

جبر و معادله



فصل

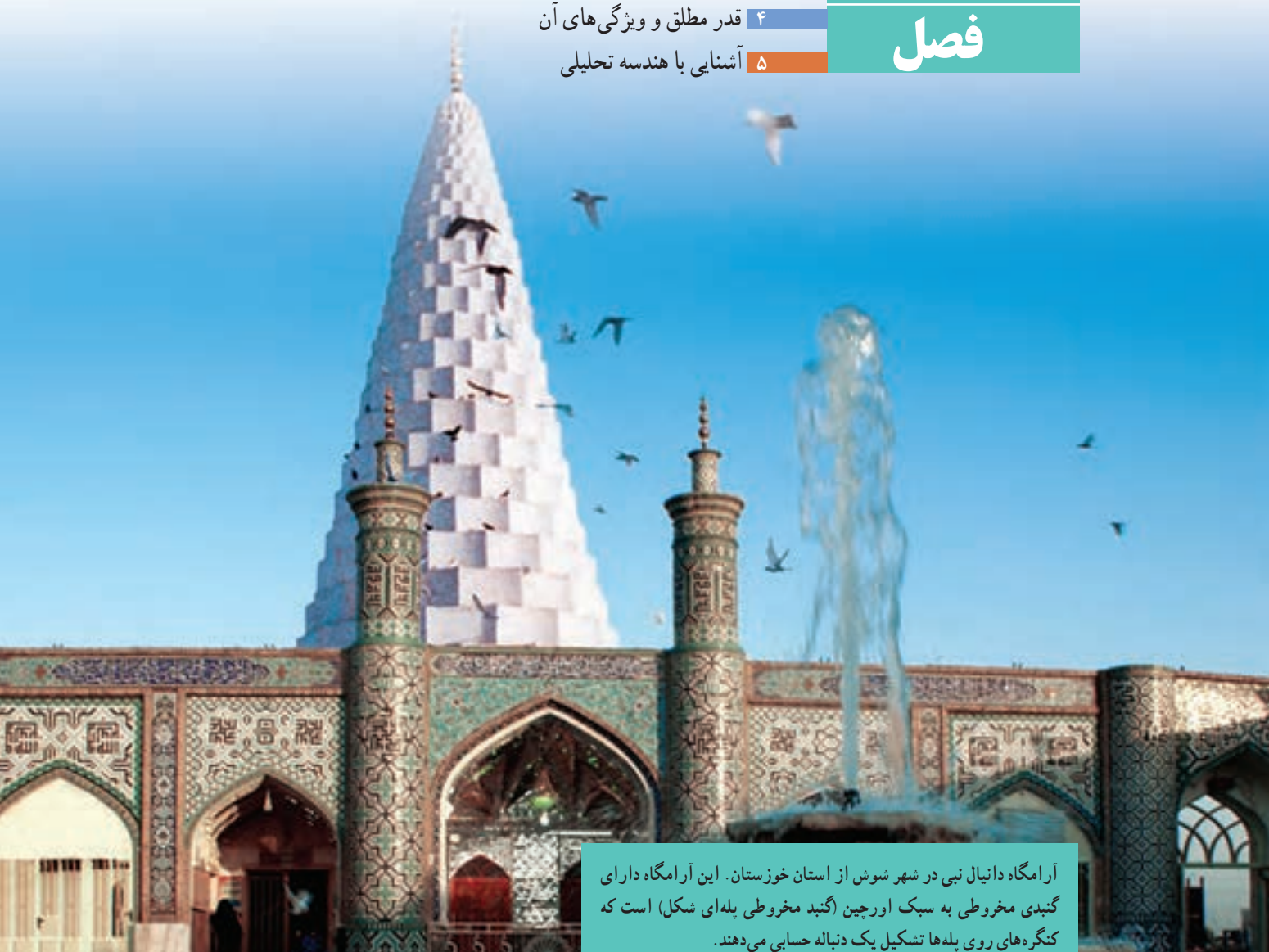
۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۲ معادلات درجه دوم

۳ معادلات گویا و گنگ

۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۵ آشنایی با هندسه تحلیلی



آرامگاه دانیال نبی در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی



درس

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعه اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی به دست آوردن مجموع اعداد طبیعی 1 تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبه مجموع جملات هر دنباله حسابی برسیم.

فعالیت



تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چندتا است؟

۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \dots$$

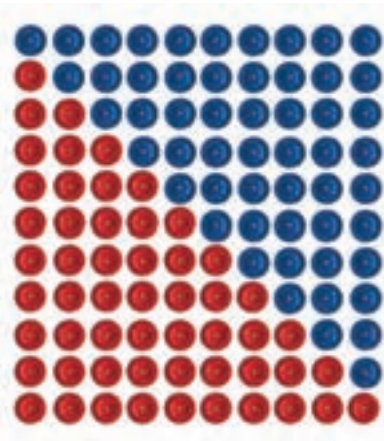
۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.

در این شکل تعداد ردیف‌ها \dots و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف \dots است، پس تعداد کل دگمه‌ها برابر \dots است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس:

$$\text{تعداد کل دگمه‌ها} = \frac{\text{تعداد دگمه‌های قرمز}}{2} = \dots$$

۳ برای محاسبه مجموع اعداد طبیعی 1 تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\
 S &= n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \\
 \hline
 2S &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ تا}} \\
 2S &= n(n+1) \\
 S &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$



$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

❖ **مثال:** روی محیط دایره‌ای 2° نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

❖ **حل:** نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19}{2} (1+19) = 190$$

❖ **تذکر:** این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

فعالیت

خواندنی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایق را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود، ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. زمانی که گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود، روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست مداد و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید: چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد: حل شد! معلم با تعجب گفت: این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت: خیلی هم آسان بود. سپس گفت: اول چنین نوشتم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

و بعد چنین:

$$100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 3 + 2 + 1$$

و جفت جفت از اول تا آخر جمع کردم:

$$101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ به دست آوردم که حاصل ضرب آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

دنباله حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-2)d, a+(n-1)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-2)d) + (a+(n-1)d)$$

❶ حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $2S_n$ را به دست آورید. نتیجه خواهید گرفت:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

❖ **مثال:** مجموع صد جمله اول دنباله حسابی $3, 7, 11, 15, \dots$ را به دست آورید.

❖ **حل:** جمله اول ۳، تعداد جمله‌ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت:

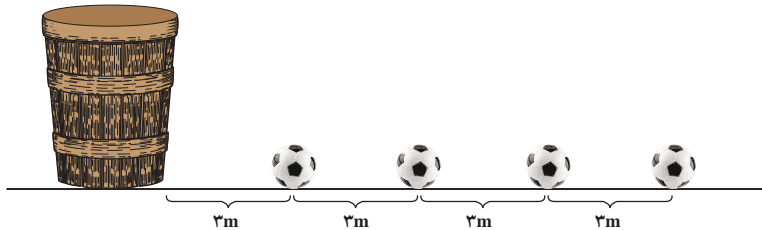
$$S_{100} = \frac{100}{2} [(2 \times 3) + (99 \times 4)] = 50 \times 402 = 20100$$

۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

۲ مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

❁ **مثال:** در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



❁ **حل:** دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $3+3=6$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می دهد. اگر n تعداد توپ های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید. ($a \neq 0$)

$$a, a, a, \dots, a$$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. ($q \neq 1$)

$$a, aq, aq^2, \dots$$

الف) جمله n ام دنباله چیست؟

ب) فرض می‌کنیم مجموع n جمله اولیه دنباله هندسی S_n باشد:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

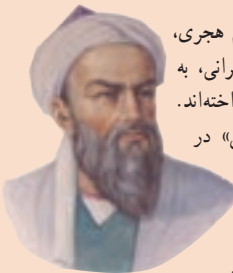
طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم:

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

اگر $S_n - S_n q$ را تشکیل دهیم، پس از ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم:

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

خواندنی



در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی، به بررسی دنباله‌های ریاضی پرداخته‌اند. از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود «آثار الباقیه عن القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع یک دنباله هندسی

است که جمله اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد، حل کرده است. او با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را عدد ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ به دست آورده است. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد؛ وقتی مخترع شطرنج، بازی خود را به شاه عرضه کرد، شاه از او خواست پاداشی بخواهد. دانشمند پاسخ داد: برای خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم دو دانه گندم و برای خانه سوم چهار دانه گندم و همین‌طور برای هر خانه دو برابر خانه پیش از آن گندم بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسید. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند. قبول کردند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا کردند. سپس معلوم شد که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم به دست نمی‌آید! ابوریحان بیرونی با استدلال ریاضی به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $2^{64} - 1$ دانه است. او برای محسوس کردن این عدد می‌گوید: در سطح کره زمین $23^{\circ}5$ کوه را در نظر می‌گیریم، اگر از هر کوه 10000 رود خارج شود در طول هر رودخانه 1000 قطار قاطر حرکت کنند. و هر قطار شامل 1000 قاطر باشد و همراه هر قاطر ۸ کیسه گندم قرار داده باشیم که در هر کیسه 10000 دانه گندم باشد، باز هم عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج کوچک‌تر خواهد بود.

مجموع 10° جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

مثال: برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هر یک از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک دست کم تا ۹۷ درصد کاهش یابد؟

حل: اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می‌کند $(\frac{1}{4})$ و... بدین ترتیب دنباله‌ای از اعداد به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا حاصل حداقل ۹۷ درصد شود.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3}$$

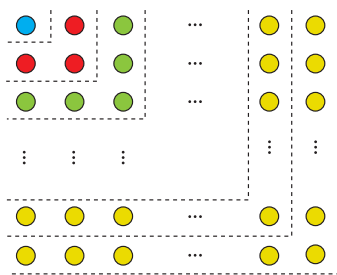
با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $2^6 = 64$ در می‌یابیم که حداقل مقدار n برای برقراری نامساوی فوق برابر با ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل شش تا باشد.

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دوبرابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

(الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟

(ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد.

تمرین



۱ در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

۲ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

۳ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

۴ در 2^0 جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد $1, 3, 5, \dots$ و مجموع جملات شماره‌های زوج $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۵ جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۷ برای عدد حقیقی a ($a \neq 1$) و عدد طبیعی n :

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

۲

درس

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است ($a \neq 0$) که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ به دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کاردرکلاس

۱ معادله $3x^2 = 5x - 2$ را حل کنید.

۲ اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

پل پارک جزیره (اهواز - استان خوزستان)



روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$ax^2 + bx + c = 0$	مقدار هر ریشه x_2 و x_1		جمع ریشه‌ها (S)	ضرب ریشه‌ها (P)	a	b	c	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$2x^2 - 5x + 2 = 0$									
$4x^2 - 3x - 7 = 0$	-1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	4	-3	-7	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	1								
$5x^2 + 6x - 8 = 0$		$\frac{4}{5}$							

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

ب) در جدول بالا بین حاصل ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، نشان دهید:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = (\quad) (\quad) = \frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشند این روابط برقرار است.

$$S = \frac{-b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

❁ **مثال:** اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها

به‌دست آورید.

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-1)x_2 = \frac{-7}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{4}$$

❁ **حل:** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow -1 + \frac{7}{4} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 3$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و -۳ باشند راه حل زیر ارائه شده است. مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

۲ اگر $x_1 = \alpha$ و $x_2 = \beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشند.

❖ **مثال:** محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌متر مربع است. ابعاد مستطیل را به‌دست آورید.

❖ **حل:** فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب x_1 و x_2 باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{33}{2}, \quad x_1 x_2 = 65$$

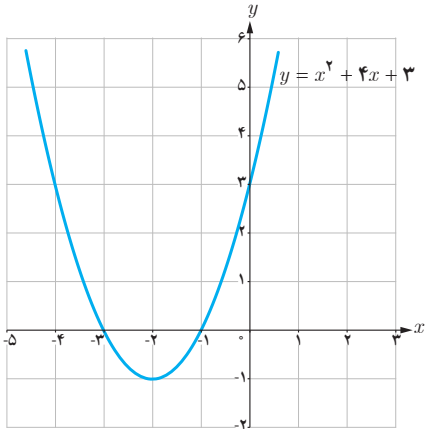
معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = \frac{33}{2}$ و $P = 65$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{33}{2}x + 65 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 33x + 130 = 0$$

از حل معادله اخیر $x_1 = 10$ یا $x_2 = 10$ به‌دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به ترتیب 10 و $\frac{13}{2}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت



نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + 4x + 3$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

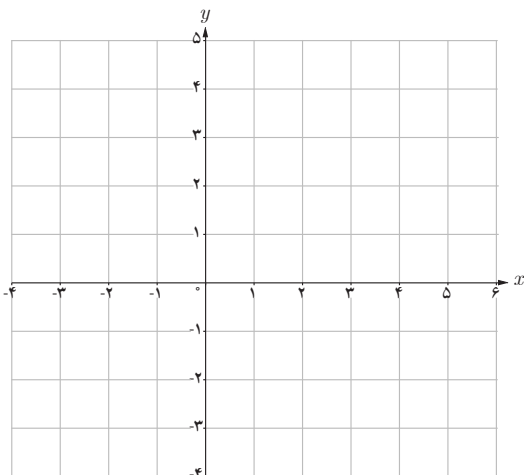
۱ معادله $f(x) = 0$ را حل کنید و جواب‌های آن را به دست آورید.

۲ محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x) = 0$ دارد؟

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقداری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور x هستند.

کارد کلاس



۱ نمودار سهمی‌های $f(x) = x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$ را رسم کنید.

۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ چه می‌توان گفت؟

❖ **مثال:** اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند نشان دهید

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

❖ **حل:** از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و

داریم:

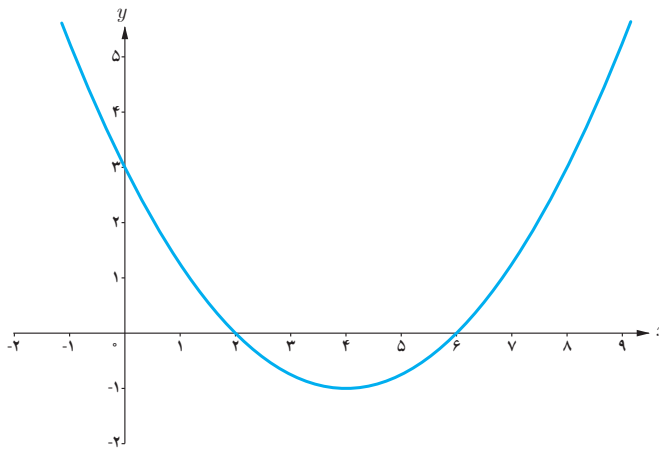
$$a(x - x')(x - x'') = a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'')$$

$$= a(x^2 - Sx + p)$$

$$= a\left[x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= ax^2 + bx + c$$

❖ **مثال:** اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول: از آنجا که $x' = 2$ و $x'' = 6$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که در مثال قبل آمده

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$$

است می‌توان نوشت:

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند و داریم.

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

روش دوم: از آنجا که $f(0) = 3$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$ ؛ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

$$\frac{c}{a} = 12 \Rightarrow \frac{3}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a} = 8$ و $a = \frac{1}{4}$ پس $b = -2$ و در نتیجه $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادله کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

۱ با توجه به معادله $f(x) = 0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) دو ریشه مثبت دارد. (شکل‌های ۸ و ۹)

(ب) دو ریشه منفی دارد. ()

(پ) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. ()

(ت) ریشه ندارد. ()

(ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. ()

(ج) یک ریشه دارد. ()

(چ) حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است. ()

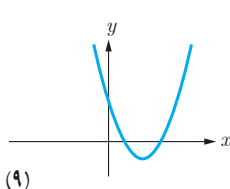
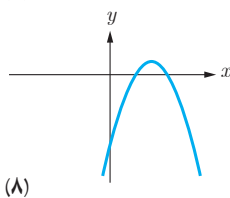
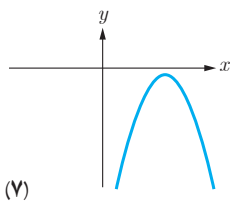
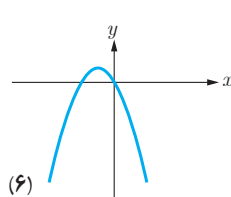
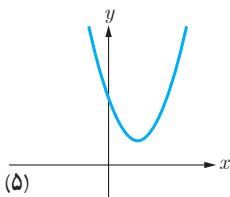
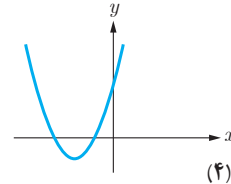
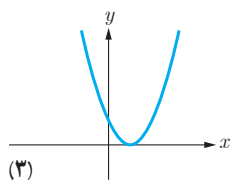
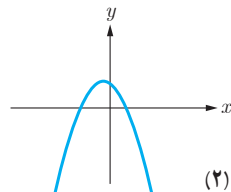
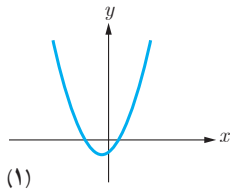
(ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. ()

۲ با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

شماره شکل	ویژگی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f		۲				۰				
علامت a		+				+			-	
علامت b		+				-	-			
علامت c		-				+		-		

❖ **تذکر:** ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال

زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور x ها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور y ها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c > 0$ و طول نقطه مینیمم تابع، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a} > 0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b < 0$.



$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{- \quad -} \\
 x^3 - 2x^2 \\
 \underline{- \quad -} \\
 x^2 - 4x \\
 \underline{- \quad -} \\
 x^2 - 2x \\
 \underline{- \quad -} \\
 -2x + 4 \\
 \underline{- \quad -} \\
 -2x + 4 \\
 \underline{- \quad -} \\
 0
 \end{array}$$

❖ **مثال:** اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

❖ **حل:** از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به صورت $x-2$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می یابیم. می توان نوشت $p(x) = (x-2)(x^2+x-2)$. آنگاه از حل معادله $p(x) = 0$

$$\begin{cases}
 x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\
 x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}
 \end{cases}$$

داریم:

صفرهای تابع p برابر $-2, 1, 2$ می باشند.

کارد کلاس

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

❖ **مثال:** صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = (x^2-1)^2 + (x^2-1) - 2$ را به دست آورید.

❖ **حل:** هر چند معادله $f(x) = 0$ از درجه چهار است اما می توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t = x^2 - 1$ ، معادله به صورت $t^2 + t - 2 = 0$ در می آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t = x^2 - 1$ مقادیر x را می یابیم.

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = -2$$

$$\begin{cases}
 t = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\
 t = -2 \Rightarrow x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ غیر قابل قبول}
 \end{cases}$$

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f ، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می باشد.

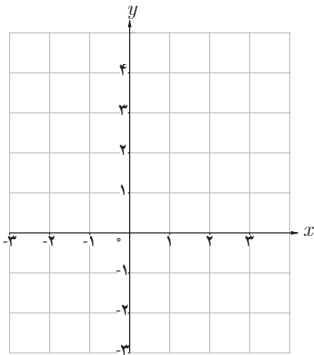
برخی از معادلات را می توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

کارد کلاس

همه صفرهای تابع $f(x) = x^3 - 10x^2 + 16x$ را به دست آورید.

روش هندسی حل معادلات

فعالیت



۱ معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$ را حل کنید.

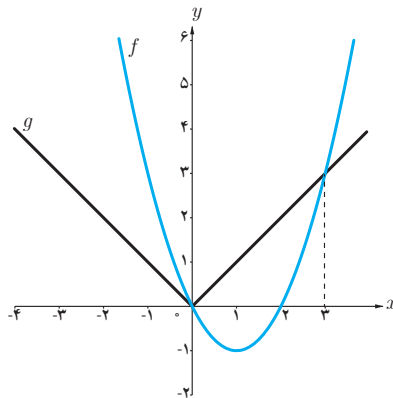
۲ نمودار دو تابع $y = (x-1)^2$ و $y = \frac{1}{4}x + 1$ را رسم کنید.

۳ چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$ و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است. این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

❖ **مثال:** به روش هندسی معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

❖ **حل:** با فرض $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = |x|$ ، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم:



$$x=3, \quad x=0$$

با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت‌اند از:

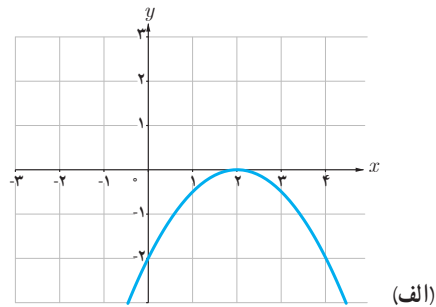
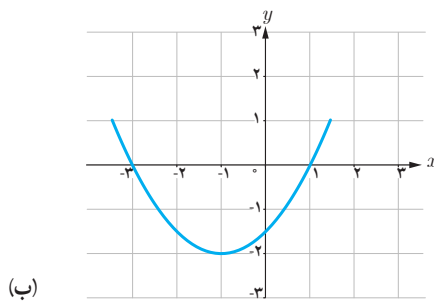
که جواب‌های معادله $|x| = x^2 - 2x$ می‌باشند.

۱ معادله درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



۳ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود.

ارتفاع این موشک (h) در زمان t ، از رابطه $h(t) = -16t^2 + 144t$ به دست می‌آید.

ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به دست آورید.

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 4x$

ب) $g(x) = 2x^2 + x^2 + 3x$

پ) $h(x) = x^2 + 3x^2 + 5$

۵ معادلات زیر را حل کنید.

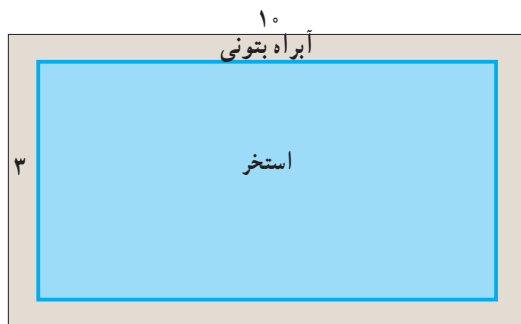
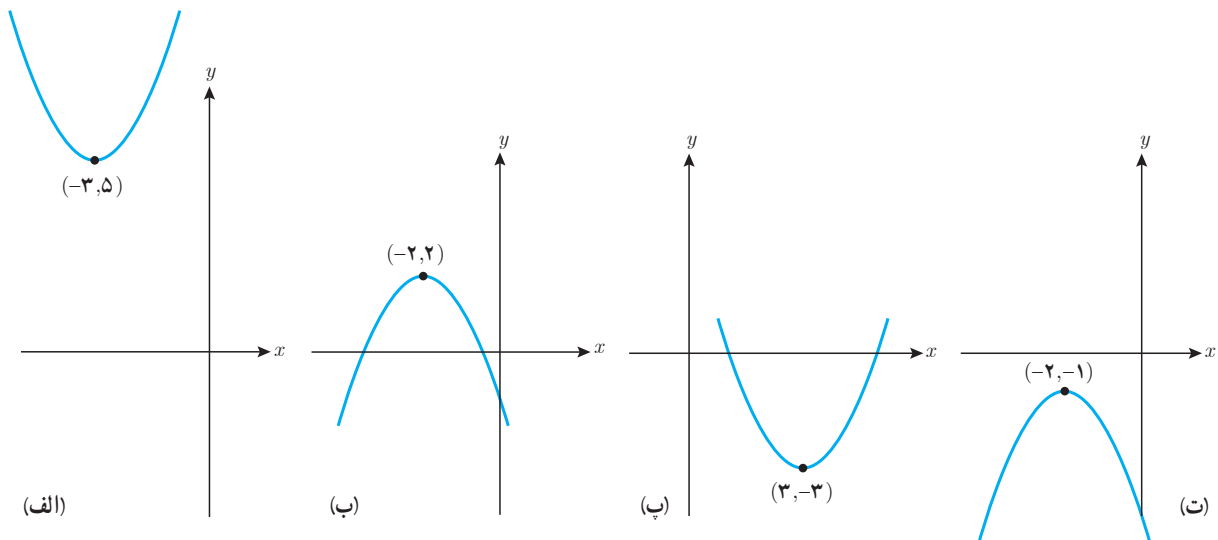
الف) $x^2 - 3x^2 - 4 = 0$

ب) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$

پ) $(4-x^2)^2 - (4-x^2) = 12$

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول 10 و عرض 3 متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت 14 مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت $52/8$ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی متر است؟