

درس ۲

مجموعه - زیر مجموعه

یادآوری: در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید؛ برای مثال، مجموعه اعداد اول یک رقمی به صورت زیر است:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $A = \{x \in P \mid x < 10\}$ نوشت که در آن P مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه A است، می‌نویسیم: $2 \in A$ ، از طرفی واضح است که $6 \notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعه A تعلق ندارد.

کار در کلاس

۱ فرض کنید $A = \{a, b\}$ ، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$\{a\} \in A \quad \text{الف) } \emptyset \in A \quad \text{ب)}$$

$$\{a\} \subseteq A \quad \text{پ) } b \subseteq A \quad \text{ت)}$$

$$a \in A \quad \text{ث) } \{a, b\} \subseteq A \quad \text{ج)}$$

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی‌اند؟

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \text{ و } 2x = 4\} \quad \text{الف) } \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 8 = 8\} \quad \text{ب)}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq x\} \quad \text{پ) } \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 7x\} \quad \text{ت)}$$

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m\}$$

$$C = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 - 1 = 0\}$$

$$D = \{a \in S \mid \text{فضای نمونه پرتاب یک تاس است}\}$$

۴ با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳، درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$$B \in A \quad B \subseteq A \quad A \cap D \subseteq C$$

$$B \subseteq C \cup A \quad C \not\subseteq A \quad B - D \subseteq A$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فعالیت

مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

۲ با دو رقم 0 و 1 می‌توانیم زیرمجموعه $B = \{b, c\}$ از مجموعه A را با کد سه رقمی 011 مشخص کنیم؛ چون $a \notin B$ متناظر با آن کد 0 و $c \in B$ و b متناظر با آنها کد 1 را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه $A \subseteq \{a\}$ را با کد 001 متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیهٔ زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.



۴ فرض کنید $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، با روش کدگذاری با رقم‌های 0 و 1 و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.



۵ اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ در این صورت، با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.



فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

مثال: مجموعه $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های A را در یک مجموعه بنویسید.

خواندنی

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A ، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. اگر A ، n عضو داشته باشد، در این صورت $P(A)$ ، 2^n عضو دارد. اگر $A \subseteq B$ به طوری که $A \neq B$ ، آن‌گاه A زیرمجموعهٔ محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

مثال: مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل: فرض کنیم A ، n عضو داشته باشد، پس دارای 2^n زیرمجموعه است؛ اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A ، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد؛ یعنی در این حالت، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $2^n + 48$ است. از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید، برابر است با 2^{n+2} است. بنابراین داریم:

$$2^n + 48 = 2^{n+2} = 2^n \times 2^2$$

$$\Rightarrow 2^n + 48 = 4 \times 2^n \Rightarrow 4 \times 2^n - 2^n = 48$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^n = 48 \Rightarrow 2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

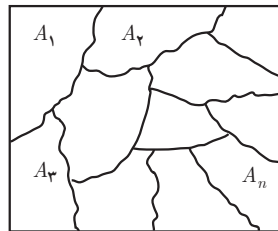
در نتیجه مجموعه A ، چهار عضوی است.

افراز یک مجموعه

فعالیت

- ۱ مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از \emptyset را بنویسید.
- ۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی A که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با A شود.
- ۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به دست آورید.
- ۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با A شود؟ فرض کنیم $A \neq \emptyset$ یک مجموعه و A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه A_1, A_2, \dots, A_n افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

A



- I) $\forall 1 \leq i \leq n; A_i \neq \emptyset$
- II) $\forall i, j (i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset)$
- III) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$

کار در کلاسی

مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

- ۱ $\{1, 3, 5\}$ و $\{2, 6\}$ و $\{4, 8, 9\}$
- ۲ $\{1, 3, 5\}$ و $\{2, 4, 6, 8\}$ و $\{5, 7, 9\}$
- ۳ $\{1, 3, 5\}$ و $\{2, 4, 6, 8\}$ و $\{7, 9\}$

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B باشد، در این صورت A را زیرمجموعه B نامیده و می‌نویسند $A \subseteq B$. اگر عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A \subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت:

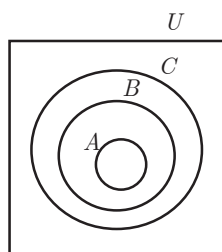
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x ; (x \in A \wedge x \notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است. بنابراین، با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A \subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.

ویژگی ۱- فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ثابت کنید $A \subseteq C$.



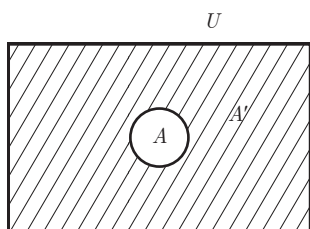
اثبات: برای اثبات $A \subseteq C$ ، باید ثابت کنیم که: $\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in C)$
برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x ; x \in A \stackrel{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \stackrel{B \subseteq C}{\Rightarrow} x \in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

ویژگی ۲- فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \subseteq B$. ثابت کنید $B' \subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).
قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با مجموعه اعضای U است که متعلق به مجموعه A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.



$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x \in A$ آن گاه $x \notin A'$ یا اگر $x \in A'$ آن گاه $x \notin A$.
اثبات: برای اینکه ثابت کنیم $B' \subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $\forall x ; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x ; (x \in B' \Rightarrow x \notin B \stackrel{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

$$\forall x ; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

در نتیجه داریم:

ویژگی ۳- برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید: $\emptyset \subseteq A$.
 اثبات: برای اثبات $\emptyset \subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x; (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی، ارزش مقدم یعنی $x \in \emptyset$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\emptyset \subseteq A$.

کار در کلاسی

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq A \cup B$.
 اثبات:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$

بنابراین داریم:
 درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

۲ فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.
 اثبات: جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x; [x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow \dots & (A \subseteq B \text{ زیرا}) \\ \vee & \vee \\ \dots \Rightarrow x \in D & (C \subseteq D \text{ زیرا}) \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow \dots$$

بنابراین داریم:

$$\forall x; [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow \dots$$

۳ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آن‌گاه $(A \cup B) \subseteq C$.
 راهنمایی: از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A=B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

کار در کلاسی

فرض کنید $A = \{1, 2\}$ ، کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

(ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

(الف) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

(ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

(پ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\}$

مثال: فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: $A \cap B = B \cap A$. (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

اثبات: برای اثبات حکم باید درستی دو رابطه زیر را نشان دهیم:

$$A \cap B \subseteq B \cap A \quad (۱) \quad ; \quad B \cap A \subseteq A \cap B \quad (۲)$$

اثبات (۱):

$$\forall x; [x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \quad (\text{طبق خاصیت جابه‌جایی } \wedge)$$

$$\Rightarrow x \in B \cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطه (۲) را نشان داد.

مثال: فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $A - B = \emptyset$.

اثبات:

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in B \wedge x \notin B\} = \emptyset \quad (\text{زیرا } A \subseteq B)$$

$$\Rightarrow A - B = \emptyset$$

تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید:

$$A = \{x \mid x \text{ یک چهارضلعی است}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ یک لوزی است}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یک مستطیل است}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ یک مربع است}\}$$

کدام یک از روابط زیر درست است؟ (با ذکر دلیل)

$$B \subseteq D \quad (\text{ب})$$

$$D \subseteq C \quad (\text{الف})$$

$$D \subseteq A \quad (\text{ت})$$

$$A \subseteq B \quad (\text{پ})$$

۲ فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۸, ۹\}$ و $B = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $C = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ و $D = \{۳, ۴, ۵\}$ و $E = \{۳, ۵\}$.

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید: X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

$$X \subseteq A \quad \text{ولی} \quad X \not\subseteq C \quad (\text{ب})$$

الف) X و B عضو مشترکی ندارند.

$$X \subseteq C \quad \text{ولی} \quad X \not\subseteq A \quad (\text{ت})$$

$$X \subseteq D \quad \text{ولی} \quad X \not\subseteq B \quad (\text{پ})$$

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\} \quad (\text{ب})$$

$$\emptyset = \{\emptyset\} \quad (\text{الف})$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\} \quad (\text{ت})$$

$$\emptyset \notin \{\emptyset\} \quad (\text{پ})$$

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < ۲\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq ۲y\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq ۱\}$$

$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + ۲m = ۳m^2\}$$

۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

(الف) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \notin C$

(ب) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \in C$

(پ) $A \in B$ و $A \subseteq B$

۶ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

۷ اگر $A = \{2, x+2y, 4\}$ و $B = \{4, 5, x-y\}$ و $A=B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

۸ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم: $A-B \subseteq A$.

۹ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه:

(الف) $A \cup C \subseteq B \cup C$ (ب) $A \cap C \subseteq B \cap C$

۱۰ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه:

(الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$ (ب) $A \cap C \subseteq B \cup D$

۱۱ (الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید: $A = \emptyset$. (ب) فرض کنید $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$.

۱۲ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید:

(الف) $B-A = B$ (ب) $A-B = A$

۱۳ فرض کنید: $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای X محسوب می‌شود.

(الف) $\{d, g\}$ و $\{b\}$ و $\{a, c, e\}$ (ب) $\{b, e, f\}$ و $\{c, d\}$ و $\{a, e, g\}$

(پ) $\{d, f\}$ و $\{c\}$ و $\{a, b, e, g\}$ (ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

(ث) $\{e\}$ و $\{f, g\}$ و $\{d\}$ و $\{b, c\}$ و $\{a\}$