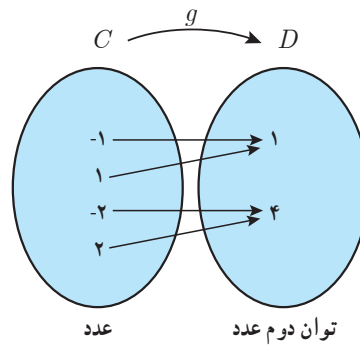
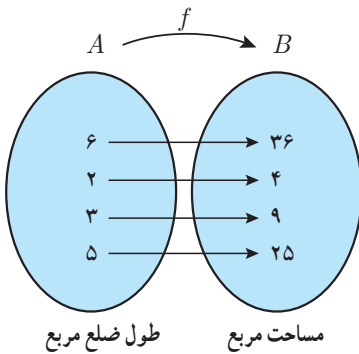


وارون توابع

فعالیت

دو تابع f و g را در نظر بگیرید:



الف) f و g را به صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$$f =$$

$$g =$$

$$D_f =$$

$$D_g =$$

$$R_f =$$

$$R_g =$$

ب) اگر جای دو مؤلفه هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به دست می‌آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

$$h =$$

$$k =$$

کدام یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید.

اگر رابطه بین دو مجموعه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به دست می‌آید وارون آن رابطه می‌نامیم.

اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

اگر f^{-1} تابع باشد آن گاه f را وارون پذیر (معکوس پذیر) و f^{-1} را «تابع وارون» f می‌نامیم.

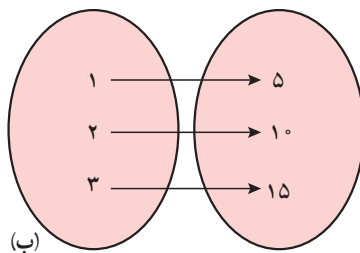
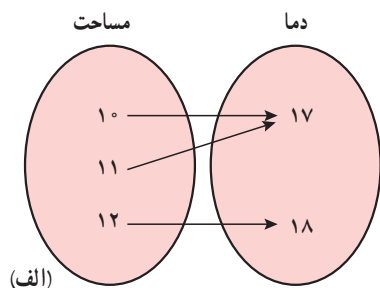
توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت.

توابع یک به یک

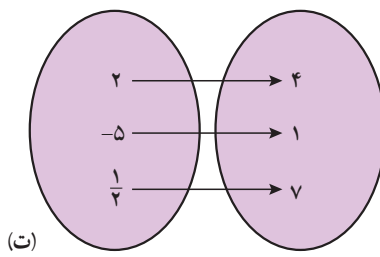
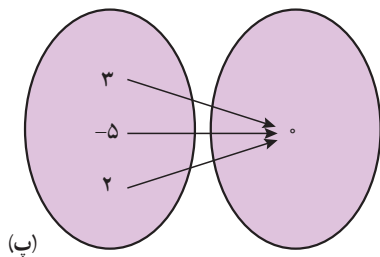
چه توابعی وارون پذیرند؟ در فعالیت قبل تابع f وارون پذیر بود ولی تابع g وارون پذیر نبود. بنابراین سؤال اساسی این است که یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون پذیر باشد؟

فعالیت

توابع زیر را در نظر بگیرید :



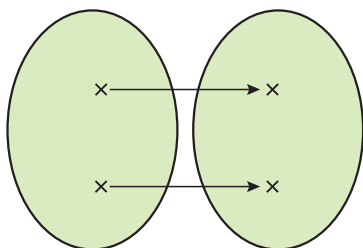
الف) کدام یک از آنها وارون پذیرند؟



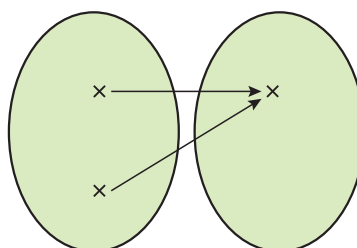
ب) ویژگی مشترک توابع وارون پذیر چیست؟

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

همان گونه که در فعالیت بالا دیده شد، اگر تابعی یک به یک باشد آن گاه وارون پذیر است.

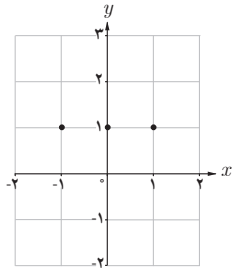


تابع یک به یک است.

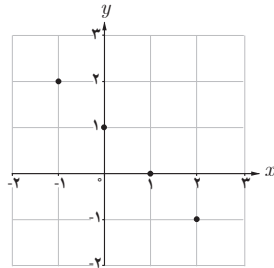


تابع یک به یک نیست.

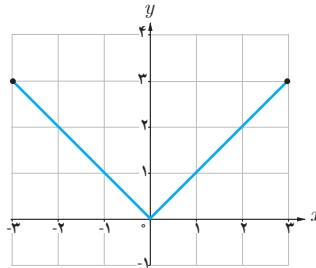
توابع داده شده در (الف) و (ب) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.



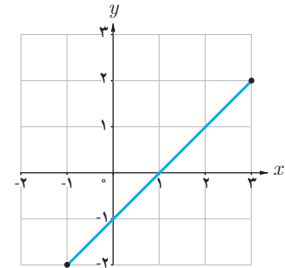
(ت)



(ب)



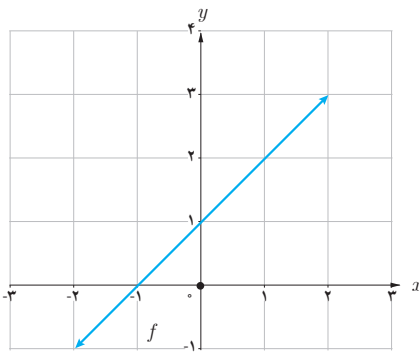
(ب)



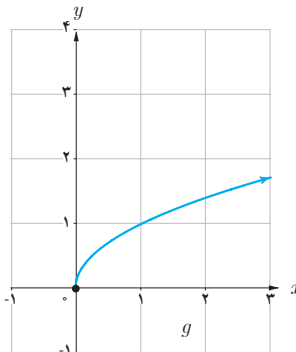
(الف)

به طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

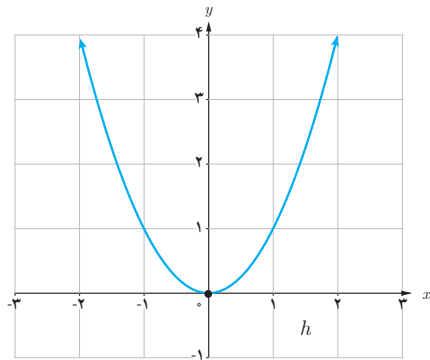
۱ کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



$$k = \{(1, 2), (3, 4), (8, 9)\}$$



$$l = \{(3, 7), (2, 5), (1, 5)\}$$



۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطه بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

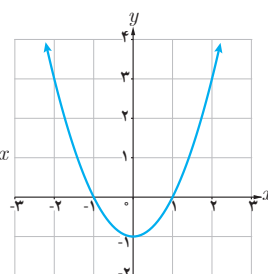
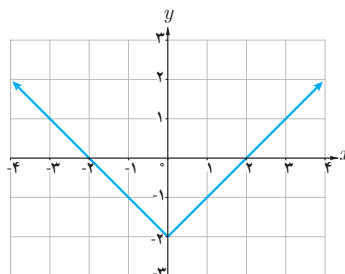
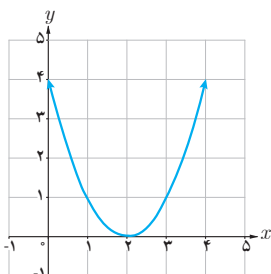
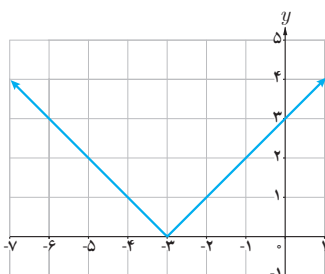
تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x+3|$

ب) $y = (x-2)^2$

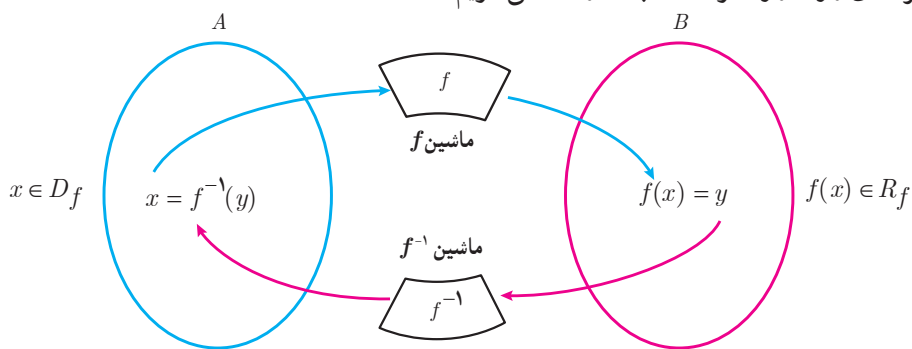
پ) $y = |x|-2$

ت) $y = x^2 - 1$

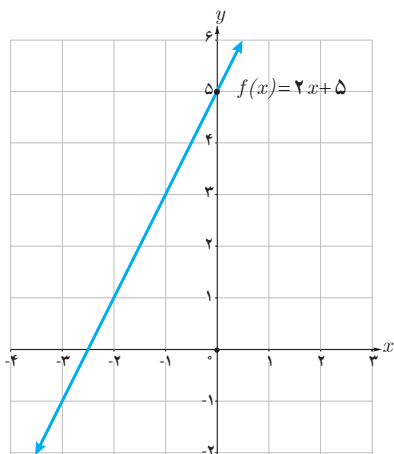


محاسبه وارون یک تابع

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر کارکرد f و f^{-1} را نشان می‌دهد. در فعالیت بعد به صورت جزئی‌تر با کارکردهای f و f^{-1} و نحوه محاسبه f^{-1} آشنا می‌شویم.



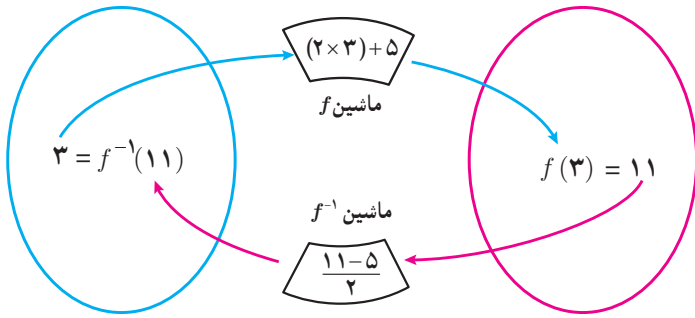
فعالیت



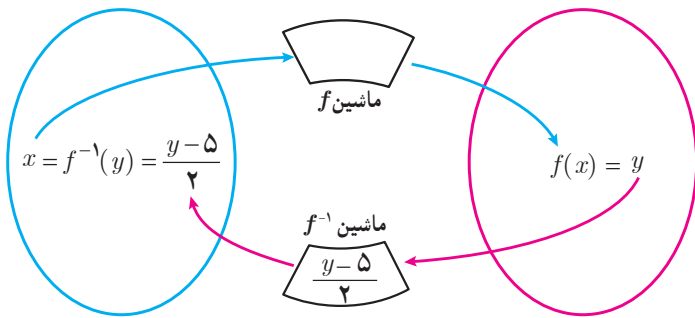
تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 5 \end{cases}$$

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.



ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید :
 $(3, 11) \in f$ و $(11, 3) \in f^{-1}$
 به عبارت دیگر $f(3) = 11$ و $f^{-1}(11) = 3$



ب) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$ ، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.

ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = 2x + 5 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2} \quad (y \in R_f)$$

f^{-1} را به صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(t) = \frac{t-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

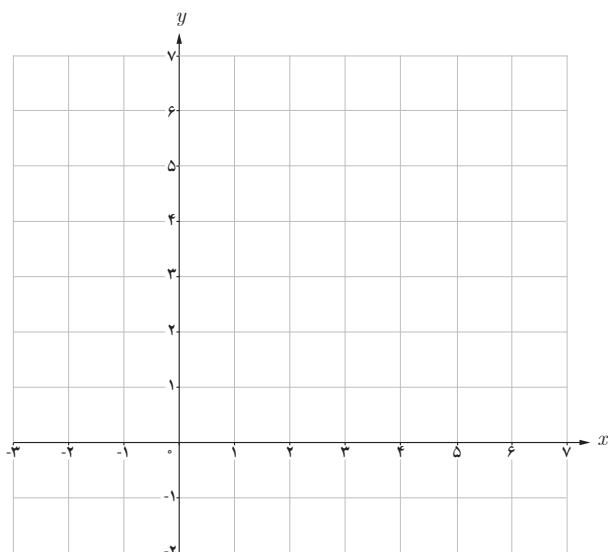
آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه f^{-1} همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f^{-1} به صورت زیر است :

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} \end{cases}$$

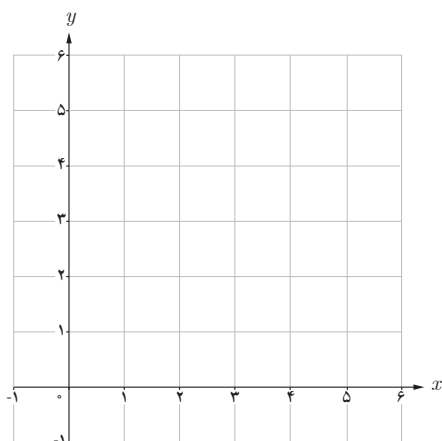
برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = 2x + 5 &\Rightarrow y = 2x + 5 \\ &\Rightarrow 2x = y - 5 \\ &\Rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \\ &\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2} \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2} \end{aligned}$$

کاردرکلاس



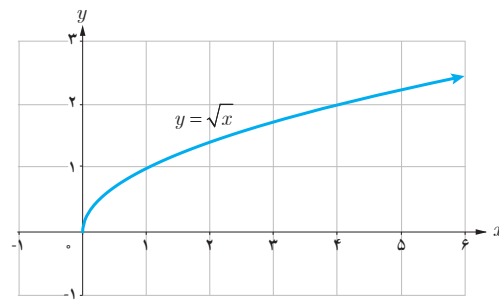
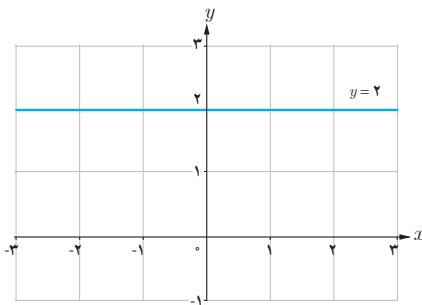
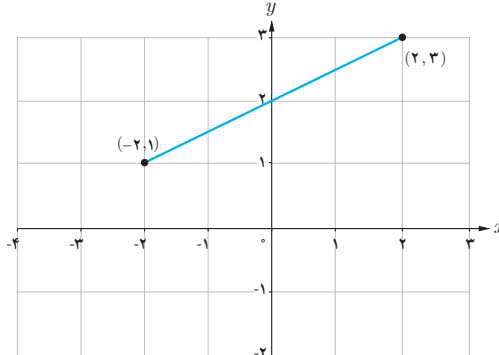
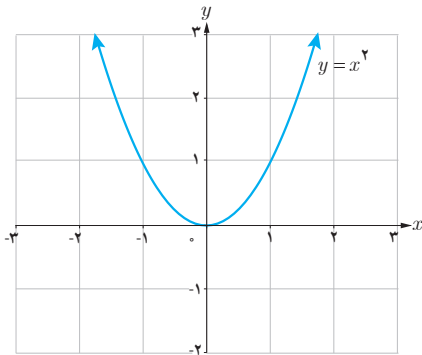
۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x) = 2x + 5$ نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



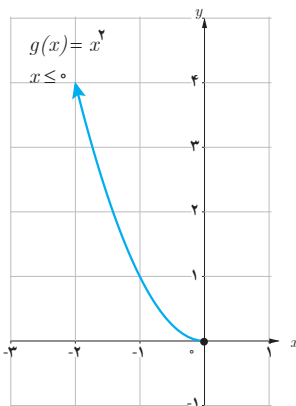
۲ اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x - 2}$ ، دامنه و برد f را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید. در معادله $y = \sqrt{x - 2}$ ضابطه f^{-1} را بنویسید. نمودار f^{-1} را رسم و دامنه و برد f^{-1} را معلوم کنید.

اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه f را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به دست آوریم.

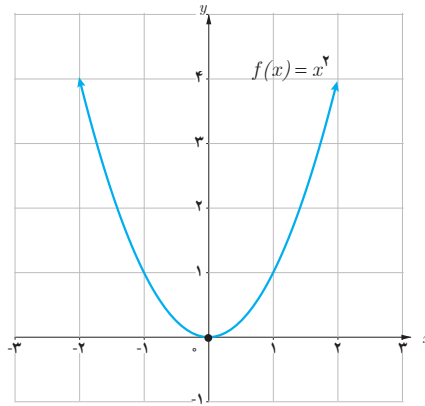
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک در همان دستگاه مختصات رسم کنید.



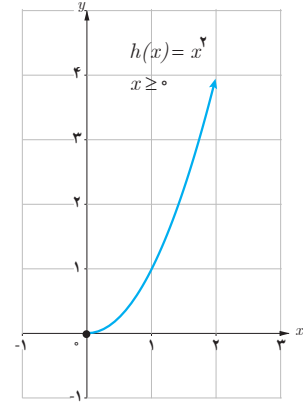
اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می‌توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازه $[0, \infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ تابعی یک به یک به دست می‌آید.



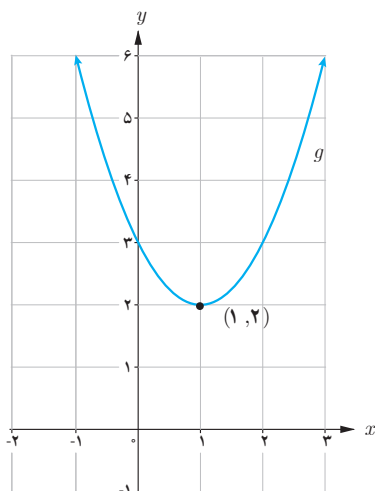
g یک به یک و وارون پذیر است.



f یک به یک نیست، وارون پذیر هم نیست.



h یک به یک و وارون پذیر است.



❖ **مثال:** نمودار تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست. به طور مثال $g(2) = g(0)$. می‌توان دامنه این تابع را محدود کرد و تابعی یک به یک به دست آورد و سپس وارون آن را حساب کرد.
در مورد تابع g داریم:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R} \text{ و } R_g = [2, +\infty)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

دامنه f را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم و تابع جدید را f می‌نامیم.
بنابراین تابع جدید به صورت زیر خواهد بود که تابع یک به یک و وارون پذیر است.

$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x-1)^2 + 2 \end{cases}$$

$$D_f = [1, +\infty) \quad , \quad R_f = [2, +\infty)$$

اکنون سعی می‌کنیم x را بر حسب y به دست آوریم:

$$y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = y - 2 \Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{y - 2}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین:

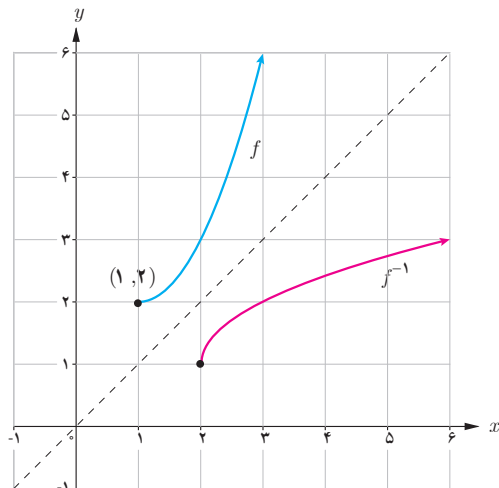
$$x - 1 = \sqrt{y - 2} \Rightarrow x = \sqrt{y - 2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1$$

در حقیقت داریم:

$$\begin{cases} f^{-1}: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1 \end{cases}$$

$$D_{f^{-1}} = [2, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

نمودار f و f^{-1} در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.



۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

۲ آیا تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{4}$ است؟

۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست

آورید:

الف) $f(x) = (x + 5)^2$, $x \geq -5$

ب) $f(x) = -|x - 1| + 1$, $x \geq 2$

پ) $f(x) = (x - 3)^2$

ت) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می آید.

الف) دامنه و برد h را به دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به دست آورید.

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

آبشار پیران (استان کرمانشاه)

