



امروزه به خدمت گرفتن انرژی هسته‌ای بدون آگاهی از علم فیزیک و انجام محاسبات پیچیده با کمک ابررایانه‌ها ممکن نیست. بخشی از این محاسبات به واکنش‌های هسته‌ای مربوط است؛ هنگامی که یک نوترون به سمت جسی رادیواکتیو شلیک می‌شود، پس از طی مسیری، یا از جسم خارج می‌شود، یا جذب یک اتم می‌شود و یا اتمی را متلاشی می‌کند و در نتیجه چند نوترون و مقداری انرژی به وجود می‌آید. نوترون‌های آزادشده این زنجیره با سرعتی بسیار بالا ادامه می‌دهند. بررسی چنین واکنشی با استفاده از شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای انجام می‌شود و مدل‌های احتمالاتی در آن نقشی بنیادی دارند.

## احتمال

## ۲

- ۱ مبانی احتمال
- ۲ احتمال غیر هم‌شانس
- ۳ احتمال شرطی
- ۴ پیشامدهای مستقل وابسته

## آمار و احتمال به چه کار می آیند؟

فرض کنید کارشناسان یک کارخانه تولید لوازم خانگی می خواهند برای سال آینده، تغییراتی در میزان تولید کالاهای کارخانه به وجود آورند؛ آنها باید مشخص کنند که سرمایه کارخانه به چه نسبت هایی صرف تولید یخچال، کولر، اجاق گاز و... شود. با توجه به اینکه آنها در مورد آنچه در آینده رخ خواهد داد، اطمینان ندارند، چگونه می توانند در این مورد تصمیمی درست بگیرند؟ چگونه می توانند از بین دو پیشنهاد مختلف، یکی را بر دیگری ترجیح دهند؟

ابزارهای حل چنین مسائلی، که با ناآگاهی نسبی از شرایط و یا وقایع آینده همراه است، علم آمار و علم احتمال است.

به کمک علم آمار می توان اطلاعات سال های گذشته کارخانه را به درستی جمع آوری کرد و از آنها توصیفی مناسب از وضعیت تقاضای کالاهای مختلف به دست آورد و سپس به سؤال هایی مانند «در سال آینده تقاضای یخچال، کولر، اجاق گاز و... چگونه خواهد بود؟» پرداخت. در قدم بعدی، علم احتمال کمک می کند که به بهترین تصمیم ممکن برسیم.

به طور خلاصه بخشی از این دو علم به نوعی در جهت عکس هم اند: آن گاه که با جامعه ای ناشناخته سر و کار داریم، شناختن جامعه با استفاده از نمونه ها و داده های کار آماری است، ولی اگر جامعه را

با جزئیات مورد نیاز بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود، علم احتمال به کمک ما می آید. در شکل روبه رو، این موضوع نشان داده شده است؛ ظرفی که در آن مهره های رنگی وجود دارد، مانند جامعه است و مهره هایی که در مشت هستند، مانند نمونه اند.



علم احتمال: بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم



علم آمار: شناختن جامعه نامعلوم، با استفاده از نمونه های جمع آوری شده معلوم

کدام یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت‌وگو کنید.

احتمال	آمار	صورت مسئله
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱- می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲- درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳- ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴- در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط پرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵- چه تعداد از دانش‌آموزان پایه یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟

### ریاضی‌دان‌ها چگونه به علم احتمال می‌پردازند؟

ریاضی‌دانان معمولاً برای حل مسائل سخت و پیچیده، ابتدا کار را از طراحی و حل مسائلی ساده شروع می‌کنند و سپس قدم به قدم با ساختن بنایی استوار از تعاریف، مفاهیم، قضیه‌ها و... به سراغ مسائلی می‌روند که شاید در نگاه اول دست‌نیافتنی به نظر می‌رسیدند. بیایید مانند ریاضی‌دان‌ها مسئله ساده‌ای را که در آن اطمینان وجود ندارد، بررسی کنیم:

### فعالیت



برق‌کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی، به ترتیب، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند؛ در اولی سه لامپ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟ جواب این سؤال ساده است: در جعبه اول ۶۰ درصد و در جعبه دوم ۰٫۰۰۰ درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبه اول را انتخاب کند.

اکنون فرض کنید دو جعبه همان شرایط را دارند، ولی برق‌کار از آن جعبه، دو لامپ، بدون آزمایش، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟ در این حالت، تصمیم‌گیری به سادگی حالت اول نیست.

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبه اول مذکور انتخاب کرد؟ در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ مشابه همین سؤال‌ها را در مورد جعبه دوم بررسی کنید. با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه را برای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

چنین مسائلی هر چند ساختگی‌اند، ولی ماهیت آنها بسیار شبیه همان مسئله‌ای است که کارشناسان کارخانه با آن مواجه بودند: تصمیم‌گیری برای آینده‌ای که در مورد وقایع آن اطمینان نداریم.

## خواندنی

## از احتمال کیفی تا احتمال کمی

واژه احتمال و مشابه‌های آن مانند شانس، بخت، تصادف در بین مردم عامی هم رایج است: «فردا به احتمال زیاد باران می‌بارد»، «تیم والیبال ایران برای راه‌یابی به المپیک شانس زیادی در آینده دارد» و... مردم گاهی برای توصیف احساس خود در این موارد، از اعداد نیز استفاده می‌کنند، ولی منظور آنها صرفاً بیان یک حس کیفی است: «به احتمال ۹۹ درصد هفته بعد طلا گران می‌شود»، «تیم انتهای جدول یک درصد هم شانس قهرمان شدن ندارد» و... شما نیز چند مثال بزنید که مردم یا رسانه‌ها از عباراتی که معنای احتمال و عدم اطمینان می‌دهند استفاده می‌کنند. آیا شما مثالی در زندگی روزمره خود سراغ دارید که احتمال را با عدد بیان کنید و منظورتان فراتر از صرفاً بیان یک حس کیفی باشد؟

علم احتمال این عدم اطمینان کیفی را کمی می‌کند؛ یعنی آن را به عدد تبدیل می‌کند تا در چارچوب علم ریاضی قرار بگیرد و بتوان با کمک محاسبات ریاضی به نتایجی روشن‌تر، دقیق‌تر و قابل اثبات و اتکا رسید.

## ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

معمولاً وقتی از احتمال رخ دادن رویدادی صحبت می‌کنیم، آن رویداد را به شکل یک گزاره بیان می‌کنیم؛ مثلاً می‌گوییم احتمال اینکه «فردا باران بیارد»، احتمال اینکه «نتیجه مسابقه فوتبال هفته آینده تساوی شود»، احتمال اینکه «متهم دستگیر شده، مجرم باشد» و... ولی ریاضی‌دانان گاهی به شکل دیگری احتمال را به کار می‌برند. برای روشن شدن این موضوع، همان مثال قبلی را به یاد بیاورید: فرض کنید برق کار جعبه اول را انتخاب کرده و می‌خواهد از بین ۵ لامپ یکی را بردارد. لامپ‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم به نحوی شماره‌های ۱ تا ۳ سالم و شماره‌های ۴ و ۵ معیوب باشند.

شماره لامپی که بیرون کشیده می‌شود برای برق کار معلوم نیست، ولی به هر حال یکی از اعضای مجموعه زیر است:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

همان‌طور که می‌دانید در علم احتمال به این مجموعه «فضای نمونه» گفته می‌شود.

به هر عضو فضای نمونه یک «برآمد» می‌گویند.

برق کار در صورتی راضی می‌شود که لامپ انتخابی سالم باشد و این یعنی اینکه شماره لامپ ۱، ۲ یا ۳ باشد. در این صورت، این اتفاق را هم می‌توان با یک زیرمجموعه فضای نمونه مشخص کرد:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

همان‌طور که در سال‌های گذشته خوانده‌اید در علم احتمال به این زیرمجموعه‌ها «پیشامد» گفته می‌شود. در زبان علم احتمال به جای اینکه بگوییم «لامپ انتخاب شده سالم باشد»، می‌توانیم بگوییم «پیشامد  $A$  رخ دهد» و به جای اینکه بگوییم «احتمال سالم بودن لامپ انتخابی»، می‌توانیم بگوییم «احتمال رخ دادن  $A$ ». عبارت اخیر خلاصه‌شده این عبارت است «احتمال اینکه شماره لامپ انتخابی عضو  $A$  باشد».

## کار در کلاس



زهرا و شبینم در مورد سؤالی که دربارهٔ پرتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟

- زهرا: فضای نمونه در این مسئله مجموعه  $\{1, 2, \dots, 6\}$  است.
- شبینم: بله، من هم موافق هستم. سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد  $\{2, 4, 6\}$  رخ داده است؟
- زهرا: به نظرم نه، چون ۴ و ۶ هم علاوه بر ۲ عضو این پیشامدند.
- شبینم: ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد، شامل عدد ۲ است.
- زهرا: پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟
- شبینم: یعنی باید آنها هم در پرتاب تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً این‌طور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد  $\{2, 4, 6\}$  رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را پرتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟!

با توجه به مفهوم «رخ دادن یک پیشامد» می‌فهمیم که اگر  $A_1$  و  $A_2$  دو پیشامد باشند، آن‌گاه:

- الف) اگر  $A_1$  زیرمجموعه  $A_2$  باشد، رخ دادن  $A_1$  رخ دادن  $A_2$  را نتیجه می‌دهد.
- ب) رخ دادن پیشامد  $A_1 \cap A_2$ ، یعنی هر دو پیشامد  $A_1$  و  $A_2$  رخ دهد.
- پ) رخ دادن پیشامد  $A_1 \cup A_2$ ، یعنی دست‌کم یکی از دو پیشامد  $A_1$  و  $A_2$  رخ دهد.

## تشخیص فضای نمونه



هرگاه بخواهیم مسئله‌ای را با کمک علم احتمال بررسی کنیم قدم اول شناختن فضای نمونه است. همان‌طور که گفته شد فضای نمونه مجموعه‌ای است که اعضای آن، که به آنها برآمد می‌گوییم، مشخص می‌کنند که نتیجه آزمایش یا مشاهده‌ای که در حال بررسی آن هستیم چه حالت‌هایی دارد؛ مثلاً در پرتاب یک تاس، مجموعه  $\{1, 2, \dots, 6\}$  فضای نمونه است.

اگر بخواهیم نتایج حاصل از پرتاب دو تاس را بررسی کنیم از عمل ضرب دکارتی مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم؛ مجموعه  $\{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$  که ۳۶ عضو دارد فضای نمونه است. البته لازم است که یکی از تاس‌ها را تاس اول و دیگری

را تاس دوم بنامیم تا مشخص شود که معنای برآمد (۱,۲) چیست. توجه داشته باشید که این برآمد غیر از برآمد (۲,۱) است.

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونه  $S_1$  و  $S_2$  باشد فضای نمونه آن  $S_1 \times S_2$  است. مشابه این موضوع برای هر تعداد آزمایش هم‌زمان نیز درست است.



مثال: یک راننده تاکسی خطی، در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، چیست؟

حل: با توجه به اینکه تعداد این دو نوع مسافر در رفت و در برگشت عددی بین صفر و چهار است، می‌توان مجموعه زیر را فضای نمونه گرفت:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

در این فضای نمونه، منظور از برآمد (۱,۲) این است که تاکسی با ۱ مسافر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر سوار کرده است.

## اصول احتمال



در حالت کلی شناختن فضای نمونه برای توصیف یک رویداد تصادفی کافی نیست. علاوه بر آن لازم است که بدانیم احتمال رخ دادن پیشامدهای مختلف که زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌اند، چقدر است. این موضوع را در درس بعد که در مورد احتمال غیرهم‌شانس است بهتر متوجه خواهید شد. به‌عنوان مثال، به وضعیت آب و هوای قله دماوند در صبح نوروز سال آینده فکر کنید؛ می‌توان فضای نمونه را این چنین در نظر گرفت:

{ آفتابی، ابری }

آیا چون فضای نمونه دو عضوی است باید احتمال هر کدام ۵۰ درصد باشد؟ ممکن است کسی فضای نمونه را به شکل زیر انتخاب کند:

{ آفتابی، ابری بدون بارندگی، بارش باران، بارش برف، بارش تگرگ }

در این صورت آیا چون فضای نمونه پنج عضو دارد، باید احتمال هر کدام ۲۰ درصد باشد؟ اگر کسی به هر دو سؤال بالا جواب مثبت دهد، پس احتمال آفتابی بودن را یک بار ۵۰ درصد و یک بار ۲۰ درصد دانسته است!

## یک اشتباه تاریخی



مشهور است که دالامبر<sup>۱</sup>، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، فیلسوف و دائرةالمعارف‌نویس فرانسوی قرن هجدهم، تصور می‌کرد که اگر یک سکه را دو بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً یک بار رو بیاید، برابر یک سوم است. او این‌گونه استدلال می‌کرد:

در چنین آزمایشی سه حالت وجود دارد: «هر دو رو»، «هر دو پشت» و «یک بار رو و یک بار پشت». در نتیجه احتمال وقوع هر یک از این حالات یک سوم است!

همان‌طور که گفته شد نکته این است در یک فضای نمونه برآمدهای مختلف ممکن است احتمال برابر نداشته باشند. در این حالت، محاسبه احتمال برآمدها و پیشامدها ممکن است ساده نباشد، ولی احتمال پیشامدهای مختلف حتماً باید ویژگی‌هایی داشته باشد که به آنها اصول احتمال می‌گویند:

برای هر پیشامد مثل  $A$ ، احتمال رخ دادن آن با  $P(A)$  نمایش داده می‌شود که عددی حقیقی در بازه  $[0, 1]$  است. اصول احتمال عبارت‌اند از:

$$P(S) = 1 \quad 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{برای هر دو پیشامد } A \text{ و } B \text{ که } A \cap B = \emptyset \text{ داریم} \quad 2$$

به خاصیتی که در بند ۲ برای دو پیشامد  $A$  و  $B$  فرض شده است، یعنی  $A \cap B = \emptyset$ ، ناسازگاری این دو پیشامد گفته می‌شود و به این معناست که رخ دادن هر دوی آنها هم‌زمان محال است. در غیر این صورت، می‌گوییم  $A$  و  $B$  سازگارند.

## قضیه

در مورد هر فضای نمونه، گزاره‌های زیر درست است:

$$P(A') = 1 - P(A) \quad 1$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad 2$$

۳ اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آن‌گاه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

(این قسمت را می‌توان برای هر تعداد پیشامد نیز تعمیم داد).

۴ برای هر دو پیشامد دلخواه  $A$  و  $B$  داریم  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

<sup>۱</sup> Jean Baptiste le Rond d'Alembert (۱۷۱۷-۱۷۸۳)



۵ برای هر دو پیشامد دلخواه  $A$  و  $B$  داریم:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .  
اثبات.

۱ به این موضوع توجه کنید که  $A$  و  $A'$  دو پیشامد ناسازگارند و اجتماع آنها برابر  $S$  می‌شود، داریم:

$$1 = P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

۲ با توجه به اینکه  $\emptyset$  متمم  $S$  است داریم:

$$P(\emptyset) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$$

۳ توجه کنید که  $A$  و  $BU C$  نیز دو پیشامد ناسازگارند و لذا

$$P(A \cup BU C) = P(A) + P(BU C) = \dots$$

۴ واضح است که  $A = (A - B) \cup (A \cap B)$  و پیشامدهای  $A - B$  و  $A \cap B$  ناسازگارند، پس

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

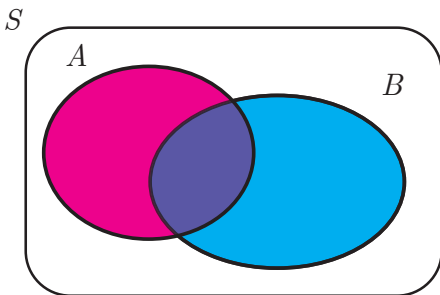
و این نتیجه می‌دهد که  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

۵ توجه کنید که  $A \cup B = B \cup (A - B)$  و به‌علاوه دو پیشامد  $B$  و

$A - B$  ناسازگارند. در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B)$$

با استفاده از شماره ۴ حکم نتیجه می‌شود. (چرا؟)



## کار در کلاس

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱ دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کند،

$A$ : متولد ماه مهر باشد،

$B$ : متولد فصل تابستان باشد.

۲ سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید،

$A$ : هر سه بار مشابه بیاید،

$B$ : زوج بار رو بیاید.

۳ فردا

$A$ : خورشید در آسمان دیده شود،

$B$ : باران بیارد.

۴ تاسی را در بی‌پرتاب می‌کنید،

$A$ : برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید،

$B$ : تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.





۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می‌شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟



۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک

لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات‌شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر  $B \subseteq A$  داریم:  $P(A-B) = P(A) - P(B)$ .

ب) اگر  $B \subseteq A$ ، آنگاه  $P(B) \leq P(A)$ .

۵ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.