شود. حال تنها  $B_2$  برای تصدی  $A_2$  باقی می‌ماند. چون  $B_2$  و  $B_3$  تنها داوطلبان احراز پست  $A_2$  هستند و  $B_2$  قبلاً به کار  $A_2$  گماشته شده است،  $A_2$  باید الزاماً به  $B_3$  سپرده شود. حال برای تصدی  $A_3$  دو داوطلب باقی می‌مانند:  $B_4$  و  $B_5$ . پس این مسأله تنها دو جواب دارد و شرکت مجبور است  $B_1$  را به کار  $A_1$ ،  $B_2$  را به کار  $A_2$ ،  $B_3$  را به کار  $A_3$ ،  $B_4$  یا  $B_5$  را به کار  $A_3$  بگمارد. ▲

## ۱-۲- چند تعریف و قرارداد

در زندگی پیچیدهٔ امروزی به مسائل فراوانی برمی‌خوریم که برای حل آنها مجبوریم از مدلی ریاضی مانند گراف استفاده کنیم. لذا لازم است این وضعیت‌ها را به صورت مجرد درآوریم و با الهام گرفتن از همین مسائل به بررسی ویژگی‌های این مجردات بپردازیم. نظریهٔ گراف‌ها به همین ترتیب به وجود آمده و به سرعت در حال رشد و شکوفایی است.

همان‌گونه که دیدیم گراف‌ها انواع گوناگون دارند. مثلاً برخی جهت‌دار و برخی چندگانه‌اند. برخی هم نامتناهی‌اند، به این معنا که بی‌نهایت نقطه یا بی‌نهایت خط دارند. اینک در بین انواع گراف‌ها تعریف رسمی ساده‌ترین نوع را ارائه می‌کنیم. در این قسمت تقریباً همه جا سروکار ما با همین گراف‌های (ساده) است.

**تعریف: گراف (ساده)**  $G$  زوجی مرتب چون  $(V, E)$  است که در آن  $V$  مجموعه‌ای متناهی و ناتمامی است و  $E$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی  $V$  است. اعضای  $V$  را رأس‌های  $G$  و اعضای  $E$  را یال‌های  $G$  می‌نامیم. مجموعه رأس‌های  $G$  را با  $V(G)$  و مجموعه یال‌های آن را با  $E(G)$  هم نمایش می‌دهیم.

به یاد داشته باشید که هر عضو یک مجموعه تنها یک بار در آن ظاهر می‌شود. مثلاً نمی‌نویسیم

$$\{a, a, a, b, b\} \text{ بلکه می‌نویسیم } \{a, b\}.$$

**مثال ۴:** اگر  $V = \{a, b, c, d, e\}$  و  $E = \{\{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}\}$  آن‌گاه بنا به تعریف،

$G = (V, E)$  گرافی است که پنج رأس و سه یال دارد. ▲

**قرار داد:** اگر در گراف  $G$ ،  $u, v \in V(G)$  و  $\{u, v\} \in E(G)$ ، برای سادگی، به جای  $\{u, v\}$  می نویسیم  $uv$  و می گوئیم در  $G$  دو رأس  $u$  و  $v$  مجاورند. در این صورت گاهی گفته می شود رأس  $u$  (همچنین رأس  $v$ ) بر یال  $uv$  واقع است. اصطلاح رایج دیگر این است که در  $G$  یال  $uv$  از رأس  $u$  (همچنین از رأس  $v$ ) می گذرد یا مرور می کند. رأس های  $u$  و  $v$  دو سر یال  $uv$  نام دارند.

**مثال ۵:** اگر  $V = \{a, b, c, d, e\}$  و  $E = \{ab, ac, ae, bd, cd, ce, de\}$  آن گاه بنا به تعریف، گرافی  $G=(V, E)$  است که پنج رأس و هفت یال دارد. در این گراف مثلاً دو رأس  $a$  و  $b$  مجاورند زیرا  $ab \in E$  ولی دو رأس  $b$  و  $e$  مجاور نیستند، زیرا  $be \notin E$ . واضح است که در این گراف از رأس  $a$  سه یال و از رأس  $b$  دو یال می گذرد. ▲

توجه دارید که هر گراف را می توان با یک نمودار، موسوم به نمودار گراف، نیز نمایش داد. برای این کار به ازای هر رأس  $G$  نقطه یا دایره کوچک دلخواهی، مثلاً در صفحه، در نظر می گیریم و دو نقطه متمایز را با پاره خط یا کمانی به هم وصل می کنیم به شرطی که مجموعه متشکل از دو رأس متناظر با آن دو نقطه عضوی از  $E$  باشد. یک نمودار گراف مثال ۴ را در شکل ۳ و یک نمودار گراف مثال ۵ را در شکل ۲ نمایش داده ایم. شکل ۶ نموداری از گراف  $G=(V, E)$  را نمایش می دهد که در آن:

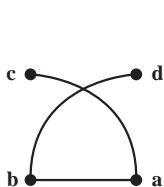
$$V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

$$E = \{a_1 b_1, a_2 b_1, a_3 b_3, a_4 b_1, a_4 b_2, a_3 b_3, a_3 b_4, a_3 b_5, a_4 b_2, a_4 b_3\}$$

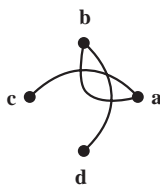
در این گراف از رأس  $a_3$  پنج یال مرور می کنند؛ ولی از هر یک از دو رأس  $a_1$  و  $b_5$  تنها یک یال می گذرد.

**مثال ۶:** اگر  $V(G) = \{a, b, c, d\}$  و  $E(G) = \{ab, ac, bd\}$  آن گاه  $G$  گرافی است که چهار رأس و سه یال دارد.

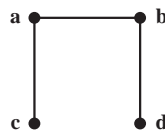
سه نمودار از این گراف را در شکل های زیر رسم کرده ایم.



شکل ۹



شکل ۸

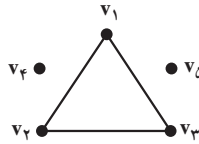


شکل ۷

واضح است که در شکل‌های ۸ و ۹ نقطه برخورد کمان‌های  $ac$  و  $bd$  متناظر با هیچ رأس این گراف نیست. ▲

برای راحتی گاهی نمودار گراف را با خود آن یکی می‌گیریم و به همین دلیل رأس را نقطه ویال را خط هم می‌نامیم. توجه دارید که نمودار گراف برای درک بهتر مطلب رسم می‌شود و باید حتی‌الامکان ساده باشد.

مثال ۷: فرض کنید گراف  $G$  با  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  و  $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$  داده شده است. آن‌گاه  $G$  پنج رأس و سه یال دارد. در این گراف مثلاً رأس  $v_4$  با هیچ رأس دیگر مجاور نیست. نمودار  $G$  به صورت زیر است که سه «بخش جدا از هم» دارد. ▲



شکل ۱۰- گراف مربوط به مثال ۷

مثال ۸: گراف مربوط به بوتان که در شکل ۵ رسم شده است ۱۴ رأس و ۱۳ یال دارد. این گراف تنها یک «بخش» دارد و در آن مثلاً رأسی وجود دارد که دقیقاً با چهار رأس دیگر مجاور است ولی به طور مثال رأسی وجود ندارد که دقیقاً با سه رأس دیگر مجاور باشد. ▲  
توجه کنید که اگر در تعریف گراف (ساده)  $G$  تغییر کوچکی بدهیم تعریف گراف جهت دار به دست می‌آید که کاربردهای فراوان دارد.

تعریف: گراف جهت دار  $G$  زوجی مرتب چون  $(V, E)$  است که در آن  $V$  مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و  $E$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه تمام زوج‌های مرتب متشکل از اعضای  $V$  است. می‌توانیم به هر گراف جهت دار هم نموداری نسبت دهیم. به عنوان مثال، اگر  $V = \{a, b, c, d, e\}$  و  $E = \{(a, b), (a, c), (a, e), (c, d), (c, e), (d, b), (d, e)\}$  آنگاه  $(V, E)$  گراف جهت داری است که نمودار آن در شکل ۴ نمایش داده شده است. توجه دارید که در یک گراف جهت دار به ازای هر  $u, v \in V$  با شرط  $u \neq v$  حداکثر دو به اصطلاح یال جهت دار یکی از  $u$  به  $v$  و دیگری از  $v$  به  $u$  وجود دارند.<sup>۱</sup>

۱- در تعریف گراف جهت دار بسیاری از مؤلفان  $E$  را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب متشکل از اعضای متمایز  $V$  می‌گیرند. بدانند که با این شرط مثلاً با ۲ رأس ۳ و با ۸ رأس ۸۴۸، ۱۹۲، ۳۵۹، ۱، ۷۹۳ گراف جهت دار «متفاوت» وجود دارند!

## ۱-۳- تمرین‌ها

۱- در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده،  $B_5$  قادر به انجام کار  $A_4$  نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟

۲- در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده،  $B_4$  قادر به انجام کار  $A_4$  نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟ (پاسخ ۴ است.)

۳- مسلماً دبیرستان شما در مسابقه‌های زیادی شرکت می‌کند. یکی از مسابقه‌ها را در نظر بگیرید و در پایان گراف یا گراف جهت‌دار مربوط به آن را مشخص کنید.

۴- گراف  $G=(V, E)$  با  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  و

$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_5v_6, v_5v_7\}$  را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

ب) اگر این رأس‌ها هفت شهر و این یال‌ها جاده‌های موجود بین این شهرها را نمایش دهند، آیا تنها با عبور از این جاده‌ها می‌توان از هر شهری به شهر دیگر سفر کرد؟

پ) این گراف از چند «بخش جدا از هم» تشکیل شده است؟ (پاسخ ۳ است.)

۵- در زبان عربی کلمه «شجر» به معنای درخت است و درخت گراف خاصی است که بعداً در فصل ۳ بررسی خواهد شد. درباره ارتباط بین «شجره نامۀ خانوادگی» و گراف‌ها چه می‌دانید؟ شجره‌نامۀ خانوادگی خود را رسم کنید.

۶- شش بازۀ باز  $(0, 2)$ ،  $(1, 4)$ ،  $(2, 5)$ ،  $(3, 4)$ ،  $(3, 8)$ ،  $(6, 9)$ ، شش بازۀ باز  $(0, 2)$  و  $(1, 4)$  تهی نیست رأس‌های مربوط باید مجاور باشند. اما چون اشتراک بازه‌های  $(0, 2)$  و  $(2, 5)$  تهی است رأس‌های مربوط به این دو بازه نباید مجاور باشند. (چنین گرافی را گراف بازه‌ها می‌نامیم.)  
الف) نمودار گراف بازه‌های داده شده را رسم کنید.

ب) با معرفی پنج بازۀ مناسب نشان دهید گراف شکل ۳ را می‌توان گراف بازه‌ها دانست.

پ) نشان دهید گراف شکل ۲ نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد؛ یعنی، پنج بازۀ باز نمی‌توان یافت که گراف مربوط به آنها، طبق تعریف، «همان» گراف شکل ۲ باشد.

توجه: گراف‌هایی که از بازه‌ها به دست می‌آیند در باستان‌شناسی، ژنتیک و در تحلیل ادبی کاربرد دارند. درک عمیق این کاربردها مستلزم آگاهی از زمینه‌های مربوط است.



## مجله ریاضی

می‌گویند در روزگاران پیش نقشه‌کش‌ها از این «واقعیت» آگاه بودند که هر نقشه جغرافیایی مسطح یا کروی را می‌توان با حداکثر چهاررنگ طوری رنگ کرد که مناطق «مجاور» رنگ‌های متفاوت داشته باشند. شاید هم مسأله چهاررنگ از تراوشات ذهن ریاضیدانان باشد. به هر تقدیر، نخستین مرجع مکتوب این مسأله نامه مورخ ۲۳ اکتبر ۱۸۵۲ میلادی، دموورگن به ویلیام همیلتن است. مسأله چهاررنگ که به «مرض» چهاررنگ هم شهرت یافت بیش از یک قرن به طور جدی ذهن بسیاری را به خود مشغول داشت و در نظریه گراف‌ها معادل‌های بسیاری برای آن مطرح شد. سرانجام در سال ۱۹۷۷ میلادی ک. اِپِل و و. هِنِکِن با استفاده از قضیه‌های فراوان و ۱۲۰۰ ساعت از وقت یکی از سریع‌ترین کامپیوترهای زمان این مسأله سرکش را مهار و «قضیه» چهاررنگ را «ثابت» کردند. اما، هنوز هم مرض چهاررنگ شیوع دارد و بسیاری به فکر ارائه اثباتی سنتی و حتی الامکان ساده برای آن هستند.