توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۳

توابع نمایی در تخمین قدمت اشیای باستانی کاربرد دارند

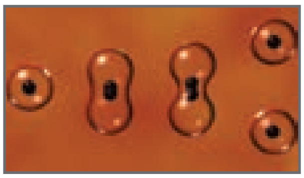
درس ۱

تابع نمایی

آیا تاکنون با خود فکر کرده‌اید که دانشمندان چگونه قدمت یک شیء باستانی یا یک فسیل را پیدا می‌کنند؟ در بدن هر موجود زنده کربن ۱۴ موجود است که با مرگ آن موجود، کربن ۱۴ شروع به از بین رفتن می‌کند. بنابراین با اندازه‌گیری مقدار کربن باقی‌مانده، می‌توان سن آن شئ یا موجود را پیدا کرد. در حل این‌گونه مسائل از تابع نمایی استفاده می‌شود.

فعالیت

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(۰)=۱$، آن‌گاه با توجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.



تقسیم دوتایی نوعی تولید مثل است که به تولید زاده‌هایی یکسان منجر می‌شود.

الف) در زمان‌های $t=$ ۵ و $t=$ ۶ جرم باکتری‌ها را به‌دست آورید.

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به‌دست آورد؟

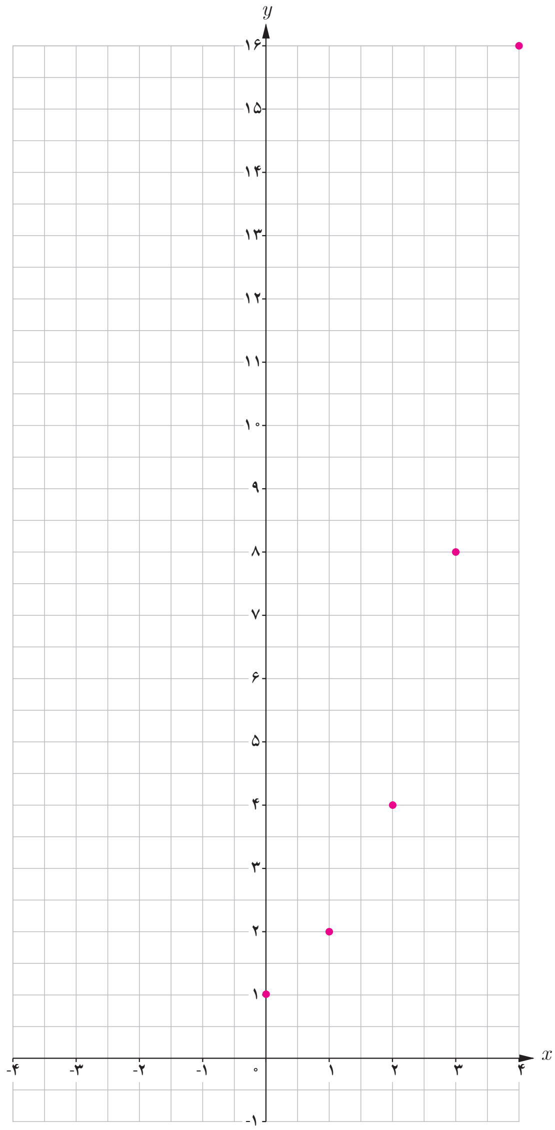
جدول (۱)

$m(t)$ جرم باکتری‌ها	t زمان (ساعت)
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	?
?	۵
?	۶
⋮	⋮
۱۰۲۴	?

اگر بخواهیم جرم باکتری‌ها را در مرحلهٔ یازدهم یا مرحله‌ای بالاتر پیدا کنیم، قطعاً محاسبات، خیلی دشوارتر و وقت‌گیر خواهد شد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، جدول (۱) را بر اساس توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم تا جدول (۲) حاصل شود. در جدول (۲) به جای علامت سؤال‌ها اعداد مناسب قرار دهید.

جدول (۲)

t	$m(t)$
۰	$۲^۰=۱$
۱	$۲^۱=۲$
۲	$۲^۲=۴$
۳	?
⋮	⋮
?	$۲^۹=?$



نمودار روبه‌رو رابطهٔ بین زمان و جرم باکتری‌ها را نشان می‌دهد.

با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل، جرم باکتری‌ها در پایان ساعت اول، دوم، ... و nام از دنباله زیر به‌دست می‌آید :

$$۲^۱ , ۲^۲ , ۲^۳ , \dots , ۲^n .$$

به عبارت دیگر، جرم باکتری‌ها برحسب زمان t، از رابطه $m(t)=۲^t$ به‌دست می‌آید.

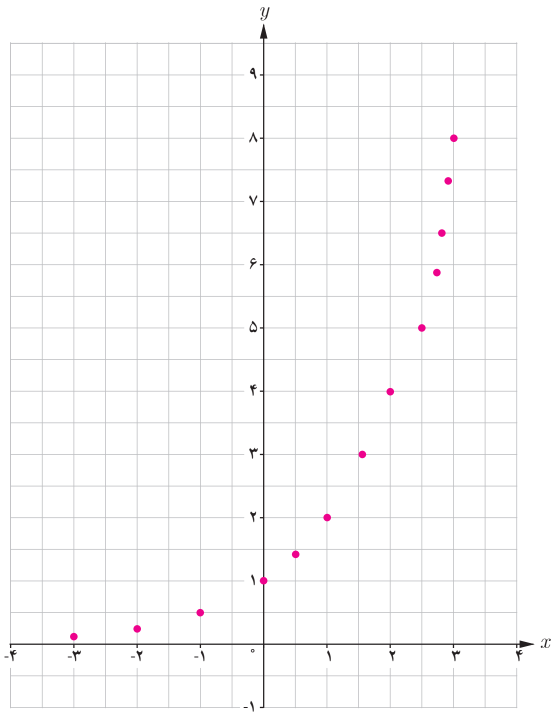
فعالیت

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به‌دست آورد.

الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

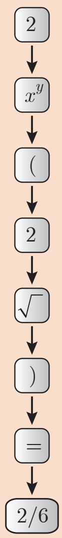
x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
۲^x	$۲^{-۳}$	...	...	$۲^۰$	$۲^{\frac{۱}{۳}}$	...	$۲^{\frac{۲}{۳}}$	...	$۲^{\frac{۳}{۲}}$	...	...
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	...	...	...	$\sqrt[۳]{۲}\simeq ۱/۲۶$	$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$	$\sqrt[۳]{۴}\simeq ۱/۵۶$	...	$\sqrt{۸}\simeq ۲/۸۳$	...	...

ب) نقاط به‌دست آمده را در یک صفحهٔ شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



خواندنی

به دلیل افزایش حجم محاسبات در زندگی روزمره، بیش از گذشته به ماشین حساب نیازمندیم. برای محاسبه $۲^{\sqrt{۲}}$ مراحل روبه‌رو را انجام می‌دهیم:



اکنون مقادیر $۲^{۰/۵}$، $۳^{\sqrt{۵}}$، $۲^{۱+\sqrt{۲}}$ و $۳^{۱-\sqrt{۵}}$ را تا دو رقم اعشار با استفاده از ماشین حساب به‌دست آورید.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنهٔ تابع $y=۲^x$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.

اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار روبه‌رو حاصل می‌شود.

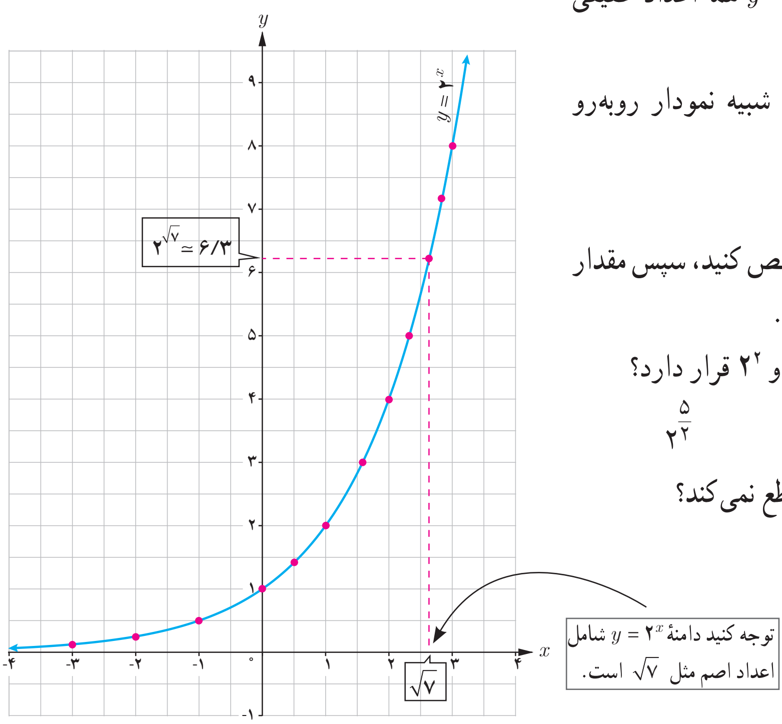
پ) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟

ت) نقطهٔ $x=\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

ث) کدام‌یک از اعداد زیر، بین دو عدد $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارد؟

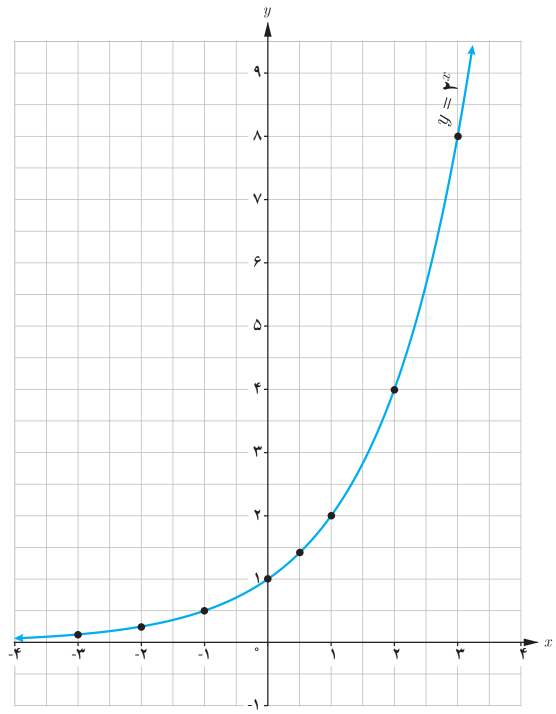
$۲^{-۱}$ $۲^۵$ $۲^{\frac{۳}{۲}}$ $۲^{\frac{۵}{۲}}$

ج) چرا نمودار تابع $y=۲^x$ محور xها را قطع نمی‌کند؟



کار در کلاس

الف) نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y=۲^x$ مقایسه کنید.



ب) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

هر تابع با ضابطه $f(x)=a^x$، که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

پ) نقطه $\left(۰/۵\,,\,(\frac{۱}{۲})^{۰/۵}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.

✤ **مثال :** توابع زیر همگی نمایی هستند :

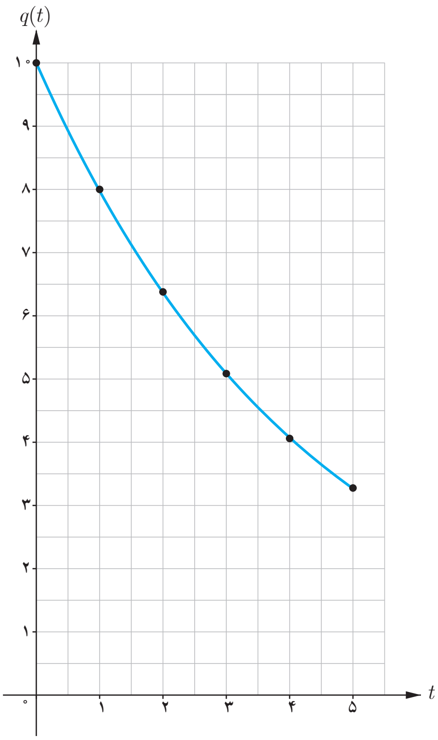
$$g(x)=(\tfrac{۱}{۲})^x\ ,\ h(x)=(\tfrac{۳}{۲})^x\ ,\ f(x)=(۳/۱۴)^x$$

✤ **تذکر :** در حالت کلی هر تابع با ضابطه $h(x)=ka^x$ $(k\neq ۰\,,a>۰\,,a\neq ۱)$ **رفتار نمایی** دارد. به‌عنوان مثال، توابع $f(x)=۳\times ۲^x$ یا $g(x)=(\frac{۲}{۵})^{x-۱}$ رفتار نمایی دارند.

✤ **مثال :** اگر ۱۰ گرم نمک را به مقدار کمی آب اضافه کنیم، مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه از رابطه $q(t)=۱۰\left(\frac{۴}{۵}\right)^t$ به‌دست می‌آید. بنابراین پس از مثلاً ۴ دقیقه، مقدار نمک حل نشده در آب برابر است با :

$$q(۴)=۱۰\left(\frac{۴}{۵}\right)^۴\simeq ۴/۰۹۶gr$$

نمودار این تابع برای $۰\leq t\leq ۵$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.



✤ **مثال :** فرض کنید Q جرم یک مقدار کربن ۱۴ برحسب گرم با نیمه عمر ۵۷۳۰ سال باشد (یعنی پس از ۵۷۳۰ سال نصف مقدار معینی از آن از بین می‌رود). مقدار این کربن بعد از t سال از رابطه $Q(t)=۱۰\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t}{۵۷۳۰}}$ به‌دست می‌آید.

الف) در لحظه $t=۰$ داریم $Q(۰)=۱۰\,gr$ و بعد از ۲۰۰۰ سال داریم

$$Q(۲۰۰۰)=۱۰\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۲۰۰۰}{۵۷۳۰}}\simeq ۷/۸۵\,gr$$

ب) اگر $t=۵۷۳۰$، آن‌گاه $Q(۵۷۳۰)=۱۰\times\frac{۱}{۲}=۵\,gr$ یعنی بعد از ۵۷۳۰ سال، مقدار کربن ۱۴ نصف می‌شود.

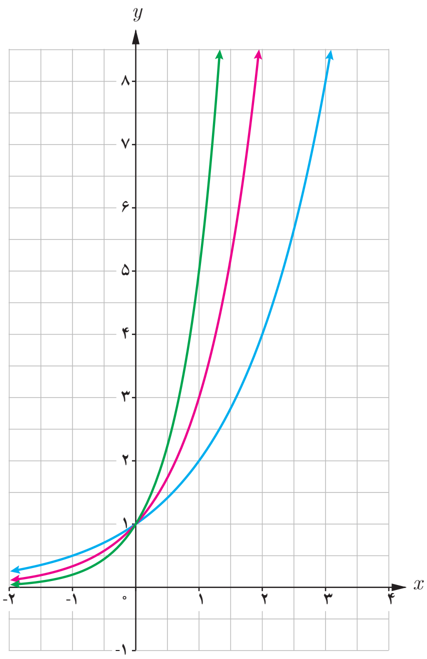
کاردرکلاس

۱ نمودارهای سه تابع $f(x)=۲^x$، $g(x)=۳^x$ و $h(x)=۵^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

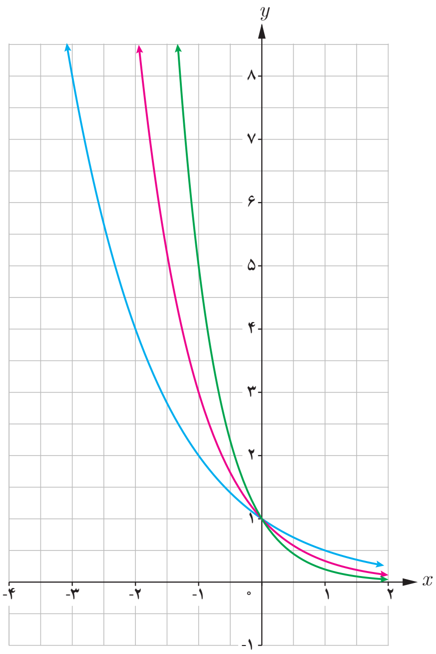
۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید.

۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟

۴ نمودارهای توابع $u(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$، $v(x)=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{۱}{۵}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به‌دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟



شکل (۱)



شکل (۲)

۵

الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$۲^{۴}, (\frac{۱}{۲})^{۲}, ۲^{۲}, ۲^{۳}, (\frac{۱}{۲})^{۴}, (\frac{۱}{۲})^{۳}$$

ب) جاهای خالی را پر کنید :

در تابع $f(x)=a^x$ ،

ــ اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر f ...... می‌یابند.

ــ اگر $۰<a<۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f ...... می‌یابند.

در سال‌های قبل، توان‌های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی را تعریف کرده و با ویژگی‌های مقدماتی آنها آشنا شده‌ایم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم :

۱) $a^{۰} = ۱$ ۲) $a^{-x} = \frac{۱}{a^x}$ ۳) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ۴) $(a^x)^y = a^{xy}$

۵) $(ab)^x = a^x b^x$ ۶) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$ ۷) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

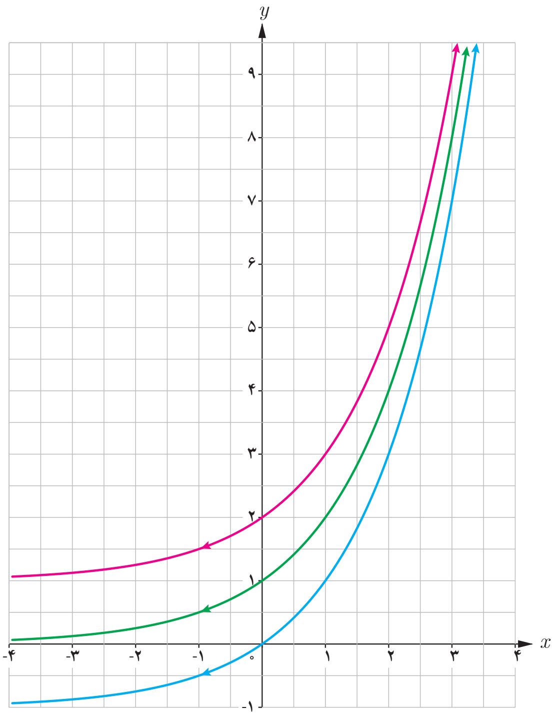
تمرین

۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

۲ نمودار توابع $y=۲^x$ ، $y=۲^x+۱$ و $y=۲^x-۱$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y=a^x$ ، $y=a^x+۲$ و $y=a^x-۲$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(a>۱)$.



۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t)=۱۰(۰/۸)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

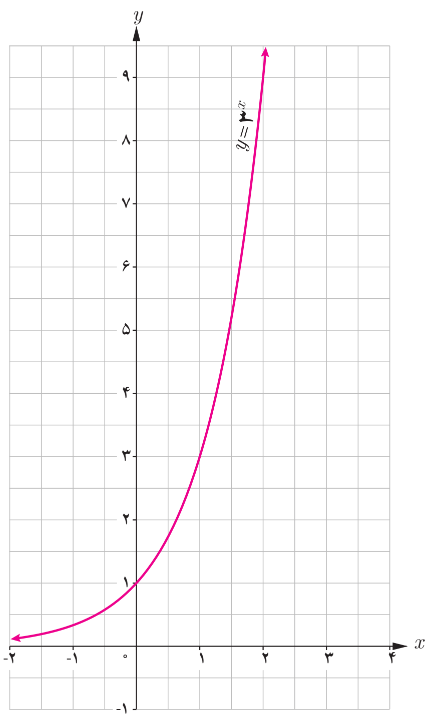
۴ الف) سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

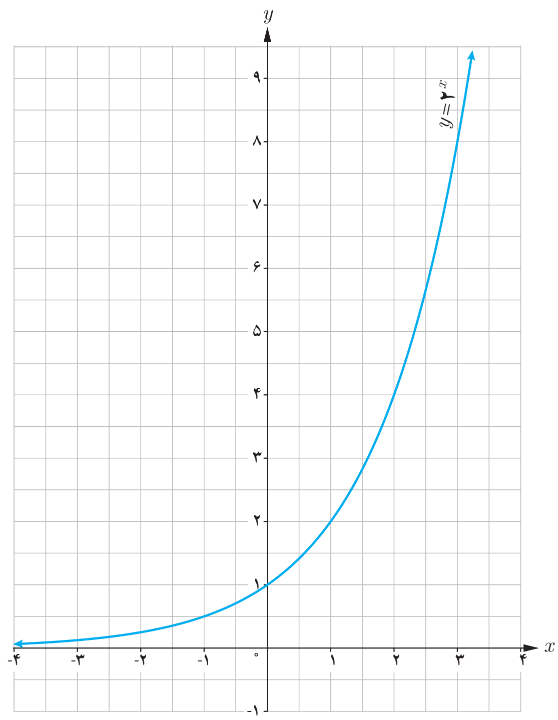
ب) نامعادلهٔ توانی $۴^{۲x-۱} > \frac{۱}{۱۰۲۴}$ را حل کنید.

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ $(a>۱)$.

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

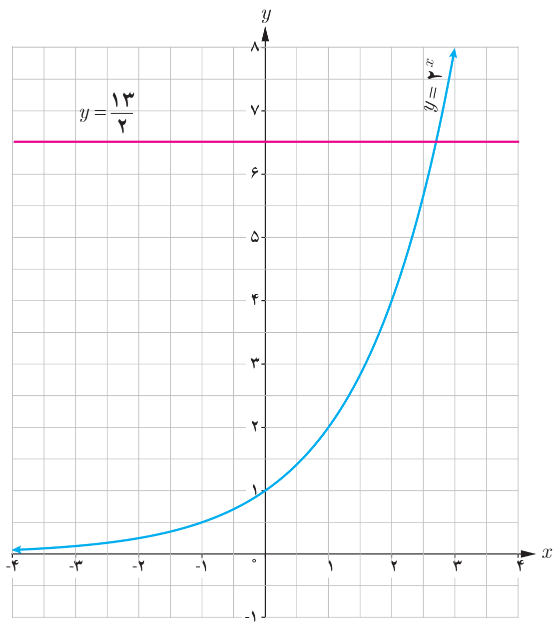
الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}}$ ب) $۲^{۱/۲۵}$ پ) $۳^{\frac{۳}{۲}}$





۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=۲^x$ راقطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟چرا؟

ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $۰/۴۹ = ۰/۷ \times ۰/۷$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

درس ۲

تابع لگاریتمی و لگاریتم

بار دیگر، مسئله افزایش جرم توده باکتری در محیط کشت را که در ابتدای این فصل مطرح شد، در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم در چه زمانی وزن باکتری‌ها ۵۱۲ گرم است، یعنی اگر $m(t) = ۵۱۲$، می‌خواهیم t را بیابیم. چون تابع $m(t) = ۲^t$ یک تابع یک به یک است، پس وارون‌پذیر است و از این رو $t = m^{-۱}(۵۱۲)$. به جدول‌های زیر نگاه کنید:

خواندنی

جان نپر (John Napier)

جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی مفهوم لگاریتم را پایه‌ریزی کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و در قرن ۱۶ و ۱۷ بزرگ‌ترین پیشرفت در علم حساب بود. لگاریتم در علوم زیادی کاربرد دارد. مثلاً در زلزله‌شناسی برای اندازه‌گیری شدت زلزله برحسب ریشتر کاربرد دارد. لگاریتم در حسابداری و مسائل مالی نیز کاربردهای زیادی دارد.

t (زمان)	$m(t) = p$، جرم باکتری‌ها در زمان t
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

$\Rightarrow$

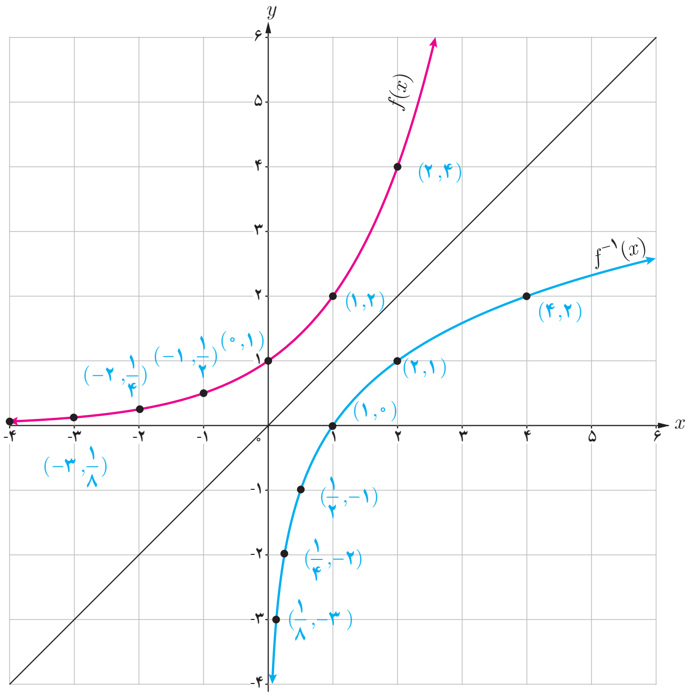
$m^{-۱}(p)$، زمان رسیدن به جرم p	t (زمان)
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴
۳۲	۵

نمودارهای تابع $y = f(x) = ۲^x$ و تابع وارون آن در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. دقت کنید که برای رسم تابع وارون $y=۲^x$ کافی است قرینه نقاط روی تابع را نسبت به خط $y=x$ پیدا کنیم. به عنوان مثال، نقطه $(۲,۴)$ روی تابع نمایی $y = ۲^x$ و نقطه $(۴,۲)$ که قرینه آن نسبت به خط $y=x$ است، روی تابع وارون آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. می‌توان دید:

$D_f = (-\infty,+\infty)$ ، $R_f = (۰,+\infty)$

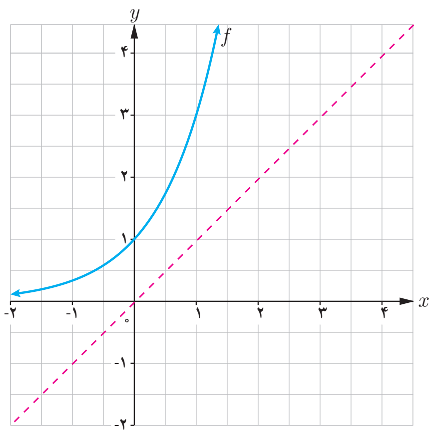
$D_{f^{-۱}} = (۰,+\infty)$ ، $R_{f^{-۱}} = (-\infty,+\infty)$

توجه کنید که دامنه f با برد $f^{-۱}$ برابر است و برد f با دامنه $f^{-۱}$.



فعالیت

۱ باتوجه به نمودار تابع $f(x) = ۳^x$ نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-۲) = ۳^{-۲} = \frac{۱}{۹}$	⇔	$f^{-۱}(\frac{۱}{۹}) = -۲$
$f(-۱) =$	⇔	
$f(۰) =$	⇔	
$f(۱) =$	⇔	
$f(\frac{۳}{۲}) =$	⇔	
$f(۲) =$	⇔	

۲ گزینهٔ درست را با ✓ و گزینه غلط را با × علامت بزنید.

ـ نقطهٔ $(\frac{۱}{۹}$ و $-۲)$ روی نمودار f قرار دارد.

ـ نقطهٔ $(\frac{۱}{۳}$ و $-۱)$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد.

ـ نقطهٔ $(۰$ و $۱)$ روی نمودار f قرار دارد.

ـ نقطهٔ $(-۲$ و $\frac{۱}{۹})$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد.

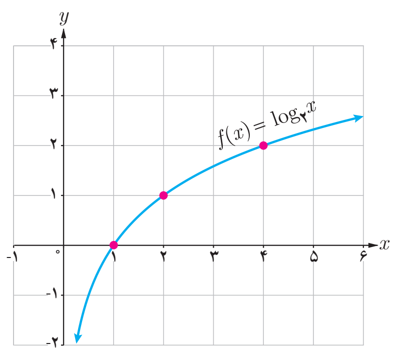
ـ تابع $f^{-۱}$ یک به یک است.

فرض کنید داریم $f(x) = ۳^x$ و $y = f^{-۱}(x)$. در این صورت y را لگاریتم x در پایه ۳ می‌خوانیم و آن را با نماد $y = \log_۳ x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم لگاریتم x در پایه ۳.

> اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک به یک است و از این رو دارای تابع وارون $f^{-۱}$ است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a x$ نشان داده می‌شود.

مثال : وارون تابع $f(x) = ۵^x$ تابع $f^{-۱}(x) = \log_۵ x$ است.

همچنین وارون تابع $g(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ تابع $g^{-۱}(x) = \log_{\frac{۱}{۳}} x$ است.

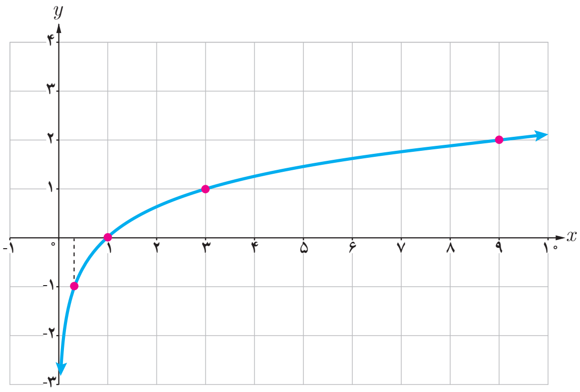


مثال : با توجه به نمودار $f(x) = \log_۲ x$ ، می‌توان دید :

$f(۱) = ۰$

$f(۲) = ۱$

$f(۴) = ۲$



✤ **مثال :** مقادیر زیر با استفاده از نمودار $f(x) = \log_{۳} x$ به‌دست آمده‌اند.

$f(۱) = ۰$

$f(۳) = ۱$

$f(\frac{۱}{۳}) = -۱$

$f(۹) = ۲$

به‌طور کلی

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

به عنوان مثال، $\log_{۲} ۸ = ۳$ زیرا $۸ = ۲^۳$ و یا $\log_{۱۰} ۱۰۰۰ = ۳$، زیرا $۱۰۰۰ = ۱۰^۳$.

همچنین $\log_{۱۰} \frac{۱}{۱۰۰} = -۲$ ، زیرا $\frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰^۲} = ۱۰^{-۲}$.

✤ **مثال :** فرض کنید $f(x) = \log_{۱۰} x$. مقدار تابع f را در هر یک از نقاط زیر در صورت وجود، حساب کنید.

الف) $x = ۱۰$ ب) $x = ۱۰۰$

پ) $x = -۲$ ت) $x = ۱۰۰۰$

✤ **حل :**

الف) $f(۱۰) = \log_{۱۰} ۱۰ = ۱$، زیرا $۱۰^۱ = ۱$.

ب) $f(۱۰۰) = \log_{۱۰} ۱۰۰ = ۲$، زیرا $۱۰^۲ = ۱۰۰$.

پ) $f(-۱۰)$ موجود نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ت) $f(۱۰۰۰) = \log_{۱۰} ۱۰۰۰ = ۳$، زیرا $۱۰^۳ = ۱۰۰۰$.

خواندنی

برای محاسبه لگاریتم در ماشین‌حساب کافی است از دکمه log استفاده کنیم. مثلاً برای محاسبه $\log_{۱۰} ۱۰$ ابتدا دکمه log سپس عدد ۱۰ و در نهایت دکمه = را می‌زنیم. همچنین برای محاسبه $\log_{۱۰} \frac{۱}{۴}$ به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم: و ماشین‌حساب مقدار آن‌را به‌صورت زیر نشان می‌دهد.

log → (→ 1 → / → 4 →) → = → -0/6020600

مثال : با توجه به تعریف لگاریتم، جدول زیر را داریم :

$۳^۴ = ۸۱$	$۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$	$۵^۳ = ۱۲۵$	$۶^۲ = ۳۶$	$۲^۵ = ۳۲$
$\log_{۳} ۸۱ = ۴$	$\log_{۲} ۱۰۲۴ = ۱۰$	$\log_{۵} ۱۲۵ = ۳$	$\log_{۶} ۳۶ = ۲$	$\log_{۲} ۳۲ = ۵$

مثال : تساوی‌های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

الف) $\log_{۷} ۱ = ۰$ ب) $\log_{۳} \frac{۱}{۲۷} = -۳$

حل :

الف) اگر $\log_{۷} ۱ = ۰$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $۷^۰ = ۱$.

ب) اگر $\log_{۳} \frac{۱}{۲۷} = -۳$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $۳^{-۳} = \frac{۱}{۲۷}$.

مثال : مقادیر زیر را محاسبه کنید :

الف) $\log_{۲} ۸$ ب) $\log_{۶} ۶$ پ) $\log_{۴} ۱$

حل :

الف) اگر $a = \log_{۲} ۳۲$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $۲^a = ۳۲$ و از این رو $a = ۵$.

ب) اگر $b = \log_{۶} ۶$ ، آن‌گاه $۶^b = ۶$ و در نتیجه $b = ۱$.

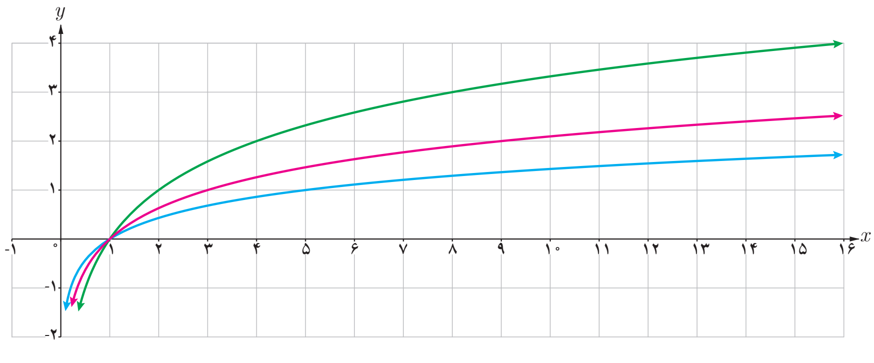
پ) اگر $c = \log_{۴} ۱$ ، آن‌گاه $۴^c = ۱$ و در نتیجه $c = ۰$.

کار در کلاس

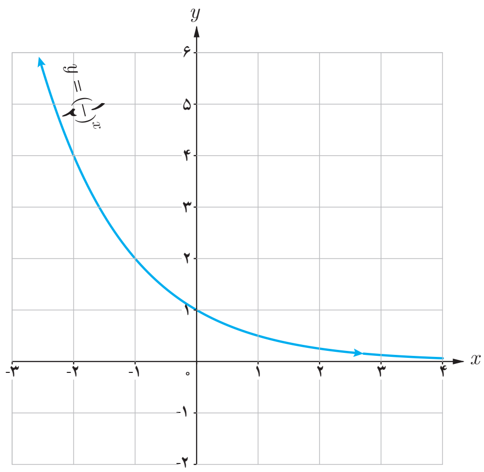
۱ الف) نمودار سه تابع $f(x) = \log_۲ x$ ، $g(x) = \log_۳ x$ و $h(x) = \log_۵ x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

(۱۶ , ۴) و (۹ , ۲) و (۵ , ۱)



پ) با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

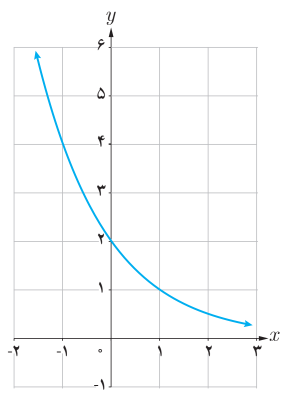


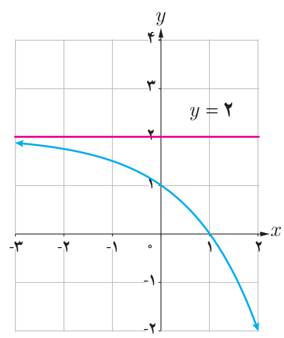
۲ مشخص کنید هریک از نمودارهای زیر به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

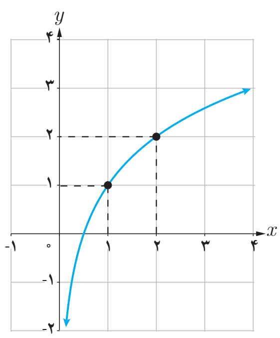
الف) $y=-۲^x+۲$

ب) $y=\log_{۲}(x+۱)$

پ) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$







۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{۳} ۸۱$

ب) $\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶}$

پ) $\log_{۲} ۸$

تمرین

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$$\log_{۱۰} ۰/۰۱ \quad , \quad \log_{۶} \frac{۱}{۶} \quad , \quad \log_{۲} \sqrt{۲} \quad , \quad \log_{۷} \sqrt[۳]{۷^{۲}}$$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$ با هم مقایسه کنید.

۳ الف) خط $y=۲۷$ نمودار تابع $y=۳^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y=۱۰$ نمودار تابع $y=(۰/۰۱)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۲^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

ــ لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ــ لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ــ تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است.

ــ تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند.

ــ اگر نقطه (b,d) روی نمودار $y=a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d,b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد.

ــ اگر $a>b>۰$ آنگاه $\log_{۱۰} a < \log_{۱۰} b$.

۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۱+\log_{۳} x$ ب) $y=-۳^x-۲$ پ) $y = ۴(\frac{۱}{۳})^x$

درس ۳

ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

ویژگی‌های لگاریتم

برای حل یک مسئله واقعی که در بیان ریاضی آن لگاریتم به‌کار رفته است، نیازمند استفاده از روابطی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. به همین جهت در این قسمت به بیان و اثبات روابط و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم. برخی از ویژگی‌های سادهٔ لگاریتم به‌صورت زیر هستند :

مثال :

الف) $\log_a ۱ = ۰$، زیرا $a^۰=۱$

ب) $\log_a a = ۱$، زیرا $a^۱=a$

مثال : نشان دهید برای اعداد حقیقی مثبت a، b و c، که $c\neq ۱$، همواره داریم :

$$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$$

حل : فرض کنیم $x=\log_c a$ و $y=\log_c b$. پس طبق تعریف، $a=c^x$ و $b=c^y$. از این رو $ab=c^x.\ c^y=c^{x+y}$ و طبق تعریف لگاریتم داریم $\log_c ab=x+y$. در نتیجه $\log_c ab=\log_c a+\log_c b$.

مثال : با توجه به مثال قبل، $\log_a b^۲=\log_a(b\times b)=\log_a b+\log_a b=۲\log_a b$. به‌طور مشابه $\log_a b^۳=\log_a(b^۲\times b)=(\log_a b+\log_a b)+\log_a b=۳\log_a b$ و به‌طور کلی اگر $a,b>۰$ ، $a\neq ۱$ و n یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\log_a b^n=n\log_a b$$

به خصوص $\log_a a^n=n$.

قرار داد : همواره منظور از $\log a$ عبارت است از $\log_{۱۰} a$. همچنین، لگاریتم در پایه ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم.

مثال : فرض کنیم $a=\log ۲$. نشان دهید $\log ۵=۱-a$.

حل : می‌دانیم $\log_{۱۰} ۱۰=۱$، پس طبق مثال بالا، $۱=\log ۱۰=\log ۲+\log ۵$ و در نتیجه $\log ۵=۱-\log ۲=۱-a$.

کار در کلاس

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c>0$ و $c\neq 1$، آنگاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

۲ اگر $a=\log 2$ و $b=\log 3$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log 0/75$ ب) $3\log\sqrt[3]{4} - \log 250$ پ) $\log 0/005$

معادلات لگاریتمی

در برخی از مدل‌سازی‌ها به یک معادلهٔ شامل عبارت‌های لگاریتمی می‌رسیم؛ مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. در حل بسیاری از این معادلات، جواب‌ها با استفاده از خواص لگاریتم به‌دست می‌آیند که به این معادلات، معادلات لگاریتمی می‌گوییم. منظور از حل معادله لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقادیری از متغیر است که در معادله صدق کند. تساوی‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی هستند :

$$\log(x+1) = 3 \quad , \quad \log_3 x = \log_3 r \quad , \quad \log_3 x + \log_3(x-1) = \log_3 12$$

در حالت کلی داریم :

اگر $a>0$ و $a\neq 1$ ، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و بالعکس، اگر $x,y>0$ و $x=y$ آنگاه $\log_a x = \log_a y$.

مثال : معادلهٔ لگاریتمی $\log_5(x^2-2) = \log_5 x$ را حل کنید.

حل : به سادگی می‌توان دید $x=x^2-2$ و از این‌رو $x^2-x-2=0$. از طرفی $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ و در نتیجه ریشه‌های معادله اخیر برابر است با ۲ و ۱-. قسمت مهم حل یک معادله لگاریتمی **آزمایش کردن جواب‌هاست**. در این مثال، چون لگاریتم اعداد نامثبت تعریف نشده است، تنها جواب قابل قبول $x=2$ است (چرا؟).

مثال : معادله لگاریتمی $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$ را حل کنید.

حل : می‌دانیم $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5\left(\frac{x^3}{4}\right)$ ، بنابراین $\log_5\left(\frac{x^3}{4}\right) = \log_5 16$ و در نتیجه $\frac{x^3}{4} = 16$. از این رو $x^3=16\times 4=64$. بنابراین $x=4$. با جای‌گذاری $x=4$ در معادله بالا می‌توان دید این جواب قابل قبول است.

فعالیت

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید :

الف) $\log_{۵}(۲x-۱)=\log_{۵}x$

ب) $\log_{۳}(x-۱)+\log_{۳}\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=۲$

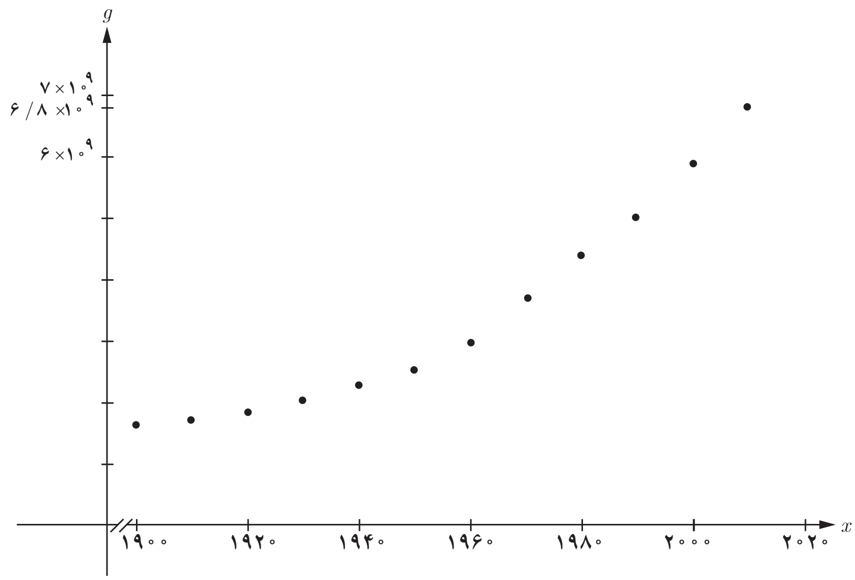
پ) $\log x+\log(x+۳)=۱$

کاربردهای لگاریتم

مثال : جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست‌ویکم نشان می‌دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵۰	۱۷۵۰	۱۸۶۰	۲۰۷۰	۲۳۰۰	۲۵۶۰	۳۰۴۰	۳۷۱۰	۴۴۵۰	۵۲۸۰	۶۰۸۰	۶۸۰۰

الف) باتوجه به جدول، نمودار جمعیت جهان برحسب سال به صورت زیر است :



ب) اگر محور xها بیانگر سال و محور gها بیانگر جمعیت باشد[1]، تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت $g(x)=۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^{x}$ برآورد می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با :

$g(۲۰۱۶)=۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^{۲۰۱۶}\simeq ۷,۳۸۵,۰۷۴,۵۱۲$.

در اینجا می‌توان حدس زد که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید، زیرا داریم :

$$g(x)=۸\times۱۰^{-۳}(۱/۰۱۳۷۶)^{x}=۸\times۱۰^{۹}$$

$$\Rightarrow(۱/۰۱۳۷۶)^{x}=۱۰^{۱۲}\Rightarrow x\log ۱/۰۱۳۷۶=\log ۱۰^{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۱۲}{\log ۱/۰۱۳۷۶}\simeq ۲۰۲۱$$

$$(\log ۱/۰۱۳۷۶\simeq ۰/۰۰۵۹۳۵)$$

۱ــ دقت کنید که نقطه ابتدایی دامنه تابع $g(x)$ نقطه ۱۹۰۰ است.

مثال : ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ (Erg) از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M.$$

از این رابطه می‌توان محاسبه کرد که مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶/۶ ریشتری برابر است با :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵\,(۶/۶) = ۲۱/۷ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۷}\ Erg.$$

خواندنی

جالب است بدانید که :
در زلزله ۶/۶ ریشتری بم (۱۳۸۲) ۹۰ درصد از سازه‌های این شهر که بیش از ۲۵۰۰ سال قدمت داشت از بین رفت. با توجه به اینکه انرژی آزاد شده در یک زلزله ۸ ریشتری معادل انفجار یک میلیارد تن TNT است. بنابراین انرژی آزاد شده در زلزله بم معادل انفجار $\frac{۶/۶\times۱۰^{۹}}{۸} = ۸۲۵\times۱۰^{۶}$ (۸۲۵ میلیون) تن TNT بوده است.

مثال : نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده، ۲۴ میلی‌گرم باشد جدول زیر تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می‌دهد.

با توجه به جدول جرم باقی‌مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطه $m(t) = \frac{۱}{۲^{\frac{t}{۲۵}}}(۲۴) = ۲۴\times ۲^{\frac{-t}{۲۵}}$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، به‌عنوان مثال جرم باقی‌مانده پس از ۴۰ سال برابر است با :

(جرم بر حسب میلی‌گرم) $m(t)$	(زمان برحسب سال) t
۲۴	۰
$\frac{۱}{۲}(۲۴) = ۱۲$	۲۵
$\frac{۱}{۲^{۲}}\times۲۴ = ۶$	۵۰
$\frac{۱}{۲^{۳}}\times۲۴ = ۳$	۷۵
$\frac{۱}{۲^{۴}}\times۲۴ = ۱/۵$	۱۰۰

$$m(۴۰) = ۲۴\left(۲^{-\frac{۴۰}{۲۵}}\right) \approx ۷/۹۰ \text{ میلی‌گرم}$$

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۴} m^{۲} - \log_{۴} m - ۳ = ۰$

ب) $\log_{۲}(۱۲b - ۲۱) - \log_{۲}(b^{۲} - ۳) = ۲$

پ) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^{۲} - ۱) = -۱$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = ۲^{t}$ به‌دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$\log ۲ \simeq ۰/۳۰۱$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $a^{\log_b a} = a \quad (b \neq ۱ , a , b > ۰)$

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad (d \neq ۱ , a , b , c , d > ۰)$

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log ۳ \simeq ۰/۴۷۷۱ , \log ۲ \simeq ۰/۳۰۱)$.

الف) $\log (۱۸ \times ۳۷۵)$

ب) $\log \sqrt{۰/۷۵}$

پ) $\log_{۲} \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}}$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

■ $\log_b a \times \log_a b = ۱$

■ $\log ۵ = \log ۳ + \log ۲$

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟