

مثلثات

۲

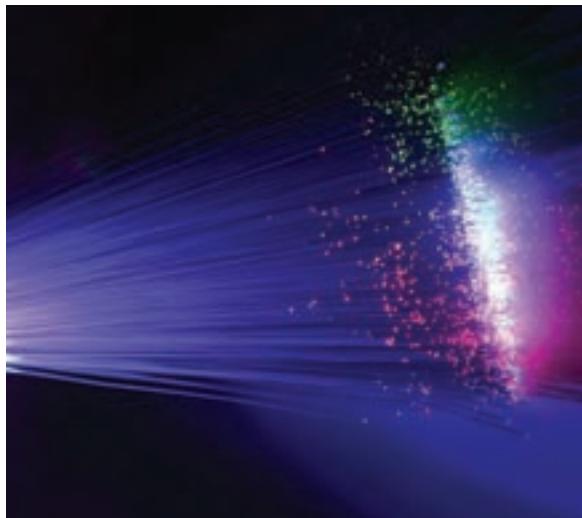
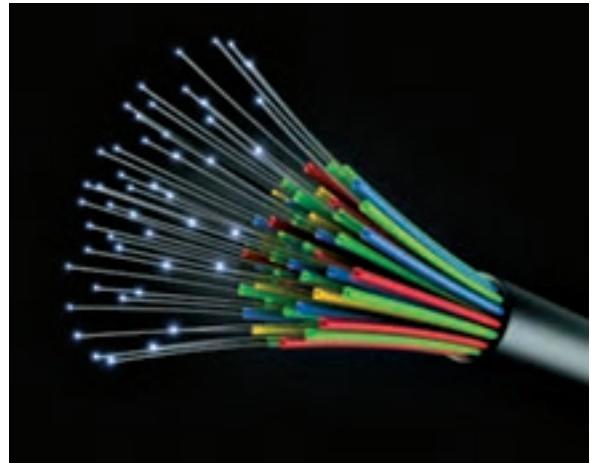
فصل

۱ رادیان

۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

۳ توابع مثلثاتی

۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا



فیبرهای نوری برای انتقال داده‌ها با سرعت بسیار بالا بهویژه در خطوط اینترنت استفاده می‌شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی شبیه‌سازی شوند. معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می‌شود.

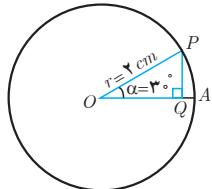


درس

رادیان

تاکنون زاویه‌ها را بر حسب «درجه» اندازه‌گیری می‌کردیم. استفاده از واحد «درجه» برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه‌گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می‌شویم.

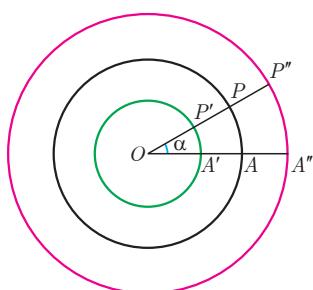
فعالیت



- ۱ دایره مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر تراویده شده است.
اندازه ضلع PQ در مثلث $\triangle OPQ$ را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی سال گذشته بدست آورید.

- ۲ با توجه به اینکه کمان 3° برابر $\frac{1}{12}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می‌توان طول کمان روبرو به زاویه α (یعنی \widehat{PA}) را به صورت زیر بدست آورد.

$$\widehat{PA} = \frac{1}{12} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 2 = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3} \text{ cm}$$



- اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های ۱ و ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم (شکل روبرو).

- الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $\widehat{P'A'}$ و $\widehat{P''A''}$ را که روبرو به زاویه $\alpha = 3^\circ$ هستند بدست آورید.

$$\widehat{P'A'} = \dots\dots$$

$$\widehat{P''A''} = \dots\dots$$

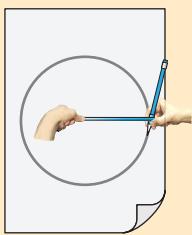
- ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبرو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم چه رابطه‌ای دارند؟

$$\frac{\widehat{PA}}{OP} = \dots\dots$$

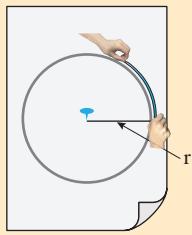
$$\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \dots\dots$$

$$\frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \dots\dots$$

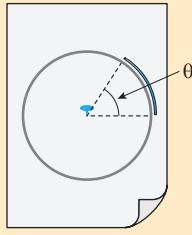
به کمک یک تکه نخ
یک دایره رسم کنید.



نخ را بر روی محیط
دایره قرار دهید.



ابتدا و انتهای نخ را
به مرکز وصل کنید
تا زاویه‌ای مرکزی
به وجود آید. توضیح
دهید چرا این زاویه
یک رادیان است.

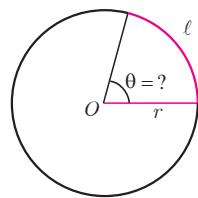


پ) اگر در شکل صفحه‌قبل دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می‌کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

$$\frac{\frac{1}{12} \times 2\pi \times r}{r} = \dots \dots \dots$$

در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان رو به رو به زاویه 30° به شعاع، در همه دایره‌ها برابر مقدار ثابت است. اکنون در سؤال زیر به این می‌پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

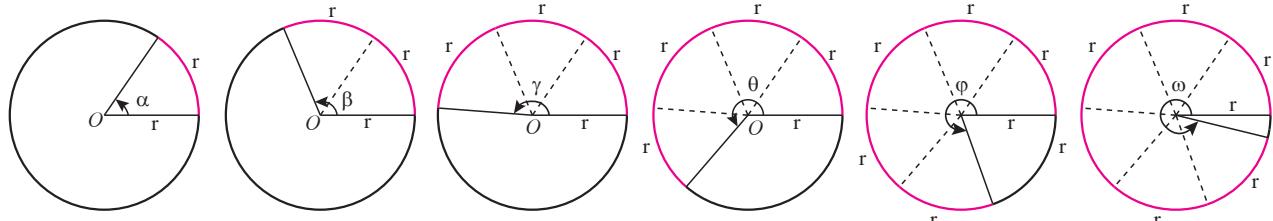
۳ در یک دایره به شعاع r ، مانند شکل زیر، طول کمان رو به رو به زاویه θ (کمان ℓ) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ اندازه زاویه θ تقریباً چند درجه است؟ (از نقاله استفاده کنید)



همان‌طور که در فعالیت قبل مشاهده کردید نسبت طول کمان رو به رو به یک زاویه به شعاع دایره همواره مقداری ثابت است. از این مقدار ثابت برای یافتن اندازه زاویه می‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در سؤال ۳ فعالیت قبل، این نسبت برای زاویه θ برابر یک است. در این صورت می‌گویند اندازه زاویه θ برابر ۱ رادیان است.

یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان رو به رو به آن برابر طول شعاع دایره است.
معمولًاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود.

در زیر زاویه‌های ۱ تا ۶ رادیان در دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم شده‌اند. در هر شکل به نسبت طول کمان رو به رو به هر زاویه
به شعاع دقت کنید.



$$\alpha = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$$

$$\beta = \frac{2r}{r} = 2 \text{ rad}$$

$$\gamma = \frac{3r}{r} = 3 \text{ rad}$$

$$\theta = \frac{4r}{r} = 4 \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{5r}{r} = 5 \text{ rad}$$

$$\omega = \frac{6r}{r} = 6 \text{ rad}$$

❖ **مثال :** اندازه یک زاویه نیم صفحه (180°) و نیز یک زاویه قائم (90°) بحسب رادیان چقدر است؟

❖ **حل :** می‌دانیم که طول کمان رو به رو به زاویه نیم صفحه، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم:

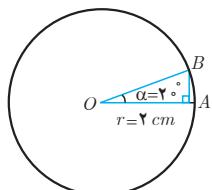
$$\frac{\frac{2\pi r}{2}}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi \text{ rad}$$

پس یک زاویه 180° برابر π رادیان می‌باشد. به طور مشابه طول کمان رو به رو به یک زاویه قائم، ربع محیط دایره است. پس:

$$\frac{\frac{2\pi r}{4}}{r} = \frac{\frac{\pi r}{2}}{r} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ بحسب رادیان و طول کمان l رو به رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$



❖ **مثال :** در شکل مقابل اندازه زاویه α را بحسب رادیان بدست آورید، سپس طول \widehat{AB} را پیدا کنید.

❖ **حل :** از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویه 180° برابر π رادیان است. بنابراین داریم:

$$\frac{2^\circ}{\alpha} = \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{2^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

پس زاویه α برابر $\frac{\pi}{9}$ رادیان است. اکنون برای بدست آوردن طول \widehat{AB} داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

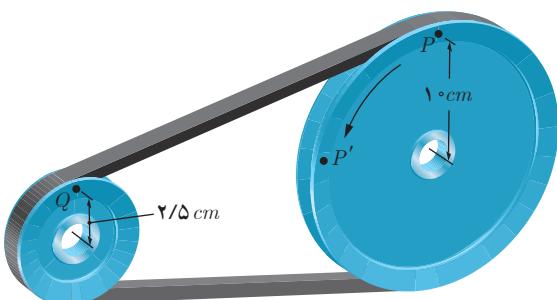
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

اگر D اندازه زاویه‌ای بحسب درجه و R اندازه آن بحسب رادیان باشد، آنگاه:

❖ **مثال :** در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقه به شعاع‌های 1 cm و $\frac{\pi}{5}\text{ cm}$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقه بزرگ‌تر $\frac{\pi}{2}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقه کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد. ($\pi \text{ rad} = 3/14 \text{ rad}$)

❖ **حل :** ابتدا مسافتی را که نقطه P بر روی محیط قرقه بزرگ‌تر طی می‌کند بدست می‌آوریم.

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = r\theta = 1\text{ cm} \times \frac{\pi}{5} = 5\pi \text{ cm} \approx 15.7 \text{ cm}$$



چون هر دو قرقره با یک سمه به هم متصل هستند پس قرقره کوچک تر نیز $5\pi \text{ cm}$ حرکت می‌کند. برای این قرقره داریم:

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = \frac{5\pi}{\frac{2}{5}} = 25\pi \text{ rad}$$

بنابراین وقتی قرقره بزرگ‌تر ربع دور می‌چرخد، قرقره کوچک‌تر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه Q به مکان خود بازمی‌گردد.

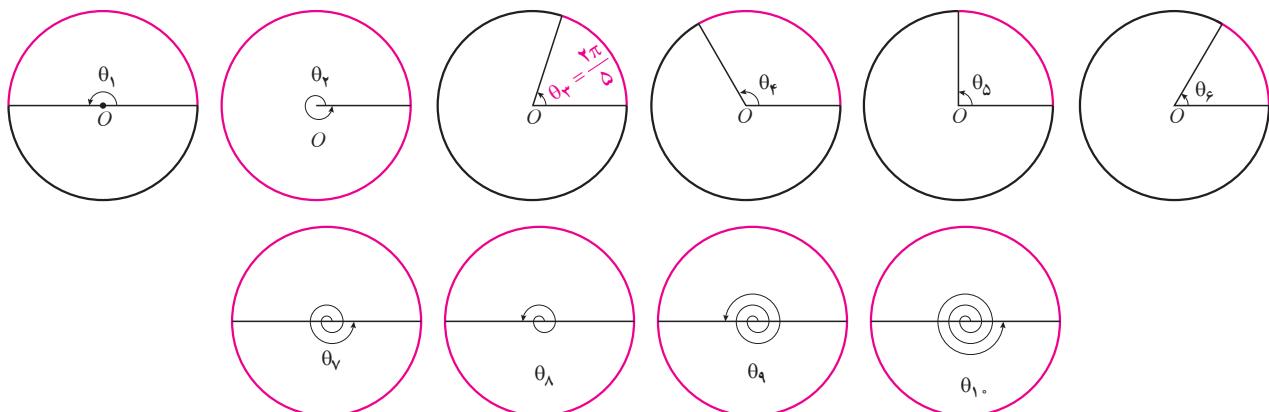
کاردکلاس

زاویه بر حسب درجه	${}^{\circ}$	30°			90°	270°	390°	
زاویه بر حسب رادیان	${}^{\circ}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		π	2π	$\frac{7\pi}{3}$

۱ در جدول رو به رو جاهای خالی را پر کنید.

۲ در زیر، اندازه برحی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظری کنید.

$$6\pi \quad 5\pi \quad 4\pi \quad 3\pi \quad 2\pi \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{2} \quad \frac{2\pi}{4} \quad \frac{2\pi}{5} \quad \frac{2\pi}{6}$$

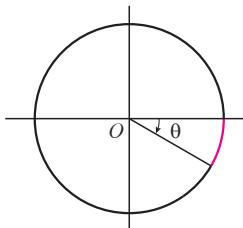


نسبت	θ (رادیان)	${}^{\circ}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$		${}^{\circ}$				۱		
$\cos\theta$				$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$\tan\theta$				$\frac{\sqrt{3}}{3}$				
$\cot\theta$	تعريف نشده					${}^{\circ}$		

۳ در جدول رو به رو، که سال گذشته آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید، مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته شده را در جاهای خالی بنویسید.

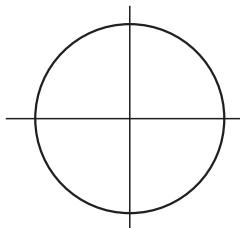
تمرین

- ۱** برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نموده رسم کنید.



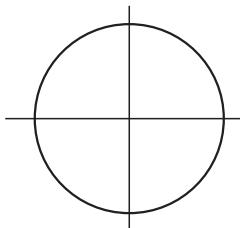
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



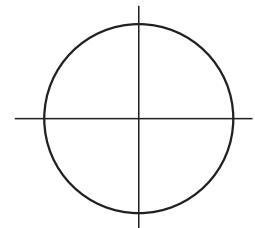
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$$

انتهای کمان در ربع ... است.



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$$

انتهای کمان در ربع ... است.



$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} =$$

انتهای کمان در ربع ... است.

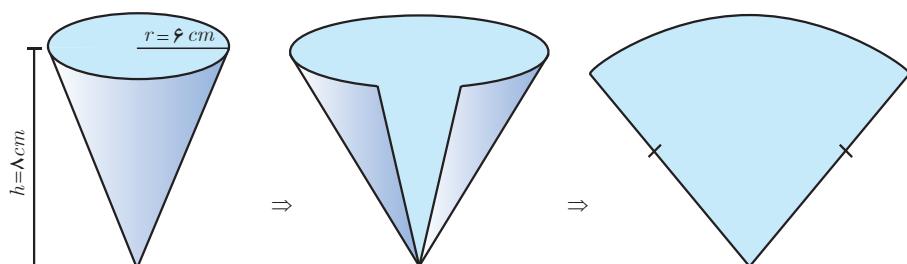


- ۲** طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است.
فرض کنید برف پاک کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند. ($\pi \approx 3/14$)

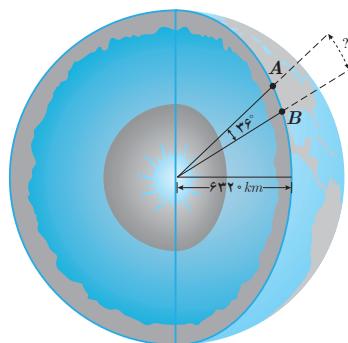
(الف) اندازه کمان را بر حسب رادیان به دست آورید.

(ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی متر است؟

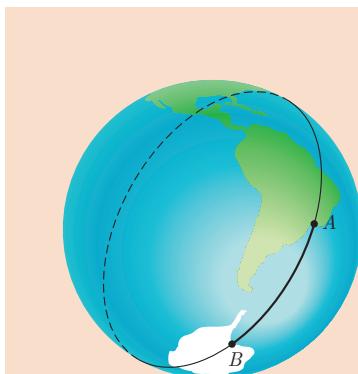
- ۳** شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6 \text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8 \text{ cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



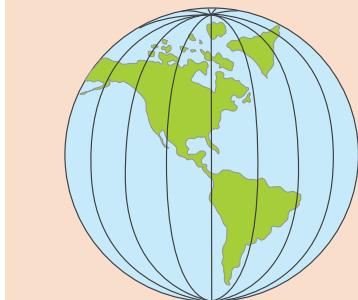
۱- به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.



۴ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبرو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازهٔ شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را باید.

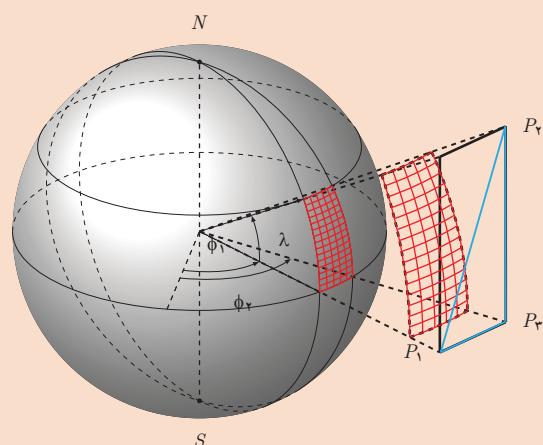


فاصلهٔ ژئودزیک دو نقطه از کره زمین



نصف‌النهارها دایره‌های عظیمه‌ای روی کره زمین تشکیل می‌دهند.

به فاصله بین دو نقطه داده شده در تمرین ۴ در اصطلاح فنی «فاصله ژئودزیک» دو نقطه گفته می‌شود. برای محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین لزومی ندارد که آن دو نقطه بر روی یک نصف‌النهار باشند. در عمل با استفاده از سیستم مکان‌یابی جهانی (GPS) موقعیت جغرافیایی آن دو نقطه را برحسب طول و عرض جغرافیایی آنها به دست می‌آورند و سپس با استفاده از محاسبات پیچیده‌ای فاصله ژئودزیک بین آن دو نقطه را محاسبه می‌کنند. در تمام این محاسبات که در آن از مثلثات کروی استفاده می‌شود باید زوایا برحسب رادیان در نظر گرفته شوند، در غیر این صورت محاسبات به مراتب پیچیده‌تر می‌گردد. فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین آن دو نقطه می‌توان پیدا کرد. این فاصله، طول کمانی از بزرگ‌ترین دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد و به آن «دایره عظیمه» می‌گویند. محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز هدایت ماهواره‌ها بسیار اهمیت دارد. بررسی کنید که چرا برای دو نقطه از کره زمین که روی یک نصف‌النهار قرار دارند، دایره عظیمه همان نصف‌النهار گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.



مثلثات کروی در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز محاسبه سطوح و خم‌ها بسیار کاربرد دارد.



درس

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

در سال گذشته به مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای برخی از زوایای تند (مانند 30° , 45° , 60°) و نیز زوایای مرزی (90° , 180° , 270° , 360°) پرداختیم. همچنین علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی یاد گرفتیم. اکنون به مقدار این نسبت‌ها برای برخی دیگر از زوایا و رابطه بین آنها می‌پردازیم.

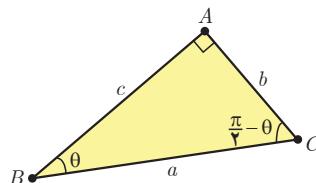
نسبت‌های مثلثاتی زوایایی متمم

می‌دانید که به هر دو زاویه‌ای که مجموع اندازه آنها 90° باشد زاویه‌های متمم می‌گویند. نسبت‌های مثلثاتی چنین زاویه‌هایی با هم ارتباط دارند. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا این روابط را پیدا کنید.

فعالیت

$\sin \theta = \frac{b}{a}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{c}{a}$
$\cos \theta = \dots\dots$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots\dots$
$\tan \theta = \dots\dots$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots\dots$
$\cot \theta = \dots\dots$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots\dots$

یک مثلث قائم‌زاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



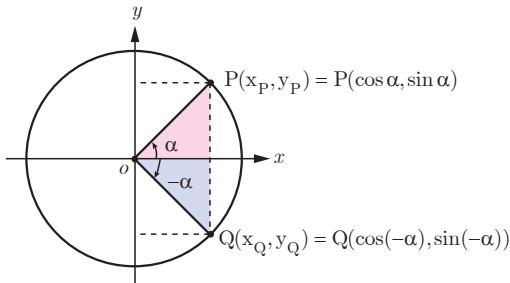
با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta\end{aligned}$$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط بدست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{2} - \theta$ همواره روابط روبه‌رو برقرار است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه رو نقطه P انتهای کمان روبه رو به زاویه α است. مختصات نقطه P بر حسب نسبت های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور x ها نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(x_P, -y_P)$ می باشد.

الف) با توجه به رابطه بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \dots \dots \dots$$

ب) طرف دوم تساوی های زیر را با استفاده از روابط به دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) =$$

$$\cot(-\alpha) =$$

دو زاویه α و $-\alpha$ - قرینه یکدیگرند. برای دو زاویه قرینه روابط مثلثاتی زیر برقرار است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

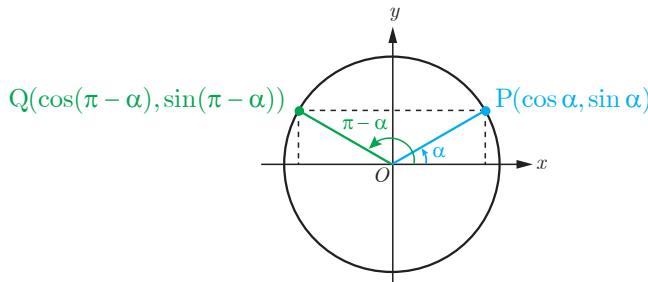
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

دو زاویه را مکمل گوییم اگر مجموع آنها 180° باشد. در فعالیت بعد روابط بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چنین زاویه‌هایی را به دست خواهیم آورد.

فعالیت



در دایره مثلثاتی زیر نقطه $P(x_P, y_P)$ انتهای کمان روبرو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$ نسبت به محور y ها است.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -x_P \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$y_Q = y_P \Rightarrow \dots$$

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

$$\tan(\pi - \alpha) =$$

$$\cot(\pi - \alpha) =$$

از فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو زاویه مکمل α و $\pi - \alpha$ روابط زیر برقرار است.

	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
--	---

	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$
--	--

زاویه α و $\pi + \alpha$ را در یک دایره مثلثاتی رسم کنید و نقاط انتهایی کمان‌های روبرو به این دو زاویه را به ترتیب $P(x_P, y_P)$ و $Q(x_Q, y_Q)$ بنامید. از دستگاه مختصات واضح است که نقطه Q قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است و از این رو $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$ برقرار است. اکنون با استدلالی مشابه به فعالیت بالا نشان دهید که روابط روبرو برقرار است.

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوايا در زیر محاسبه شده است.

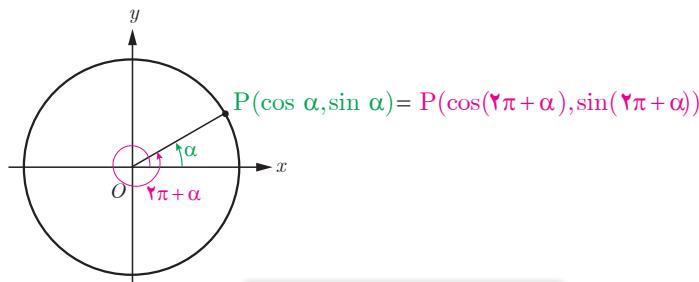
$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

زاویه‌هایی مانند α و $2\pi + \alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم انتها گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.



$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

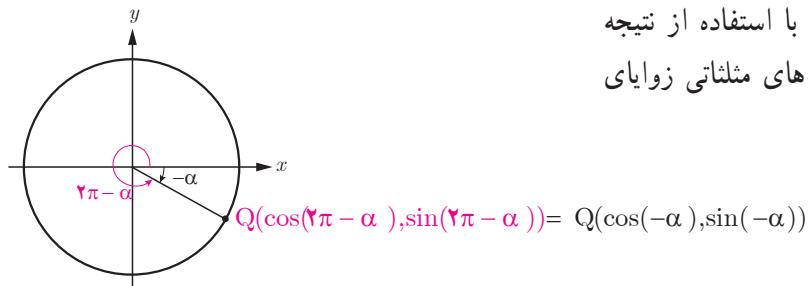
$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به صورت $2k\pi + \alpha$ ، نیز برقرار است. ($k \in \mathbb{Z}$)

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) نیز هم انتها هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2k\pi - \alpha$ به صورت زیر برقرارند.



$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

(الف) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

(ب) $\sin(45^\circ) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

کاردر کلاس

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(21^\circ) =$

ب) $\tan(-\frac{\sqrt{3}\pi}{4}) =$

پ) $\cot(135^\circ) =$

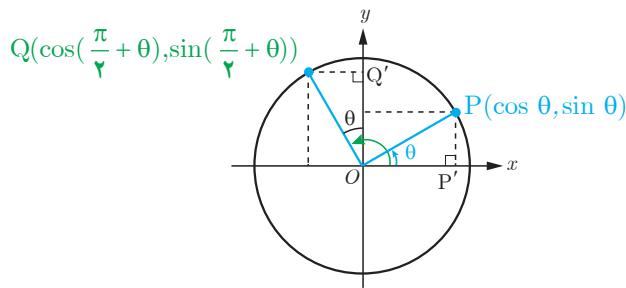
ت) $\sin(\frac{3\pi}{4}) =$

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. (${}^{\circ} < \theta < \frac{\pi}{2}$)

نسبت	زاویه	$\alpha = \pi - \theta$			$\alpha = \pi + \theta$			$\alpha = 2k\pi - \theta$			$\alpha = 2k\pi + \theta$		
انتهای کمان	ربع دوم					
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها		نسبت	+	-	نسبت	+	-	نسبت	+	-	نسبت	+	-
		$\sin\alpha$	✓		$\sin\alpha$			$\sin\alpha$			$\sin\alpha$		
		$\cos\alpha$		✓	$\cos\alpha$			$\cos\alpha$			$\cos\alpha$		
		$\tan\alpha$		✓	$\tan\alpha$			$\tan\alpha$			$\tan\alpha$		
$\sin\alpha$		$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$											
$\cos\alpha$		$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$											
$\tan\alpha$		$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$											
$\cot\alpha$		$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$											

۳ برای زوایای قرینه ($\alpha = -\theta$) از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

در دایره مثلثاتی روبرو زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ رسم شده‌اند.



الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ و $O\overset{\Delta}{P}P'$ هم‌نهشت هستند.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -y_p \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$y_Q = \dots$$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \dots$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \dots$$

به طور کلی برای دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$$

تمرین

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

(الف) $\sin(30^\circ) =$

(ب) $\cot(75^\circ) =$

(پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$

(ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4}) =$

(ث) $\sin(\frac{5\pi}{4}) =$

(ج) $\tan(-84^\circ) =$

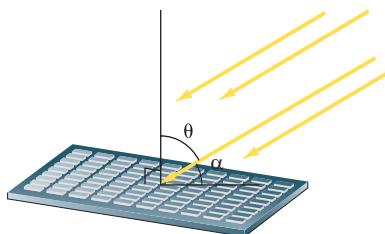
(چ) $\tan(-15^\circ) =$

(ح) $\cos(\frac{9\pi}{4}) =$

(خ) $\tan(\frac{10\pi}{3}) =$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می‌دهد.



(الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

(ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = 0^\circ$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

(پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوايا بر حسب رادیان است).

(الف) $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

(ب) $\sin(\frac{\pi}{4} - \theta) + \cos \theta = 1$

(ج) $\cos(\gamma) = \cos(-\gamma)$

(د) $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

۳

درس

توابع مثلثاتی

در درس‌های قبل مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای برخی زوایا به دست آوردهیم. اکنون این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان این نسبت‌ها را برای یک عدد حقیقی تعریف کرد؟ مثلاً عبارات \sin^3 یا \cos^3 چه معنی‌هایی دارند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا پاسخ این سوالات را بیابید.

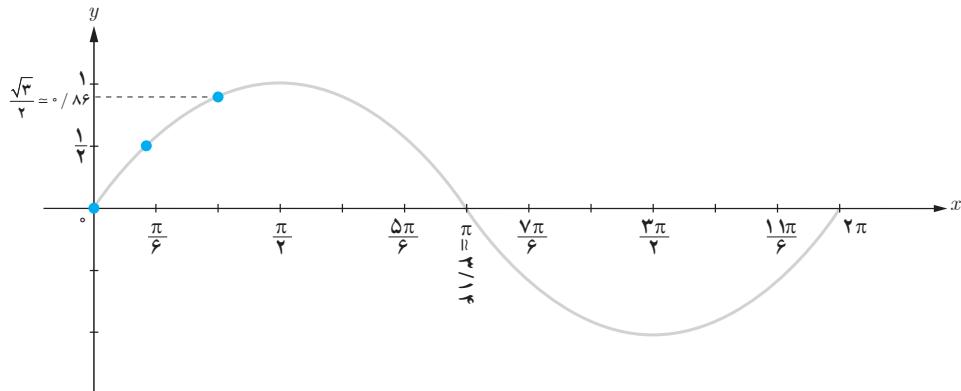
فعالیت

- در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

x (رادیان)	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$				۰	-۱	

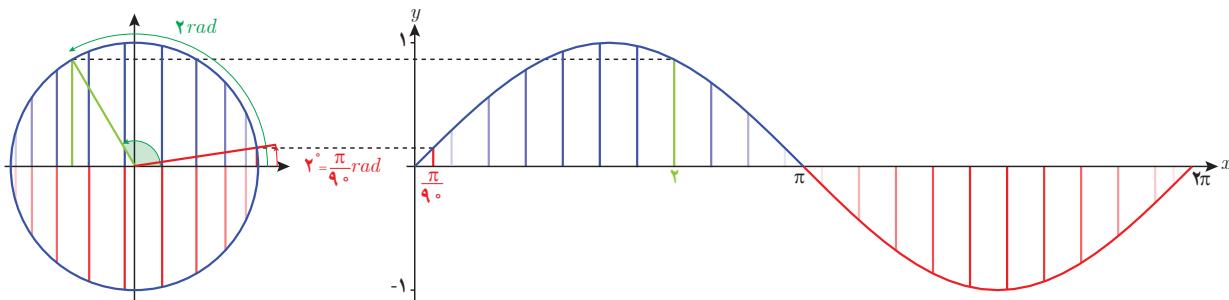
- جدول بالا به صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. با توجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب‌ها را تکمیل و سپس نقاط به دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوج‌های مرتب روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور y بررسی کنید).

$$f = \left\{ (0^\circ, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (2\pi, 0) \right\}$$



- نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y = \sin x$ در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار 1 کجای محور y قرار می‌گیرد؟

۴ در تابع $y = \sin x$ ، همیشه x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیرند مگر آنکه صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد $^{\circ}$ استفاده شود. با توجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin 2^{\circ}$ و $\sin 2$ را بیان کنید.



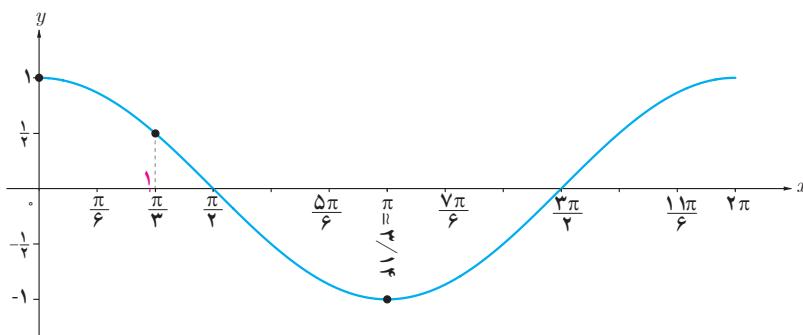
فعالیت

۱ همانند فعالیت قبل، تابع $y = \cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج‌های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط بدست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

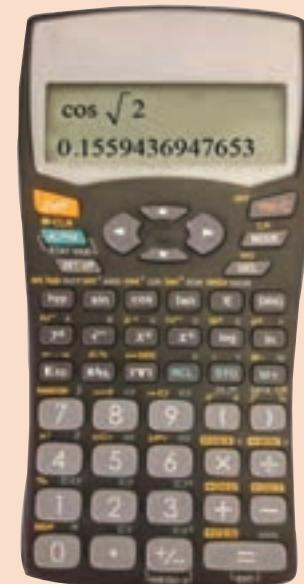
$$f = \left\{ (0, 1), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right), \left(\pi, -1\right), \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{8\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), (2\pi, 1) \right\}$$

خواندنی

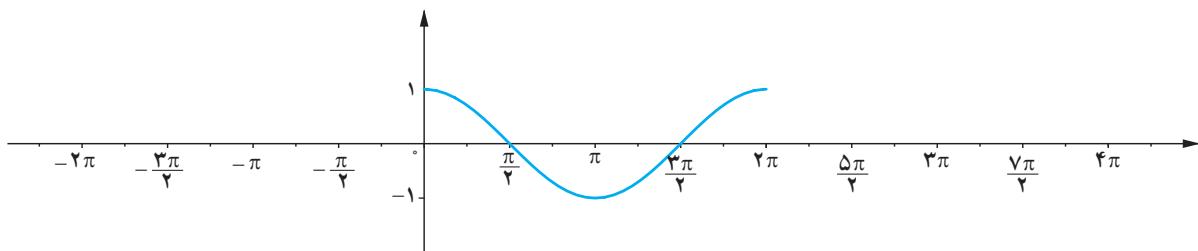
در همه ماشین‌حساب‌های پیشرفته، برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی می‌توان از دو حالت استفاده کرد که یک حالت بر حسب درجه (DEG) و حالت دیگری بر حسب رادیان (RAD) است. هنگام استفاده از ماشین‌حساب باید ابتدا آن را در حالت مورد نظر قرار داد. در ماشین‌حساب زیر آن را در حالت رادیان قرار داده و سپس مقدار $\cos \sqrt{2}$ را حساب کرده‌اند.



۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{2}$ رادیان را بر روی محور x باید و سپس مکان $\cos \sqrt{2}$ را بر روی محور y ‌ها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.



۳ از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(-x) = \cos x$ و نیز $\cos(x+2k\pi) = \cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y = \cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور x ها به دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[4\pi, 2\pi]$ ، $[2\pi, 0]$ و $[0, -2\pi]$ با هم متفاوت هستند؟

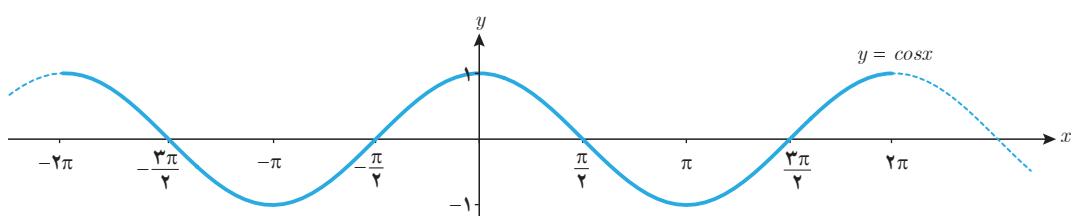
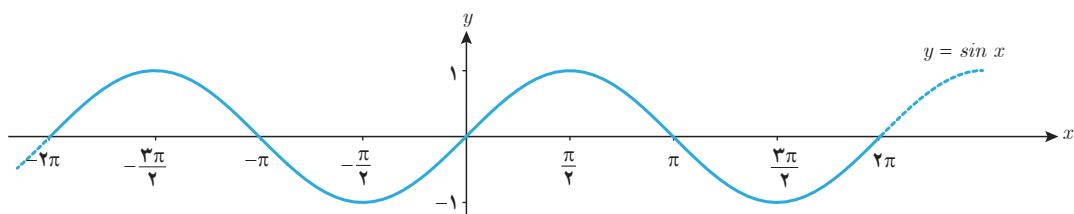


۴ با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- الف) آیا می‌توان بر روی محور x ها عددی مانند x یافت که برای آن $\cos x = \frac{1}{3}$ باشد؟
 ب) آیا می‌توان بر روی محور x ها عددی مانند x یافت که برای آن $\cos x = 2$ باشد؟
 پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = \cos x$ در این بازه چقدر است؟

تابع‌های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را مشتاتی گویند. دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[1, -1]$ است. گاهی به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

همان‌طور که در فعالیت ۲ بررسی شد تابع $y = \cos x$ در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود. این وضعیت برای تابع $y = \sin x$ نیز برقرار است (چرا؟). با توجه به این ویژگی در توابع مشتاتی بالا، می‌توان نمودار آنها را به صورت زیر رسم کرد.



کاردر کلاس

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد.

. $\cos^3 = \cos 3^\circ$

ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است.

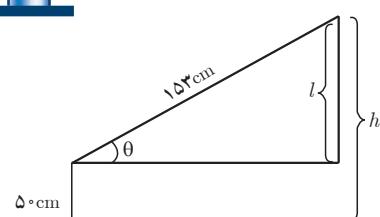
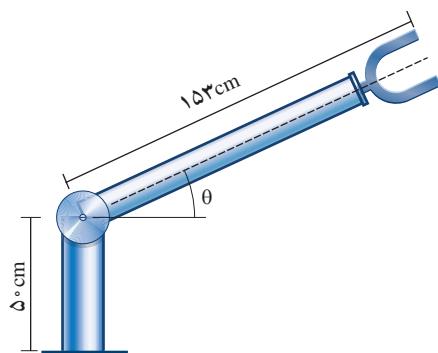
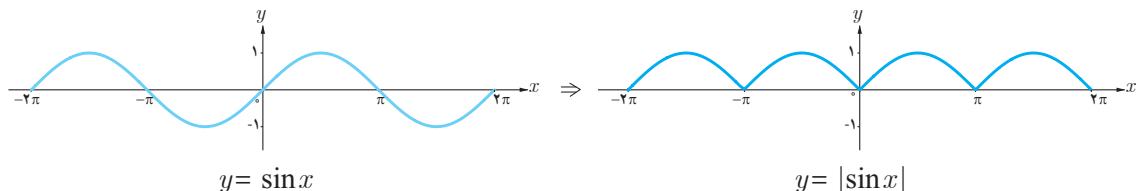
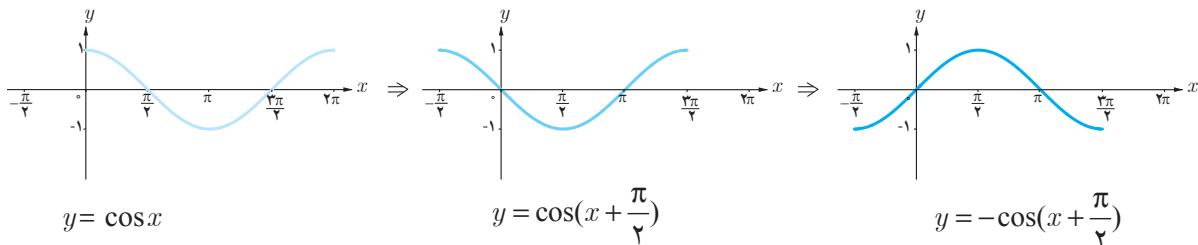
ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر -2 باشد.

ت) اگر $\frac{\pi}{2} < x < 0^\circ$ آنگاه $\cos x < -1$ است.

ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است.

مثال : با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، نمودار توابع $y = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ در زیر

رسم شده است.



مثال : روبات‌ها در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع روبات‌ها از توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در شکل روبه‌رو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. با توجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیره روبات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. $(0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

حل : کافی است وضعیت روبات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون کل ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sin \theta = \frac{l}{153} \rightarrow l = 153 \sin \theta$$

$$\Rightarrow h = 50 + l = 50 + 153 \sin \theta$$

sin

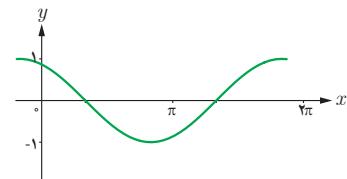
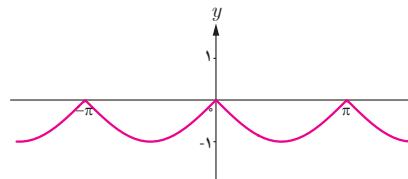
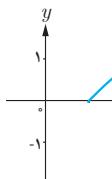
تمرین

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

$$y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \quad \text{ب)$$

$$y = \cos(x + \frac{\pi}{6}) \quad \text{ب)$$

$$y = -|\sin x| \quad \text{الف)$$

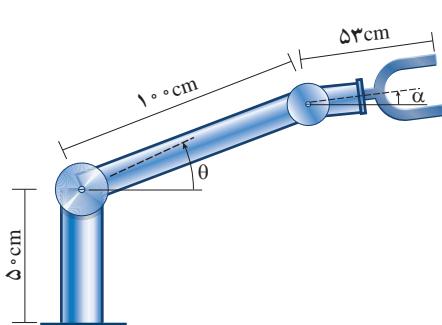
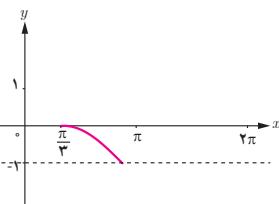
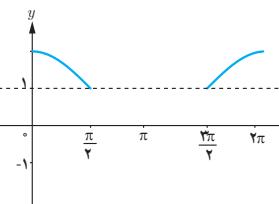
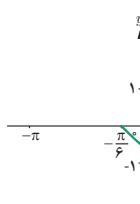


۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

$$y = 1 + |\cos x| \quad \text{ب)$$

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1 \quad \text{ب)$$

$$y = -\sin(x + \frac{\pi}{6}) \quad \text{الف)$$



۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازه $(-\pi, \pi)$ یک به یک است؟

۵ در طراحی ربات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت رو به رو در نظر می‌گیرند.

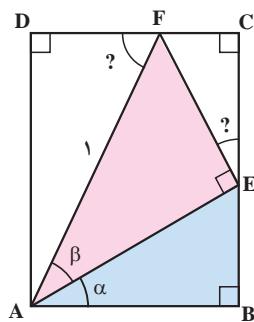
الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $23/5 \text{ cm}$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ و $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ آشنا شدید. این اتحادها تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به کار رفته است فرا می‌گیرید.

فعالیت



۱ در شکل رو به رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

(الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $\hat{F}AD$ و \hat{FEC} را برحسب α و β به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \hat{F}EC + 90^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ \\ \hat{F}EC = \dots\dots \\ \hat{AEB} + 90^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ \\ \hat{AEB} = \dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}AD = \dots\dots$$

(ب) اضلاع DC و AB باهم موازی و پاره خط AF به صورت مورب آن را قطع کرده است.

(پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم الزاویه AEF را، که وتر آن برابر ۱ است، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس \hat{DFA} بنویسید.

(ت) اندازه پاره خط‌های AB , FC , EC , BE را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به دست آورید.

ث) از تساوی اضلاع رو به رو در مستطیل صفحه قبل روابط زیر به دست می آید. آنها را با توجه به قسمت های الف تا د کامل کنید.

$$AD = BE + EC \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \dots \dots$$

$$DF = AB - FC \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \dots \dots$$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازه پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است.

در فعالیت فوق زوایایی به کار رفته همگی تندرست بودند. می توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت های مثلثاتی زوایایی قرینه می توان به دست آورد :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

پس همواره داریم :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

مثال : مقدار $\sin 75^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

مثال : درستی رابطه $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -\cot \theta$ را نشان دهید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{\overbrace{\sin \frac{\pi}{4}}^1 \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \overbrace{\sin \theta}^1}{\overbrace{\cos \frac{\pi}{4}}^1 \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

 تمرین

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

۱) $\cos 15^\circ$

۲) $\tan 105^\circ$

۳) $\sin \frac{\pi}{12}$

۲ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

$$\sin^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$