درس ۴

اعمال روی توابع

همان‌گونه که عمل‌های جمع و ضرب در مورد دو عدد یا دو چندجمله‌ای انجام‌پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است. در فعالیت زیر مثالی واقعی از این موضوع بررسی می‌شود.

فعالیت

فاصله زمانی لحظه‌ای که راننده با یک مانع روبه‌رو می‌شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس‌العمل»می‌نامند.

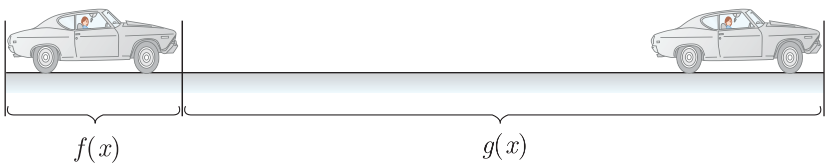
مجموع فاصلهٔ طی شده در طول زمان عکس‌العمل و فاصله طی شده پس از ترمزکردن را «فاصله دید توقف[1]» می‌نامند. این فاصله در طراحی جاده‌ها و بزرگراه‌ها کاربرد دارد.

فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی درحال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس‌العمل» طی می‌کند از تابع $f(x)=\frac{۷}{۱۰}x$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است.

همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می‌کند از تابع $g(x)=\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است و x سرعت اتومبیل برحسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر برساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می‌شود؟

ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.

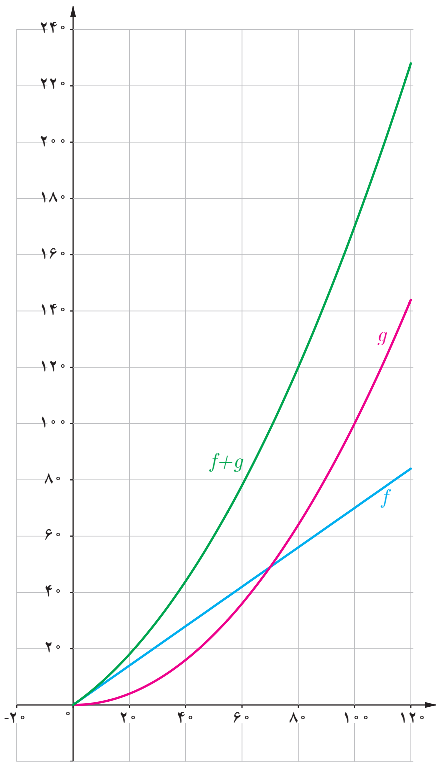


پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی درحال حرکت بوده است؟

۱ــ برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس‌العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب کاهنده ۳/۴ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که دامنهٔ آن مجموعهٔ $D_f \cap D_g$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g درحالت کلی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، ولی در این مسئلهٔ واقعی دامنهٔ تابع مجموعه‌ای مانند $[۰,۱۲۰]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است.

نمودارهای سه تابع f ، g و $f+g$، فعالیت قبل، در شکل روبه‌رو رسم شده است.

رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

کار در کلاس

۱ اگر $f(x) = x + ۲$ و $g(x) = \sqrt{x-۱}$ ، $f+g$ را محاسبه کنید. دامنهٔ تابع $f+g$ را به‌دست آورید.

۲ اگر $f = \{(۱,۲),(-۲,۵),(۰,۷)\}$ و $g = \{(۱,۵),(۲,۴),(۰,-۱)\}$

ابتدا دامنهٔ $f+g$ را به‌دست آورید و سپس $f+g$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

به‌طور کلی اگر f و g دو تابع باشند توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f.g)(x) = f(x) . g(x) \qquad D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{۳-x}$ و $h(x)=\dfrac{x+۲}{۲x+۱}$ توابع $f+g$ ، $g-h$ ، gh و $\dfrac{f}{g}$ را محاسبه کنید و دامنهٔ آنها را به‌دست آورید. کدام‌یک از مقادیر $(f+g)\,(۲)$ و $(f+g)\,(۵)$ وجود دارند؟

حل : ابتدا دامنه هریک از توابع را به‌دست می‌آوریم :

$$D_f=[-۲,\infty) \qquad D_g=(-\infty,۳] \qquad D_h=\mathbb{R}-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$$

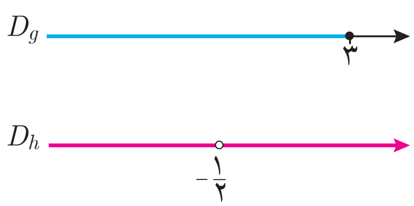
$(f+g)\,(۲)=۳$ ولی $(f+g)\,(۵)$ وجود ندارد.

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۲,۳] \qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳-x}$$

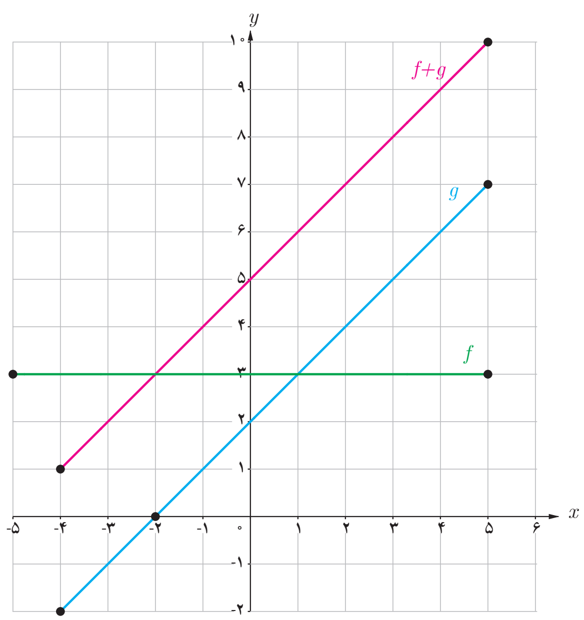
$$D_{g.h}=D_g\cap D_h=(-\infty,۳] \qquad (g.h)(x)=g(x)h(x)=(\sqrt{۳-x})(\frac{x+۲}{۲x+۱})$$

$$D_{g-h}=D_g\cap D_h=(-\infty,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},۳] \qquad (g-h)(x)=g(x)-h(x)=\sqrt{۳-x}-\frac{x+۲}{۲x+۱}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}=[-۲,۳]-\{۳\} \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۳-x}}$$



فعالیت



ـ در شکل روبه‌رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنهٔ f و دامنه g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.

ب) دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم.

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای توابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.

کار در کلاس

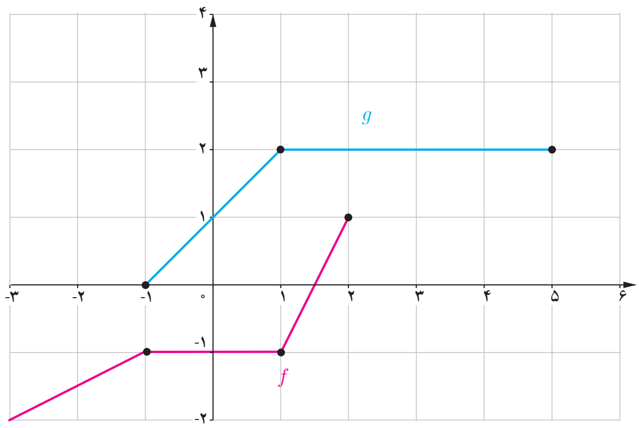
نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(۱)$ و $(f+g)(-۱)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ ، f و g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.



ترکیب توابع

با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.

فعالیت

تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

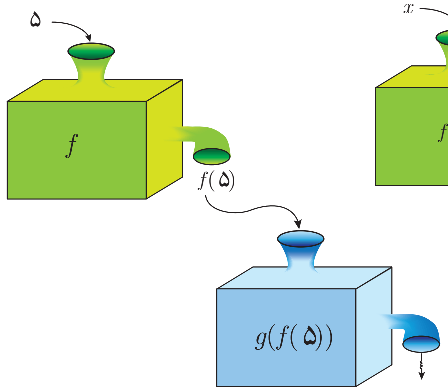
الف) $f(۳۲)=۰$ به چه معنی است؟ ۵۰ درجهٔ فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟

ب) تابع $g(x)=x+۲۷۳$ درجه سانتی‌گراد را به درجهٔ کلوین تبدیل می‌کند. $g(۰)=۲۷۳$ به چه معنی است؟

پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین درنظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلوین تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که ۵ درجهٔ فارنهایت معادل چند درجهٔ کلوین است؟

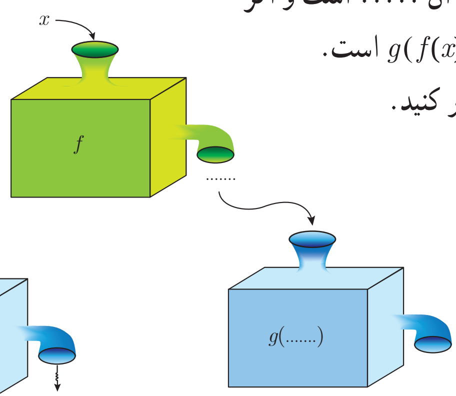
$f(۵)=\ldots\ldots$

$g(f(۵))=g(\ldots)$

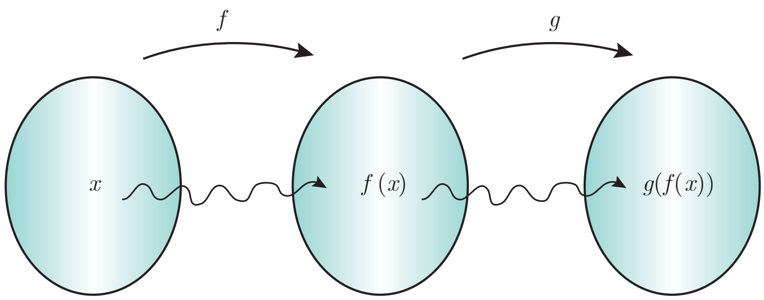


ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن ..... است و اگر ورودی تابع g، ...... باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



نمودارهای صفحه قبل را به‌صورت زیر هم می‌توان نمایش داد :



اما $g(f(x))$ را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟ داریم :

$$g(f(x)) = g(\frac{۵}{۹}(x-۳۲))$$

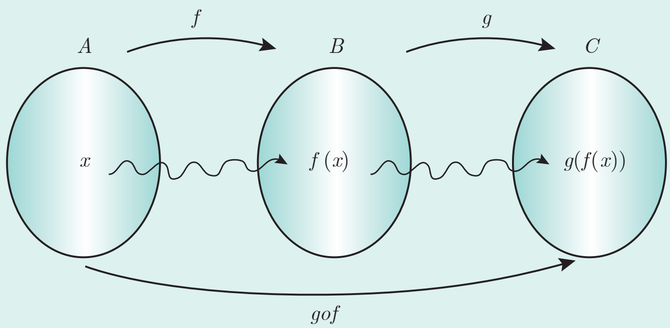
و می‌دانیم تابع g به هر ورودی ۲۷۳ واحد اضافه می‌کند. پس :

$$g(f(x)) = \frac{۵}{۹}(x-۳۲) + ۲۷۳$$

این یک تابع جدید است که درجه فارنهایت را به کلوین تبدیل می‌کند و به دلیل شیوهٔ محاسبه آن با gof (بخوانید جی‌اواف) نمایش داده می‌شود. در حقیقت gof نیز همانند ماشینی عمل می‌کند که ورودی x را به $g(f(x))$ تبدیل می‌کند.

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم : به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



به عبارت دیگر اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ آن‌گاه :

$$gof: A \to C$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) \qquad D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می‌توان تعریف کرد.

کار در کلاس

اگر $f(x) = x^{۲} + ۱$ و $g(x) = ۲x + ۳$

الف) دامنه و ضابطه تابع‌های fog و gof را به‌دست آورید.

ب) آیا تابع‌های gof و fog مساوی‌اند؟

مثال : اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = x^{۲} + ۳$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

حل : داریم،

$$D_g = \mathbb{R} \text{ و } D_f = [۱,\infty)$$

$$(fog)(x) = f(x^{۲}+۳) = \sqrt{x^{۲}+۳-۱} = \sqrt{x^{۲}+۲}$$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [۱,\infty)\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^{۲}+۳ \geq ۱\right\} = \left\{x \mid x^{۲} \geq -۲\right\} = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in [۱,\infty) \mid \sqrt{x-۱} \in \mathbb{R}\right\} = [۱,\infty)$$

$$(gof)(x) = g(\sqrt{x-۱}) = (\sqrt{x-۱})^{۲} + ۳$$

توجه کنید که gof برای اعداد کمتر از ۱ تعریف نشده است. به‌طور مثال $(gof)(\frac{۱}{۲})$ یا $(gof)(۰)$ معنی ندارد. با این شرط $(gof)(x)$ را به‌صورت زیر هم می‌توان نمایش داد :

$$(gof)(x) = x - ۱ + ۳$$

$$(gof)(x) = x + ۲ \quad x \in [۱,\infty)$$

کار در کلاس

اگر $f = \{(۱۱,۷), (-۲,۴), (۳,-۵), (-۵,۲)\}$ و $g = \{(۲,۱۱), (۴,-۲), (۶,۳), (۳,۲)\}$، ابتدا D_{fog} و D_{gof} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

تمرین

۱ اگر $f(x)=۴x$ و $g(x)=۲-x$، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید.

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید.

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(۴)=۷$ و $f(۷)=۵$ آن‌گاه $(fog)(۴)=۳۵$

ب) اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$ آن‌گاه $(\frac{f}{g})(۲)=۱$

پ) اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $fog=gof$

ث) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg=gf$

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=۲n \end{cases}$ و $f:A\to\mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ که در آن $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

۵ اگر $f=\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\}$ و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

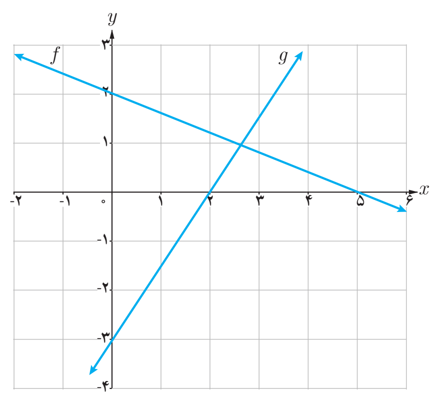
۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۷ اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=x+۳$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳ \quad , \quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

۸ اگر $f(x)=۲x+۵$ ، $f^{-۱}(x)$ ، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید.

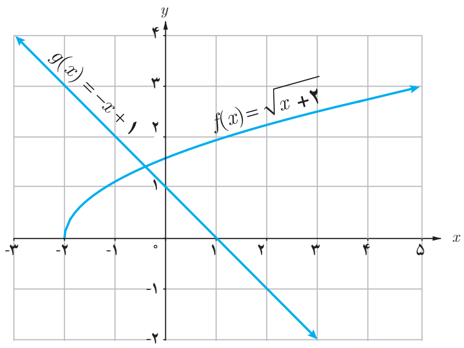
۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.



۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$ ب) $(f+g)(-۳)$ پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$ ث) $(\frac{f}{g})(۰)$ ج) $(gof)(-۱)$



۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ $(a \neq ۰)$ باز هم یک تابع خطی است.

۱۲ تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.