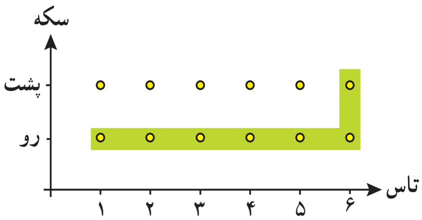
درس ۴ پیشامدهای مستقل و وابسته

دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم، سرشار از وقایعی است که به یکدیگر وابسته‌اند؛ مثلاً سونامی‌های بزرگ پس از زلزله‌های عظیم در داخل دریا اتفاق می‌افتند. بسیاری از رفتارهای انسانی نیز به یکدیگر وابسته‌اند؛ به عنوان مثال، اخلاق نیکوی یک فرد و روابط اجتماعی او به یکدیگر وابسته‌اند. از سوی دیگر بعضی از رخدادها به یکدیگر وابسته نیستند و اصطلاحاً، مستقل از یکدیگرند. آیا گروه خونی شما به گروه خونی دوستتان وابسته است؟ البته تشخیص وابستگی و یا مستقل بودن خیلی از پیشامدها، واضح نیست و به ابزاری دقیق برای بررسی آنها نیاز داریم.

فعالیت

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد.

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای A، B و $A \cap B$ را بنویسید.



$S=\{(\text{ر},۱), \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

$A=\{\dots\dots,\dots\dots\}$

$B=\{\dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots,\dots\dots\}$

$A \cap B=\{\cdots\cdots\}$

۲ احتمال وقوع پیشامدهای A، B و $A \cap B$ را تعیین کنید.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \quad , \quad \mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \quad ,$$

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{n(A \cap B)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید، یعنی $\mathrm{P}(A|B)$ را به دست آورید.

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

۳ با مقایسهٔ $\mathrm{P}(A|B)$ و $\mathrm{P}(A)$، آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A داشته است؟

۴ اگر $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$، چه رابطه‌ای بین $\mathrm{P}(A)$، $\mathrm{P}(B)$ و $\mathrm{P}(A\cap B)$ برقرار است؟

۵ در تساوی $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ را نتیجه بگیرید.

پیشامدهای A و B را **مستقل** می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر

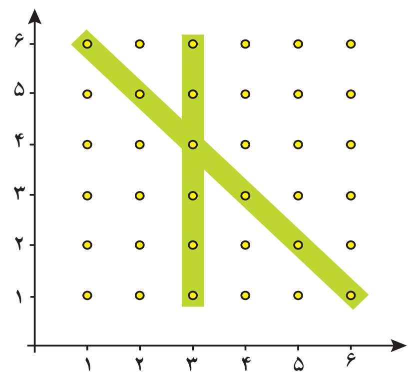
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، **وابسته** نامیده می‌شوند.

اگر $\mathrm{P}(A)$ و $\mathrm{P}(B)$ ناصفر باشند، برقراری تساوی $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ و یا تساوی $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ نیز مستقل بودن A و B را نتیجه می‌دهد. در فعالیت بالا، $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$، بنابراین، پیشامدهای A و B مستقل‌اند. مستقل بودن این دو پیشامد، یعنی رو آمدن سکه و ۶ آمدن تاس، بدون محاسبه احتمال‌ها نیز قابل مشاهده است، ولی مستقل بودن از پیشامدها چندان واضح نیست.

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهدهٔ عدد ۳ در تاس اوّل و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن A و B را بررسی می‌کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد. بنابراین، فضای نمونه‌ای این آزمایش $n(S)=۶\times۶=۳۶$ عضو دارد. اکنون پیشامدهای A، B و $A\cap B$ و احتمال های آنها را به دست می‌آوریم.



$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶},$$
$$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶},$$
$$A\cap B=\{(۳,۴)\}\Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$، بنابراین پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند.

مستقل بودن بسیاری از پیشامدها نیاز به بررسی ندارد؛ به عنوان مثال، قبولی در یک درس برای دو نفر، یا جنسیت فرزندان یک خانواده مستقل از یکدیگرند. از استقلال این پیشامدها می‌توانیم در حلّ مسائل استفاده کنیم.

مثال ۲) احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰ درصد است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود، را به دست می‌آوریم.

اگر $\mathrm{P}(A)$ احتمال قبولی زهرا و $\mathrm{P}(B)$ احتمال قبولی ریحانه در این درس باشد، احتمال قبولی حداقل یکی از آنها، همان $\mathrm{P}(A\cup B)$ است و می‌دانیم که :

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

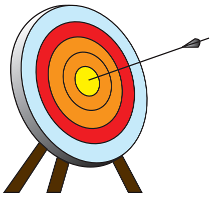
با توجه به مستقل بودن A و B، $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=۰/۹+۰/۷-۰/۶۳=۰/۹۷$$

کار در کلاس

۱ سکهٔ سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهدهٔ فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

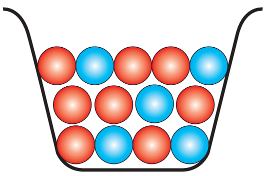
۲ در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اوّل و B را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل‌اند؟



۳ در یک مسابقهٔ تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری

مثال ۳) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است، دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهرهٔ اوّل و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد،



الف) احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

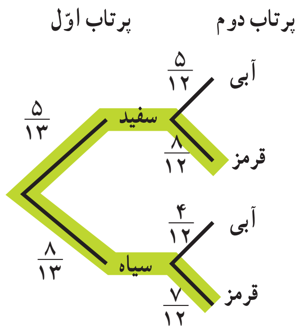
ب) پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا وابسته؟

حل) با توجه به رابطهٔ $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ در احتمال شرطی داریم :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

برای بررسی وابستگی یا استقلال این پیشامدها، $P(B)$ و $P(B|A)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. برای محاسبهٔ $P(B)$ از قانون احتمال کلی استفاده کرده و نمودار درختی انتخاب مهره‌ها و تعیین حالت مطلوب را نیز محاسبه کرده‌ایم.

$$P(B)=P\,(\text{مهرهٔ دوم قرمز})$$
$$=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')$$
$$=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}$$
$$=\frac{۸}{۱۳}$$



از سوی دیگر $P(B|A)=\frac{۸}{۱۲}$ ، پس $P(B|A)\neq P(B)$ ، بنابراین A و B وابسته‌اند.

کار در کلاس

در مثال صفحهٔ قبل، اگر مهرهٔ دوم را پس از جای‌گذاری مهرهٔ اوّل در جعبه بیرون آوریم. با محاسبهٔ $\mathrm{P}(B)$ و $\mathrm{P}(B|A)$، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید.

مستقل بودن پیشامدهای A و B در کار در کلاس بالا قابل حدس زدن است؛ زیرا با جای‌گذاری مهرهٔ اوّل انتخاب شده در جعبه، شرایط برای انتخاب مهرهٔ دوم، دقیقاً همانند انتخاب مهرهٔ اوّل است و در حقیقت آزمایش اوّل تکرار می‌شود. در حالت کلی، انتخاب‌هایی که با جای‌گذاری انجام می‌شوند، مستقل‌اند.

مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می‌شود.

سه پیشامد A، B و C را مستقل می‌گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$
$$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$
$$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n را مستقل می‌گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل‌ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال ۴) خانواده‌ای ۴ فرزند دارد.

الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اوّل و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل الف) فرض کنید A پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}\,(\text{دختر، دختر، دختر، دختر})$$
$$=\mathrm{P}(\text{دختر})\times \mathrm{P}(\text{دختر})\times \mathrm{P}(\text{دختر})\times \mathrm{P}(\text{دختر})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$
$$=\frac{۱}{۱۶}$$

حل ب) مشابه بالا، اگر B پیشامد دختر بودن فقط فرزند اوّل و آخر این خانواده باشد، سپس:

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}\,(\text{دختر، پسر، پسر، دختر})$$
$$=\mathrm{P}(\text{دختر})\times \mathrm{P}(\text{پسر})\times \mathrm{P}(\text{پسر})\times \mathrm{P}(\text{دختر})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$
$$=\frac{۱}{۱۶}$$

اکنون فرض کنید C پیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد، یکی از حالت‌ها به صورت زیر است :

فرزند اوّل	فرزند دوم	فرزند سوم	فرزند چهارم
دختر	پسر	دختر	پسر

و احتمال پیشامد بالا عبارت است از :

$$P(\text{دختر، پسر، دختر، پسر}) = P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) = \frac{۱}{۱۶}$$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به $۶ = \binom{۴}{۲}$ حالت میسّر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان $\frac{۱}{۱۶}$ است، بنابراین :

$$P(C) = ۶ \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

مثال ۵) ۸۰ درصد افراد شهری با سوادند. ۵ نفر از این شهر انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی‌سواد باشند را به دست می‌آوریم. احتمال اینکه اوّلین نفر بی‌سواد باشد، ۲۰ درصد یا ۰/۲ است. با توجه به اینکه جای‌گذاری انجام نشده است، بی‌سواد بودن فرد دوم مستقل از بی‌سوادی فرد اول نیست، ولی چون انتخاب از یک جامعه پر جمعیت انجام می‌شود، می‌توان فرض کرد که بی‌سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی‌سواد بودن هر کدام از آنها ۰/۲ است. پس :

$$\begin{aligned} P(\text{هر پنج نفر بی‌سواد}) &= P(\text{نفر اوّل بی‌سواد}) \times P(\text{نفر دوم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر سوم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر چهارم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر پنجم بی‌سواد}) \\ &= (۰/۲)^{۵} \\ &= ۰/۰۰۰۳۲ \end{aligned}$$

تمرین

۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

۳ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

الف) A' و B

ب) A' و B'

۴ در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اوّل باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۵ از مجموعهٔ $\{۱، ۲، ۳، \ldots، ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه :

الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

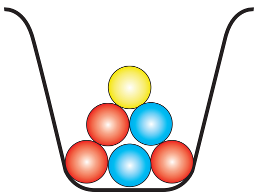
۷ یک سکه و دو تاس به‌طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هردو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

۸ در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

ب) تنها به پنج سؤال اوّل پاسخ صحیح داده باشد.

پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.



۹ در یک جعبه که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر دو مهره قرمز باشند.

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

پ) هر دو مهره همرنگ باشند.

۱۰ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۱۱ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همهٔ افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری که $P(A\cap B)=$ ۰/۱ و $P(A\cap B')=$ ۰/۴، حاصل $P(A\cup B')$ را به‌دست آورید.