حد و پیوستگی

فصل ۵

جادهٔ نهبندان ـ شهداد

درس ۱

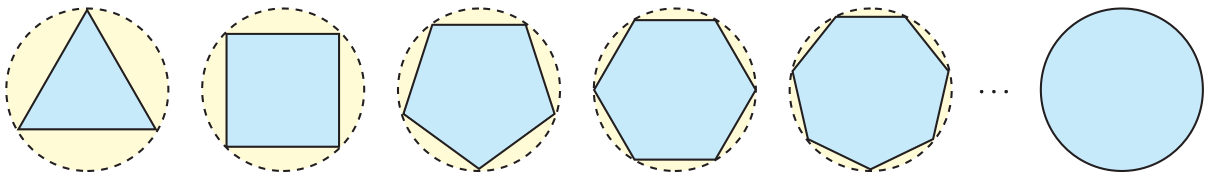
مفهوم حد و فرایندهای حدی

بیشتر پدیده‌های طبیعی و مسائل محیط پیرامون را می‌توان مدل‌سازی نمود و مدل ریاضی بسیاری از این پدیده‌ها، به‌صورت یک تابع درمی‌آید.

گاهی اوقات لازم است، برای تحلیل یک پدیده، رفتار تابع متناظر آن را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم. مفهوم «حد» ابزار مناسبی است که می‌تواند در تحلیل رفتار تابع به ما کمک شایانی بنماید.

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر π=۳/۱۴۱۵۹ در نظر بگیریم و مساحت nضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n\in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد... که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی های منتظم درون دایره (محاطی) را به هراندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

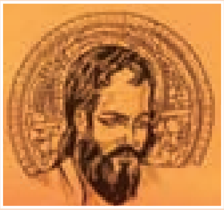
خواندنی

عدد π (پی) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. پی یکی از مشهورترین عددها در دنیای ریاضی است و با نماد π، یکی از حروف الفبای یونانی نشان داده می‌شود. ساده‌ترین و بهترین راه معرفی π این است :

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

π یک عدد گنگ است و در طول این ۳۷ قرن، دانشمندان زیادی سعی کرده‌اند مقدار دقیق آن را حساب کنند. قدیمی‌ترین محاسبهٔ به‌دست آمده، به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد مربوط می‌شود. این محاسبات روی پاپیروسی نوشته شده است که درحال حاضر، در موزه‌ای در «مسکو» نگهداری می‌شود. حدود ۲۴۰ سال قبل از میلاد، ارشمیدس اولین روش کلاسیک را برای تعیین مقدار تقریبی عدد π ارائه داد.

ارشمیدس با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی درون و بیرون یک دایره به شعاع واحد به محاسبه تقریبی عدد π پرداخت. او با ۶ضلعی منتظم شروع و مرتباً تعداد اضلاع را دو برابر کرد و با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی مقدار π را با تقریب بسیار خوبی ($۳/۲۱۵۰ > \pi > ۳/۱۰۵۸$) به‌دست آورد.



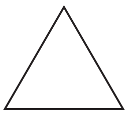
غیاث‌الدین جمشید کاشانی معروف به «الکاشی» در کتاب رسالهٔ محیطیه π را تا ۱۷ رقم پس از ممیز حساب کرده است.

اگر می‌خواهید عدد π را تا ده رقم اعشار به خاطر بسپارید تعداد حروف کلمات، در بیت دوم این شعر به شما کمک خواهد کرد :

گر کسی از تو بپرسد ره دانستن π پاسخی ده که هنرمند تو را آموزد
خرد و دانش و آگاهی دانشمندان   ره سرمنزل مقصود بما آموزد
۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹   ۲ ۶ ۵ ۳ ۵

$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ \dots$

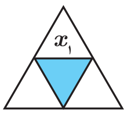
فعالیت



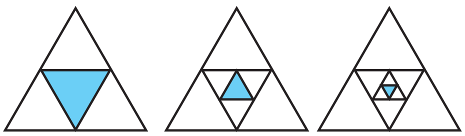
یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را $x_۱$ و اندازه محیط آن را $P_۱$ می‌نامیم.

در این صورت داریم : $x_۱ = \dots\dots$ و $P_۱ = \dots\dots$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله nام طول ضلع مثلث به‌وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید :



(۱) (۲) (۳)

x_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$			$\dots$	$\frac{۱}{۲^n}$
P_n	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$				$\dots$	

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x درنظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x) = ۳x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر تابع f، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

مثال : رفتار تابع f، با ضابطه $f(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ را در اطراف نقطه $a=۲$ بررسی نمایید.

حل : تابع f، به ازای هر عدد حقیقی x به جز $x=۲$ تعریف شده است. به ازای هر $x\neq ۲$، ضابطه تابع را می‌توان ساده کرد و به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

در جدول زیر، مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شوند، محاسبه کرده‌ایم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود

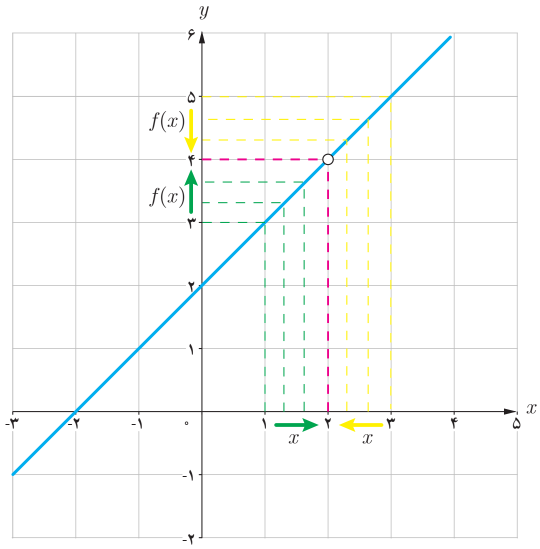
x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	?	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۲ (از راست و از چپ) مقادیر $f(x)$، به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.



درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می‌توان دید :

نمودار تابع f، خط راست $y=x+۲$ است که یک نقطه از آن، یعنی نقطه $(۲,۴)$ حذف شده است.

با وجود اینکه مقدار تابع در نقطهٔ ۲ تعریف نشده است ولی با توجه به نمودار تابع، وقتی x را با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۲ (اما مخالف ۲) به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر وقتی $x\to ۲$ (یعنی x به سمت ۲ میل می‌کند)، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. در این صورت می‌گوییم، حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود برابر ۴ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۴$$

در مثال بالا، رفتار تابعی مانند f را در اطراف نقطه‌ای مانند a بررسی و مشاهده کردیم که وقتی متغیر x به a نزدیک می‌شود مقادیر تابع f نیز به یک عدد مشخص، نزدیک می‌شوند. این مفهوم را «حدگیری» از تابع f در نقطه a می‌نامیم.

کار در کلاس

توابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x)=x+۳$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ و $h(x)=\begin{cases} x+۳ & x\neq ۳ \\ ۴ & x=۳ \end{cases}$ را درنظر بگیرید :

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید :

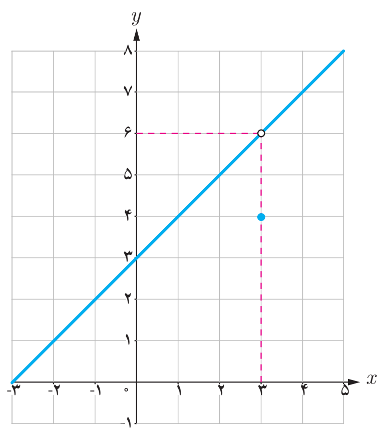
$h(۳)=\cdots\cdot$ $\qquad$ $g(۳)=\cdots\cdot$ $\qquad$ $f(۳)=\cdots\cdot$

۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.

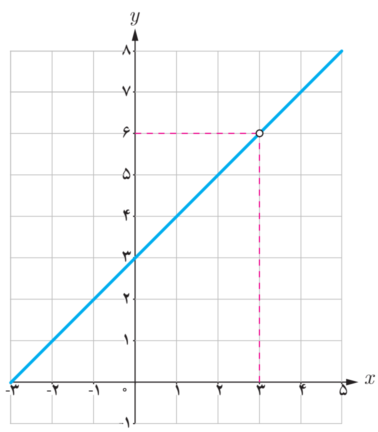
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	→	۳	←	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	?	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	....	....	....	....	→	?	←	....	....	....	....	....
$h(x)$	....	....	....	....	→	?	←	....	....	....	....	....

۳ نمودارهای توابع f ، g و h به‌صورت زیر رسم شده است.

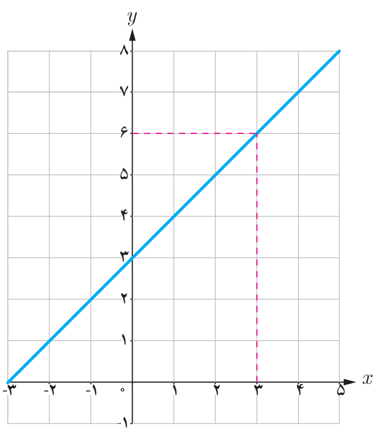
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.



نمودار h



نمودار g



نمودار f

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر . . . است به عبارت دیگر :

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = \cdots \qquad \lim_{x\to ۳} g(x) = \cdots \qquad \lim_{x\to ۳} h(x) = \cdots$$

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

از کار در کلاس قبل نتیجه می‌گیریم که :

الف) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف نشده باشد، اما حد این تابع وقتی x به a نزدیک می‌شود موجود باشد. (مانند تابع g در نقطه ۳)

ب) ممکن است یک تابع درنقطه a تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد، ولی مقدار این حد با مقدار تابع در a برابر نباشد. (مانند تابع h در نقطه ۳).

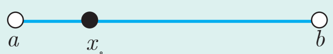
در حقیقت با اینکه سه تابع داده شده از نظر مقدار در نقطه ۳ با هم متفاوت‌اند و حتی تابع g در نقطه ۳ تعریف نشده است ولی در اطراف نقطه ۳ رفتار کاملاً یکسانی دارند، یعنی حد هر سه تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود برابر با ۶ است.

با توجه به مفهوم حد، به نظر می‌رسد برای آنکه بتوان مقادیر متغیر را از دو طرف (چپ و راست) به عددی مانند a، نزدیک نمود، کافی است تابع موردنظر در یک بازهٔ باز شامل a تعریف شده باشد. البته در محاسبه حد تابع در نقطه a، رفتار تابع در دو طرف نقطه a اهمیت دارد، پس لزومی ندارد خود a در دامنه تابع باشد. بنابراین لازم است به تعریف همسایگی یک نقطه که یکی از مفاهیم اساسی برای تعریف حد تابع در یک نقطه می‌باشد بپردازیم :

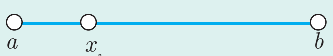
تعریف

اگر $x_\circ$ یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل $x_\circ$ را یک همسایگی $x_\circ$ می‌نامیم.

بنابراین اگر $x_\circ \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_\circ$ است.



اگر نقطه $x_\circ$ را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_\circ\}$ را همسایگی محذوف $x_\circ$ می‌نامیم.



به همین ترتیب :

اگر $r>\circ$، در این صورت بازه $(x_\circ, x_\circ+r)$ را یک همسایگی راست و بازهٔ $(x_\circ-r\,,\,x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

۲ آیا بازهٔ (۲,۳) یک همسایگی ۲ می‌باشد؟ چرا؟

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

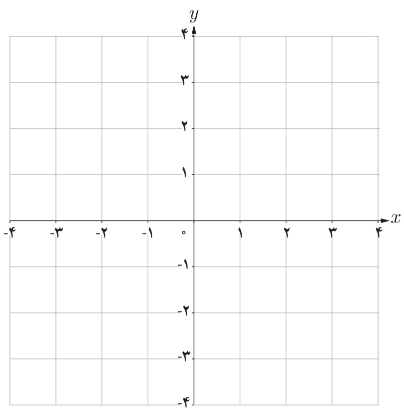
کار در کلاس

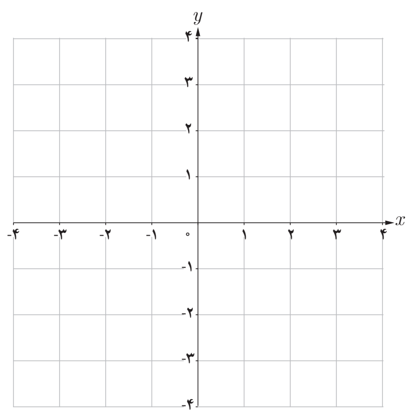
۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲− تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

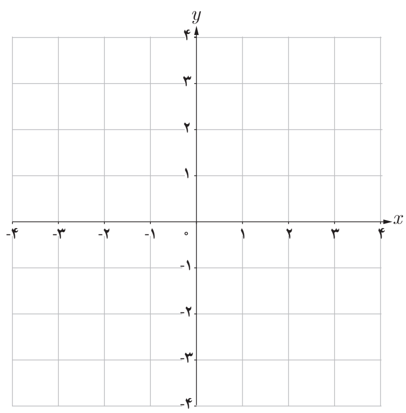
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

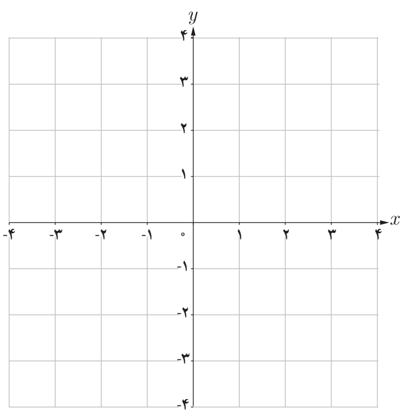
۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳)\neq g(۳)$.

۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.


(۱)

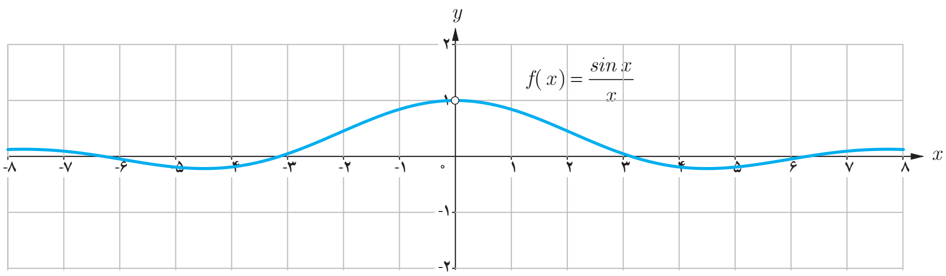

(۴)


(۳)


(۲)

x	$\frac{\sin x}{x}$
±۱	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
±۰/۵	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
±۰/۴	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
±۰/۳	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
±۰/۲	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
±۰/۱	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
±۰/۰۵	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
±۰/۰۱	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
±۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
±۰/۰۰۱	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳

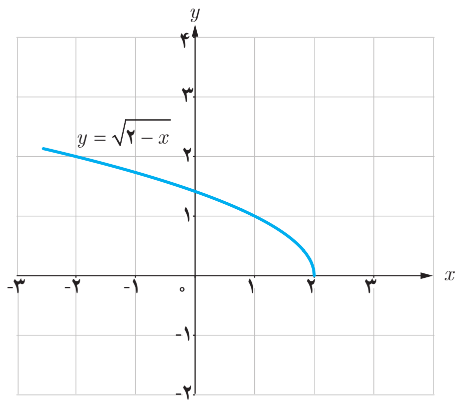
۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است).



مثال : آیا تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ در نقطه $x=2$ حد دارد؟ چرا؟

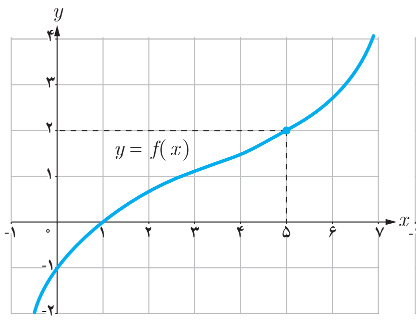
حل : می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f=(-\infty,2]$ می‌باشد.

چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=2$ حد ندارد.

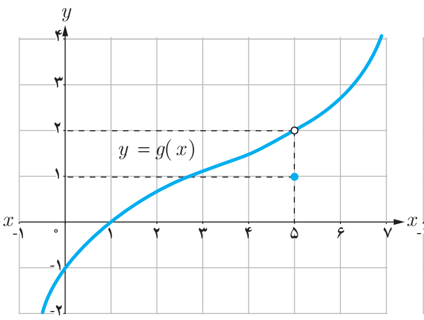


تمرین

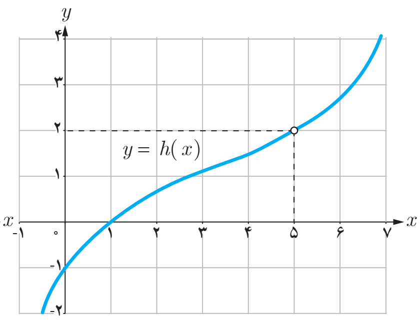
۱ نمودار سه تابع f، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=5$، مشخص کنید.



$\lim\limits_{x\to 5} f(x)=....$

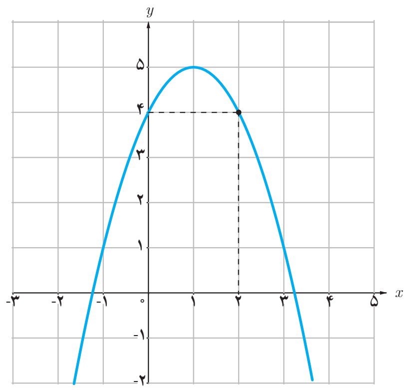


$\lim\limits_{x\to 5} g(x)=....$

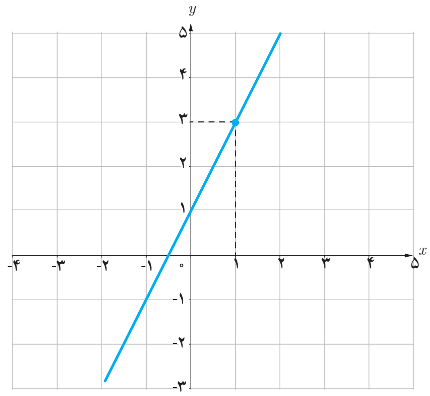


$\lim\limits_{x\to 5} h(x)=....$

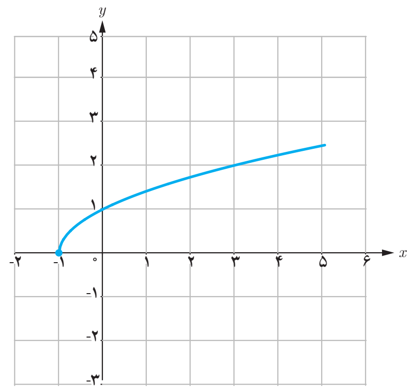
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



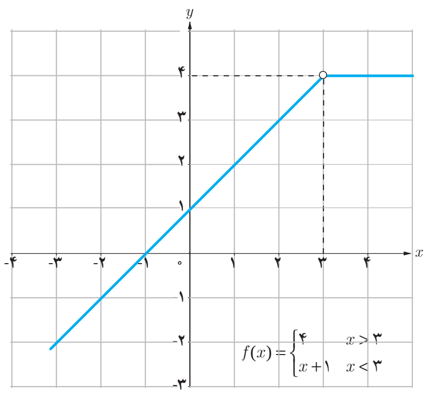
$\lim\limits_{x\to ۲} (-x^{۲}+۲x+۴) =$



$\lim\limits_{x\to ۱} (۲x+۱) =$



$\lim\limits_{x\to -۱} \sqrt{x+۱} =$



$\lim\limits_{x\to ۳} f(x) =$

۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} (-۳x+۴)=\dots$

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$	$۰/۵$	۱
$f(x)$	…	…	…	…	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	…	…	…	…	…

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=\dots$ ، $f(x)=\begin{cases} x-۴ & x\neq -۱ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	…	…	…	…	…	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	…	…	…	…

۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x>2\\ x+3 & x<2\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع f در نقطه x=۲، تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را به دست آورید.

۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbb{Z}\\ 2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله [۲,۴-] رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} g(x)=....$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=....$

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ x=۱ تعریف شده است؟ در همسایگی راست x=۱ چطور؟

۷ اگر بازهٔ $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

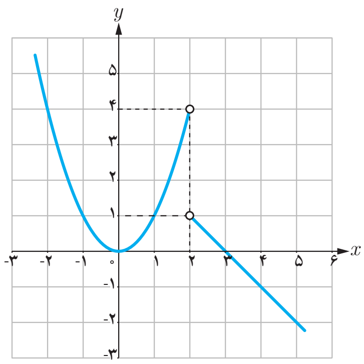
درس ۲

حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)

در درس قبل دیدیم که تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ در نقطهٔ ۲ حد ندارد. (چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.) ولی با توجه به اینکه دامنهٔ این تابع بازهٔ $(-\infty,2]$ می‌باشد می‌توانیم رفتار تابع را در همسایگی چپ ۲ بررسی نماییم. گاهی لازم است، رفتار تابع را وقتی متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک می‌شود یا وقتی متغیر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک می‌شود بررسی و توصیف نماییم.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+3 & x>2\\ x^2 & x<2\end{cases}$ به صورت روبه‌رو است :



الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد... نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد... نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=2$ حد دارد؟

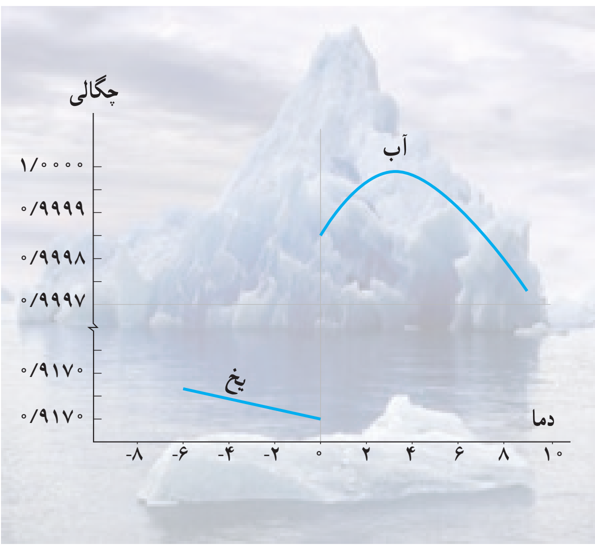
خواندنی

حتماً متوجه شده‌اید که یخ همیشه بر روی آب شناور است. توده یخ هرچقدر بزرگ باشد، باز هم در آب غرق نمی‌شود؛ مانند کوه‌های بزرگ یخ که بر روی آب دریاها و اقیانوس‌ها شناورند. آیا می‌دانید چرا یخ در آب غرق نمی‌شود؟

به‌طور کلی وقتی مایعی به شکل جامد درمی‌آید، منقبض می‌شود و مولکول‌هایش به هم نزدیک‌تر می‌شوند. به همین دلیل حجم ماده، کم می‌شود و چگالی آن افزایش می‌یابد. بنابراین مواد در حالت جامد سنگین‌تر از زمانی‌اند که به شکل مایع درآمده‌اند.

ولی آب مایعی است که خاصیت غیرعادی دارد. آب پس از انجماد به جای منقبض شدن، منبسط می‌شود؛ درنتیجه حجمش افزایش می‌یابد. تراکم یخ نه دهم آب است؛ به عبارت دیگر از نه لیتر آب ده لیتر یخ به‌دست می‌آید. به همین جهت وزن یخ، کمتر از آب هم حجمش است. به این ترتیب وقتی یخ درون آب قرار می‌گیرد، تنها نه دهم آن در آب فرو می‌رود و ۰/۱ دیگرش بر روی آب شناور می‌ماند.

نمودار چگالی آب و یخ بر حسب دما به صورت روبه‌رو است :



در فعالیت صفحهٔ قبل، مشاهده کردیم که وقتی از سمت راست (با مقادیر بزرگ‌تر از۲) به ۲ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می‌شوند و اگر از سمت چپ (با مقادیرکمتر از ۲) به ۲ نزدیک شویم مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند، پس وقتی x در یک همسایگی محذوف ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شوند و درنتیجه این تابع در ۲ حد ندارد.

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد $L_۱$ است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به $L_۱$ نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_۱$

تعریف حد چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد $L_۲$ است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به $L_۲$ نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_۲$

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

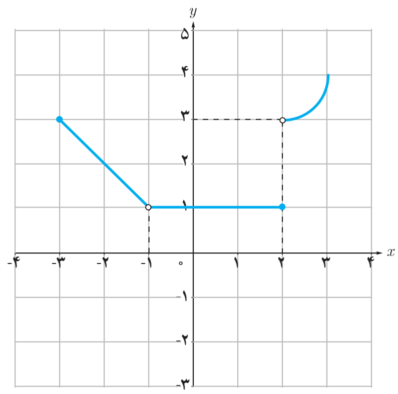
حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه

اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$، حد ندارد.

کار در کلاس

۱ با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ …	$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ …	$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ …
$\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ …	$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$ …	$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$ …
$\lim\limits_{x\to -۳} f(x)$ …	$\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)$ …	$\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$ …
$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ …	$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ …	$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ …

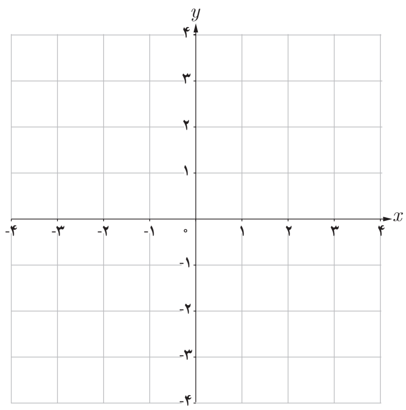
۲ نموداری از یک تابع رسم کنید که :

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

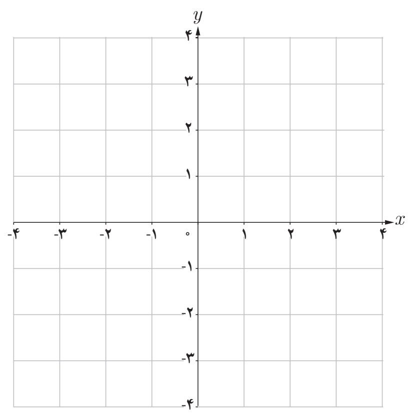
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

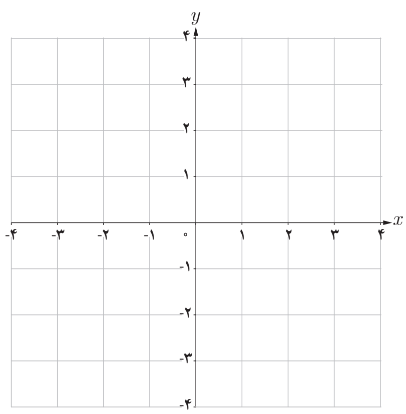
ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



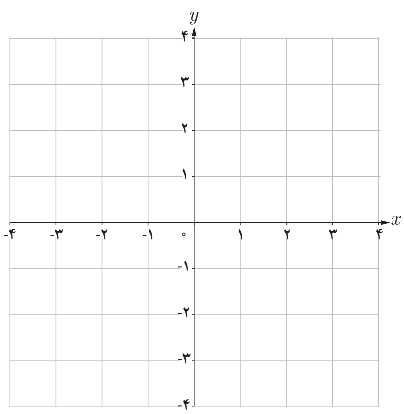
(الف)



(ب)

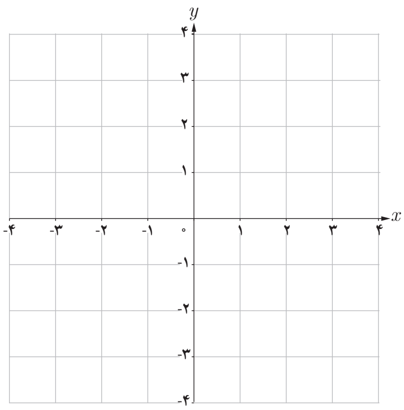


(پ)



(ت)

فعالیت



۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-۱,۲]$ رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آن‌گاه مقادیر

$f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ...$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=۱$ را به دست آورید.

۴ آیا تابع f در نقطه $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازهٔ $(۱,۲)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=۱$ منطبق است و داریم $\lim_{x\to ۱^+}[x]=\lim_{x\to ۱^+} g(x)=۱$.

به همین ترتیب، در $(۰,۱)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=۰$ منطبق است و داریم $\lim_{x\to ۱^-}[x]=\lim_{x\to ۱^-} h(x)=۰$.

اگر دوتابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی :

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a^+} g(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$.

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (درصورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به‌جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

مثال : مقدار حد راست تابع $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ را در نقطهٔ $x=۰$ به دست آورید.

حل : می‌دانیم روی بازهٔ $(۰,۱)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس روی بازهٔ $(۰,۱)$ تابع f با تابع ثابت $g(x)=۰$ برابر است بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to ۰^+} g(x)=۰$$

کار در کلاس

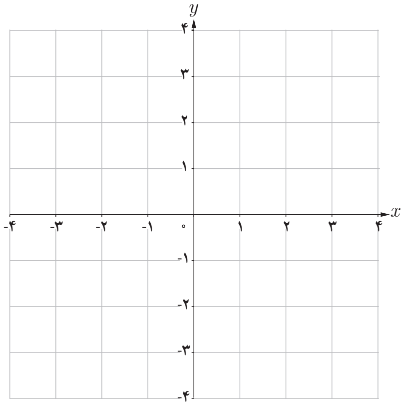
۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

پ) با استفاده از نمودار f، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به‌دست آورید.

ت) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ چرا؟



تمرین

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

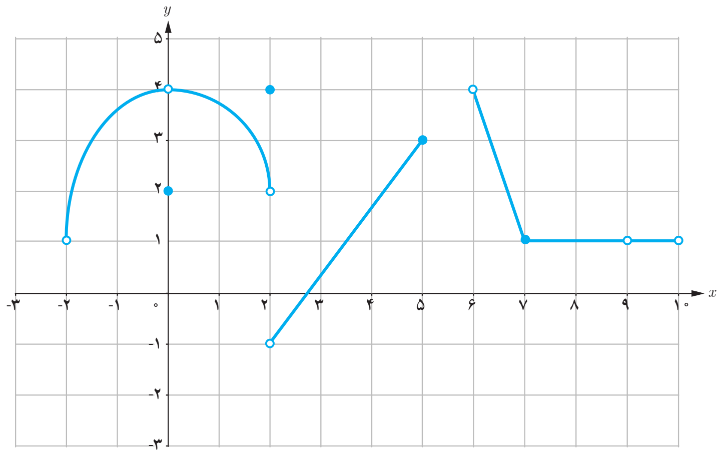
پ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$



۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ x^2+2x & x<0\end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

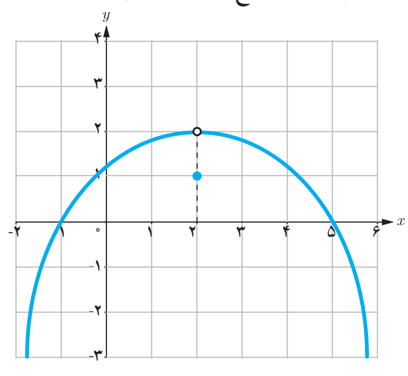
الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد... نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\dots$$

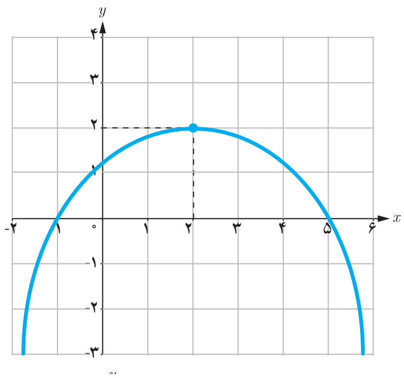
ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟ چرا؟

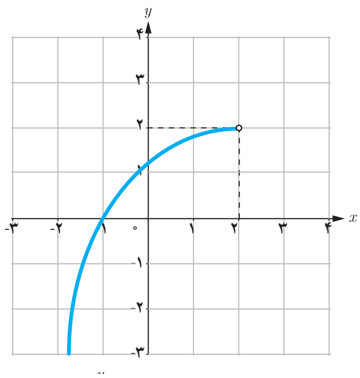
۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



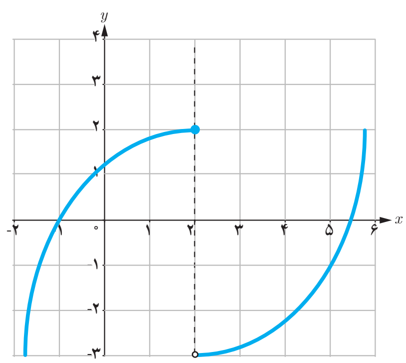
(الف)



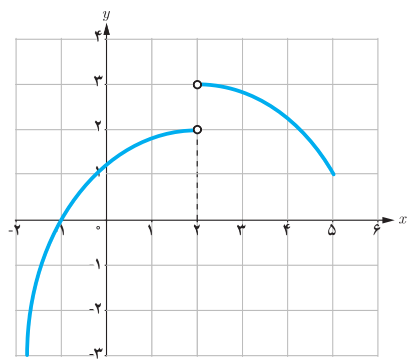
(ب)



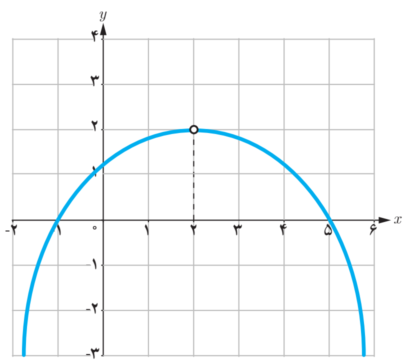
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

ــ تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

ــ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

ــ تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

ــ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است.

ــ تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

ــ تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^{۲}-x}$ در نقطهٔ $x=۱$ چه می‌توان گفت؟

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-۲}$ در نقطه $x=۲$ چه می‌توان گفت؟

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-۱)^{۲}+۲$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]$ ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\right]$

([ ] نماد جزء صحیح است)

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}|x|$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟