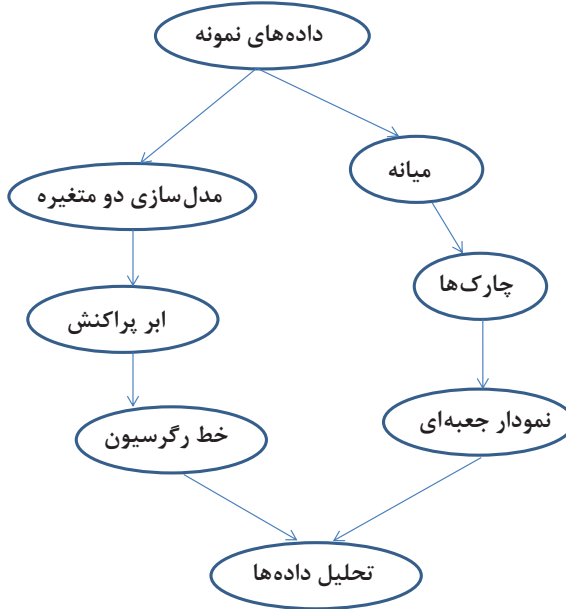


پودمان پنجم

آمار توصیفی

طرح کلی مفاهیم پودمان پنجم (نقشه مفهومی)



اهداف کلی

- آشنایی با روش‌های مدل‌سازی و تحلیل داده‌های دو متغیره
- استفاده از شاخص‌های مرکزی برای تحلیل داده‌ها

پیش‌نیازهای پودمان

- آشنایی با مختصات یک نقطه
- مهارت نقطه‌یابی در صفحه مختصات
- مهارت کار با نمودار تابع‌های خطی
- آشنایی با میانگین و موارد استفاده از آن
- مهارت کار با نرم‌افزار *Excel*

		استانداردهای فرایندی	
فرایند	توصیف فرایند	مثال	
مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	تیین مناسب نبودن میانگین در توصیف وضعیت پرداخت حقوق ها و نیاز به معرفی شاخصی جدید	
	شناخت و به کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل	استفاده از معادله و نمودار در پیش‌بینی	
ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ارائه توضیح برای معناداری مقدار پیش‌بینی در برون‌یابی	
	برای بیان نظریات خود از زبان ریاضی به‌طور دقیق استفاده کند.	مدل‌سازی به کمک معادله خط بهترین برازش	
استدلال و اثبات	انواع مختلف استدلال و روش‌های اثبات را انتخاب کرده و به کار برند و آنها را ارزیابی کنند.	ارائه دلیل برای چرایی وجود تفاوت بین مقدار پیش‌بینی شده توسط معادله و به کمک خط بهترین برازش	
پیوندها و اتصالات	ریاضیات را در سایر مضامین بیرون از چهارچوب موضوع ریاضیات (کاربردها در علوم دیگر) تشخیص داده و به کار گیرند.	تفسیر وضعیت‌های زندگی روزانه به کمک میانه و نمودار جعبه ای	
	پیوستگی بین موضوع‌های ریاضی (اتصال جبر و آمار)	ارتباط بین جبر (معادله خطی) و آمار (ابر پراکنش و خط بهترین برازش)	
بازنمایی‌ها	جهت حل مسئله بازنمایی‌های مناسب را انتخاب نموده، معنی کند و به کار گیرد.	استفاده مناسب از نمودار جعبه‌ای	
	از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و مقایسه پدیده‌های فیزیکی و ریاضی استفاده کند.	مدل‌سازی به کمک خط بهترین برازش	
سایر مهارت‌های تفکر	پیش‌بینی کردن	پیش‌بینی به کمک درون‌یابی و برون‌یابی	
	تصمیم‌سازی	تصمیم‌گیری و تصمیم‌سازی به کمک تحلیل‌های آماری	
	مقایسه کردن	مقایسه موارد استفاده میانگین و میانه	
	تفکر واگرا	پرورش تفکر واگرا به کمک طرح مسئله	

بخش اول: خط بهترین برازش

اهداف بخش

- آشنایی با نمودار پراکنش به عنوان نموداری برای مدل‌سازی نمونه‌های دو متغیره
- آشنایی با خط بهترین برازش به عنوان ابزاری برای پیش‌بینی
- رسم خط بهترین برازش به کمک *Excel*
- پیش‌بینی تغییرات متغیرها توسط خط بهترین برازش
- پرورش این احساس که روش‌های آماری ابزاری قدرتمند برای تصمیم‌گیری هستند.

پیش‌نیازهای بخش

- آشنایی با مختصات یک نقطه
 - مهارت نقطه‌یابی در صفحه مختصات
 - مهارت کار با نمودار تابع‌های خطی
 - مهارت کار با نرم‌افزار *Excel*
- واژه‌های کلیدی:** نمودار پراکنش، خط بهترین برازش

نگاه کلی به بخش

مطالب این بخش در دو قسمت طراحی شده است. در قسمت اول هنرجویان با نمودار پراکنش و خط بهترین برازش به عنوان یکی از روش‌های مدل‌سازی نمونه‌های دو متغیره آشنا می‌شوند. در قسمت دوم هنرجویان با کاربرد خط بهترین برازش برای پیش‌بینی مقادیر یک کمیت با داشتن متناظر کمیت دیگر آشنا می‌شوند. هدف این بخش، آموزش مفهوم رگرسیون و همبستگی و ضریب همبستگی نیست؛ بلکه هدف کاربرد این نمودار در مدل‌سازی وضعیت‌های آشنا و حل مسئله و درک روش‌های آماری به‌عنوان ابزاری برای تصمیم‌گیری است. به منظور دستیابی به این هدف از دانش پیشین هنرجو در ارتباط با معادله خط و تابع خطی و آشنایی وی با نرم‌افزار *Excel* کمک گرفته می‌شود. در تحلیل وضعیت‌های مختلف به کمک روش‌های آماری، موارد بسیاری وجود دارند که لازم است ارتباط بین متغیرها مورد بررسی قرار گیرد. در این کتاب با متغیرهای پیوسته کار می‌کنیم. هدف این است که رابطه‌ای پیدا کنیم که بتوانیم مقادیر یکی از کمیت‌ها را با داشتن مقدار کمیت دیگر پیدا کنیم. به عبارت دیگر باید دید که آیا

می‌توان یکی از کمیت‌ها را به صورت تابعی ریاضی از کمیت دیگر بیان کرد یا خیر. فرض کنید برای دو کمیت به صورت نمونه‌ای مقادیر متناظر y_i را برای کمیت دوم به ازای مقدار x_i برای کمیت اول به دست آورده باشیم. برای پیدا کردن بهترین رابطه خطی بین این دو کمیت، از روش کمترین مربعات استفاده می‌شود. در این روش اگر معادله این خط را با $y = ax + b$ نمایش دهیم، مقدار به دست آمده از روی این معادله به ازای x_i عموماً با مقدار نمونه‌ای متناظر y_i برای کمیت دوم متفاوت است. می‌خواهیم مجموع خطاهای به دست آمده حداقل باشد. یعنی مقادیر a و b را طوری پیدا کنیم که عبارت $\sum (ax_i + b - y_i)^2$ مینیمم شود. اگر مشتق نسبت به a و مشتق نسبت به b را مساوی صفر قرار دهیم، می‌توانیم مقادیر a و b را محاسبه کنیم. این عملیات در نرم‌افزارهای آماری خود به خود انجام می‌شود و ما خودمان را درگیر این محاسبات نخواهیم کرد.

لازم است به این نکته توجه شود که برای هر تعداد نقطه در صفحه و با هر شکلی از پراکندگی می‌توان خط رگرسیون را رسم کرد ولی لزوماً این خط ممکن است مدل مناسبی برای داده‌ها نباشد. به عبارت دیگر ممکن است داده‌ها از یک مدل خطی پیروی نکنند. مشاهده نمودار پراکنش می‌تواند ما را به تشخیص مدل برازش داده‌ها هدایت کند. در این کتاب ما صرفاً مدل خطی برازش را در نظر داریم.

ورود به مطلب

برای ورود به مطلب موقعیتی آشنا در تولید محصول و یک سؤال طرح می‌شود. فعالیتی که در ادامه آمده است به هنرجویان کمک می‌کند تا فرایند پاسخگویی به سؤال طرح شده را بهتر درک کنند. در این مرحله می‌توانید از هنرجویان بخواهید تا وضعیت‌های مشابهی که در آنها دو کمیت مرتبط را می‌توانند مدل‌سازی کنند (مرتبط با رشته و یا علاقه‌شان) مطرح کنند.

فعالیت آموزشی

هدف این فعالیت آشنایی با خط بهترین برازش است. با توجه به اینکه معادله خط به کمک نرم‌افزار پیدا می‌شود، پر کردن ستون‌های خطا و مجدورات خطاها کمک می‌کند تا درک بهتری نسبت به این خط پیدا شود. از هنرجویان بخواهید در مورد اینکه کدام خط بهترین تقریب را ارائه می‌کند یا آیا می‌توان همه داده‌ها را به طور معناداری با یک خط تقریب زد، بحث کنند.

در صورتی که وقت باشد، می‌توانید قبل از این فعالیت نمونه‌ای که در آن دو کمیت رابطه خطی دارند و در نتیجه نقاط نمودار پراکنش دقیقاً روی خط واقع می‌شوند را طرح کنید.



ظرفه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد بین اندازه دور مع نسبت و اندازه دور کردن افراد یک رابطه خطی وجود دارد. تولیدکنندگان با دانستن این رابطه می‌توانند اندازه‌های مناسبی برای محصولات خودشان در نظر بگیرند. برای آشنایی با فرایند پیدا کردن این رابطه، اندازه دور کردن و دور مع نسبت ۱۵ نفر در جدول زیر آورده شده است.

اندازه دور کردن (D) بر حسب KCM	اندازه دور مع (C) بر حسب KCM
۲۲۵	۱۴۵
۲۲	۱۵
۲۵۲	۱۵۲
۲۲۲	۱۵۷
۲۲۷	۱۶۱
۲۲۱	۱۶۲
۲۵۵	۱۶۲
۲۵۶	۱۶۲
۲۶۴	۱۶۲
۲۲۲	۱۶۷
۲۵۵	۱۶۹
۲۶۶	۱۷۱
۲۸۵	۱۷۲
۲۶۸	۱۷۳
۲۸۲	۱۷۵

اهداف موضوعی:

- ۱ آشنایی با نمودار پراکنش،
 - ۲ آشنایی با خط بهترین برازش،
 - ۳ درک وجود خطا در استفاده از خط بهترین برازش،
- مهارت‌ها و فرایندها:**

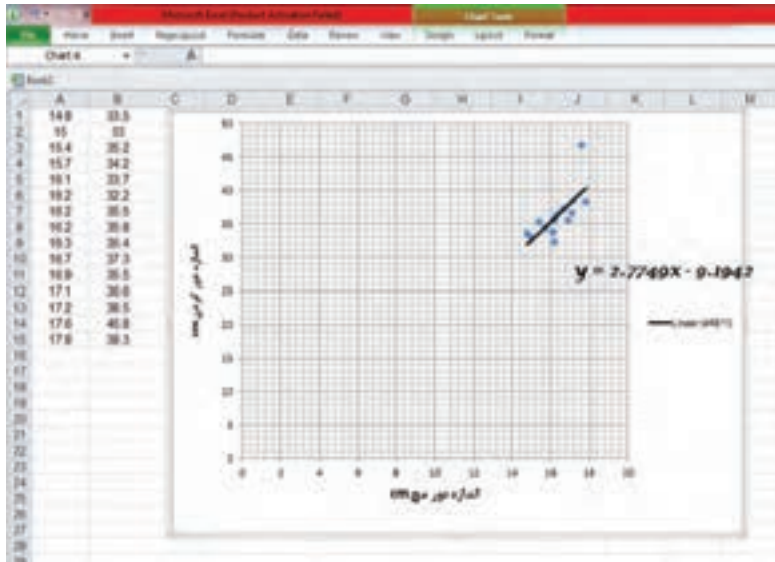
- ۱ پیوندها و اتصال‌ها،
- ۲ استفاده از نرم‌افزار،
- ۳ تقریب زدن،
- ۴ استدلال کردن،
- ۵ تفکر بصری،
- ۶ بازنمایی‌ها،
- ۷ ارتباطات،

حل فعالیت ۱

۱ هنرجو نقاط را روی صفحه مختصات مشخص می‌کند.

۲ مشاهده می‌شود نقاط روی یک خط راست قرار ندارند.

۳ هنرجو با توجه به توضیحات ارائه شده در سؤال، یک خط راست به صورت تقریبی بین نقاطی که مشخص کرده است، رسم می‌کند. در شکل بعد این خط رسم شده است.



۴ و ۵ به وسیله *Excel* و با توجه به دستورالعمل داده شده خط و معادله آن به صورت زیر است:

$$y = 2/7749x - 9/1947$$

با توجه به جدول زیر پاسخ سؤال‌های ۶ تا ۸ به صورت زیر است:

	A	B	C	D	E
	x	y	y'	e=y-y'	e ²
2	14.80	33.50	31.87	1.63	2.64
3	15.00	33.00	32.43	0.57	0.33
4	15.40	35.20	33.54	1.66	2.76
5	15.70	34.20	34.37	-0.17	0.03
6	16.10	33.70	35.48	-1.78	3.17
7	16.20	32.20	35.76	-3.56	12.67
8	16.20	35.50	35.76	-0.26	0.07
9	16.20	36.80	35.76	0.04	0.00
10	16.30	36.40	36.04	0.36	0.13
11	16.70	37.30	37.15	0.15	0.02
12	16.90	35.50	37.70	-2.20	4.85
13	17.10	36.60	38.26	-1.66	2.74
14	17.20	38.50	38.53	-0.03	0.00
15	17.60	46.80	39.64	7.16	51.21
16	17.80	38.30	40.20	-1.90	3.61
17					
18				جمع محذور خطاها	جمع خطاها
19				0.0	84.23

۶ ستون y' در جدول کامل شده است. به طور مثال اگر $x = 14/80$ باشد طبق معادله خط.

$$y = 2/7749x - 9/1942$$

$$y' = 2/7749 \times (14/80) - 9/1942 \approx 31/87$$

۷ خیر. زیرا خط دقیقاً از روی نقطه‌ها عبور نمی‌کند.

۸ e برابر $y - y'$ می‌باشد که در جدول ستون مربوط به e کامل شده است.

۹ حاصل جمع خطاها باید مشخص کند که چقدر در محاسبات خطا داریم اما

در اینجا به علت منفی و مثبت بودن خطاها حاصل جمع مجموع واقعی خطاها را نشان نمی‌دهد.

۱۵ حاصل جمع مجذور خطاها (جمع ستون e^2) برابر $84/23$ است.

۱۱ چون برخی از خطاها منفی و برخی مثبت هستند بنابراین مجذور خطاها را حساب می‌کنیم تا همه خطاها در محاسبه خطای کل لحاظ شود و برآورد درستی از خطاهای کل انجام شود.

در ادامه به مفهوم داده‌های پرت می‌رسیم. توجه به نمودار پراکنش و خط بهترین برازش می‌توان نقطه‌هایی را مشخص کرد که نسبت به سایر داده‌ها تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارند که داده‌های پرت می‌باشند. در ارتباط با تأثیر داده‌های پرت در کلاس گفت‌وگو کنید.



اهداف موضوعی:

۱ تشخیص داده پرت با استفاده از جدول و نمودار داده‌ها.

۲ درک نقش داده پرت در تعیین خط بهترین برازش

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ استفاده از نرم‌افزار،

۲ مقایسه و ارزیابی کردن،

۳ استدلال کردن،

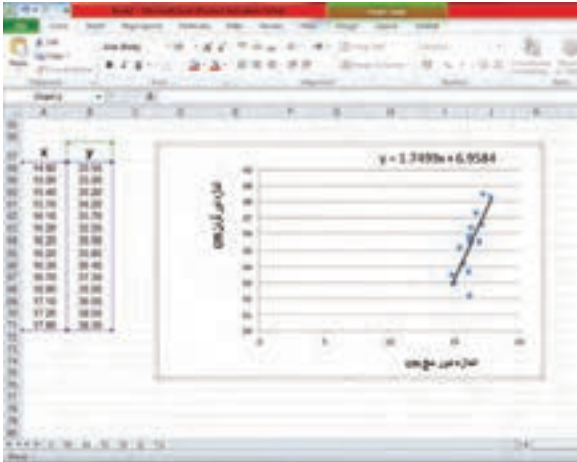
۴ بازنمایی‌ها،

۵ تفکر بصری،

۶ ارتباطات،

حل فعالیت ۲

۱ با خارج کردن نقطه $\left[\frac{17}{6} / \frac{46}{8}\right]$ از جدول، دوباره خط را رسم می‌کنیم و معادله آن را به دست می‌آوریم.



۲ و ۳ ابتدا ستون مربوط به y'' را با توجه به معادله خط جدید در جدول کامل کرده و سپس با استفاده از آن اعداد ستون $e' = y - y''$ در جدول زیر وارد می‌کنیم.

	x	y	y'	e = y - y'	e ²	y''	e' = y - y''	e' ²
۱								
۲	۱۹.۵۰	۳۳.۵۰	۳۱.۵۷	۱.۹۳	۳.۷۴	۳۲.۵۰	۱.۰۰	۱.۰۰
۳	۱۹.۵۰	۳۳.۰۰	۳۲.۴۳	۰.۵۷	۰.۳۳	۳۳.۲۱	-۰.۲۱	۰.۰۴
۴	۱۹.۴۰	۳۳.۲۰	۳۳.۹۴	۰.۲۶	۰.۰۷	۳۳.۹۱	۰.۲۹	۰.۰۸
۵	۱۹.۷۰	۳۴.۲۰	۳۴.۳۷	-۰.۱۷	۰.۰۳	۳۴.۴۳	-۰.۲۳	۰.۰۵
۶	۱۹.۹۰	۳۳.۷۰	۳۴.۴۸	-۰.۷۸	۰.۶۱	۳۵.۵۳	-۱.۸۳	۳.۳۵
۷	۱۹.۲۰	۳۲.۲۰	۳۵.۷۹	-۳.۵۹	۱۲.۸۷	۳۶.۳۱	-۳.۱۱	۹.۶۷
۸	۱۹.۳۰	۳۱.۸۰	۳۵.۷۹	-۳.۹۹	۱۵.۹۲	۳۶.۳۱	-۳.۵۱	۱۲.۳۲
۹	۱۹.۲۰	۳۵.۸۰	۳۵.۷۹	۰.۰۱	۰.۰۰	۳۶.۳۱	-۰.۵۱	۰.۲۶
۱۰	۱۹.۳۰	۳۶.۴۰	۳۶.۹۴	-۰.۵۴	۰.۲۹	۳۶.۹۴	-۰.۶۴	۰.۴۱
۱۱	۱۹.۷۰	۳۷.۳۰	۳۷.۱۵	۰.۱۵	۰.۰۲	۳۶.۹۴	۰.۳۶	۰.۱۳
۱۲	۱۹.۸۰	۳۸.۰۰	۳۷.۷۰	-۰.۳۰	۰.۰۹	۳۶.۹۴	-۰.۹۴	۰.۸۸
۱۳	۱۷.۱۰	۳۸.۰۰	۳۸.۲۰	-۰.۲۰	۰.۰۴	۳۸.۲۰	-۰.۲۰	۰.۰۴
۱۴	۱۷.۲۰	۳۸.۵۰	۳۸.۵۳	-۰.۰۳	۰.۰۰	۳۸.۵۳	-۰.۰۳	۰.۰۰
۱۵	۱۷.۵۰	۳۸.۵۰	۳۸.۴۴	۰.۰۶	۰.۰۰	۳۸.۴۴	۰.۰۶	۰.۰۳
۱۶	۱۷.۸۰	۳۸.۳۰	۳۸.۲۰	-۰.۱۰	۰.۰۱	۳۸.۲۰	-۰.۱۰	۰.۰۱
۱۷								
۱۸								
۱۹								
۲۰								
۲۱								
۲۲								
۲۳								
۲۴								
۲۵								
۲۶								
۲۷								
۲۸								
۲۹								
۳۰								
۳۱								
۳۲								
۳۳								
۳۴								
۳۵								
۳۶								
۳۷								
۳۸								
۳۹								
۴۰								
۴۱								
۴۲								
۴۳								
۴۴								
۴۵								
۴۶								
۴۷								
۴۸								
۴۹								
۵۰								

۴ حاصل جمع مجذور خطاها (جمع ستون e'^2) برابر $۱۹/۵۲$ است. این عدد در مقایسه با عدد به دست آمده از قسمت (۱۰) در فعالیت ۱ خطای کمتری را نشان می‌دهد.

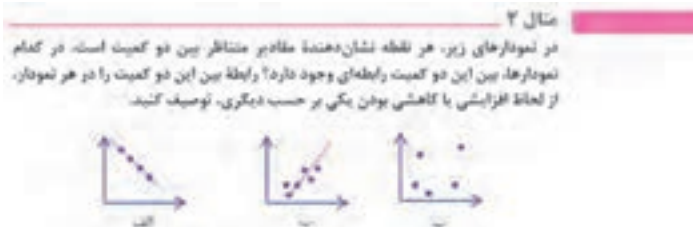
۵ چون جمع مجذورات خطای e' از جمع مجذورات خطای e کوچک تر است بنابراین مناسب تر است. علت این اختلاف وجود نقطه $\left[\frac{17}{6} / \frac{46}{8} \right]$ در فعالیت ۱ می باشد.

در این فعالیت با خارج کردن داده‌ای که با سایر داده‌ها تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد (داده پرت) خطا کمتر شده و درک بهتری از وضعیت خواهیم داشت. شیب خط برازش $y = 1/7499x + 6/9584$ مثبت است که نشان می‌دهد هرچه قدر اندازه دور مچ دست بیشتر باشد، اندازه دور گردن هم بیشتر خواهد شد.



هدف: درک وجود ارتباط بین دو کمیت در یک زمینه واقعی. یادگیری نمودار پراکنش و خط بهترین برازش
 معادله خط بهترین برازش به صورت $y = 0/8032x + 12/883$ است با توجه به این معادله نیز اگر وزن اولیه ۷۲ کیلوگرم را به جای x قرار دهیم وزن نهایی تقریباً

برابر با ۷۱ است این موضوع را نیز می‌توان از روی شکل مشاهده کرد.



هدف: درک ارتباط بین دو کمیت از روی نمودار و ارائه استدلال برای تأثیر دو کمیت روی یکدیگر

در این مثال از روی نقاط شکل (الف)، یک خط می‌گذرد یعنی کاملاً رابطه خطی دارند. شیب خط منفی است که مشخص‌کننده این است که با زیاد شدن مقادیر روی محور x ، مقادیر روی محور y کاهش می‌یابد.

نقاط شکل (ب)، دارای خط بهترین برازش هستند که شیب آن مثبت است یعنی با افزایش مقادیر روی محور x ، عموماً مقادیر روی محور y افزایش می‌یابد.

نقاط شکل (پ)، هیچ خط برازشی نمی‌تواند رابطه بین کمیت‌ها را به خوبی توصیف کند. دقت پیش‌بینی از روی نمودار (الف) بیشتر از دقت پیش‌بینی از روی نمودار (ب) است.

برخی از هنرمندان عقیده دارند که درصد قبولی هنرجویان در یک کلاس با تعداد هنرجویان در کلاس رابطه دارد جدول زیر تعداد هنرجویان در کلاس‌های مختلف یک هنرستان و درصد قبولی آنها در امتحان پایان سال را نشان می‌دهد.

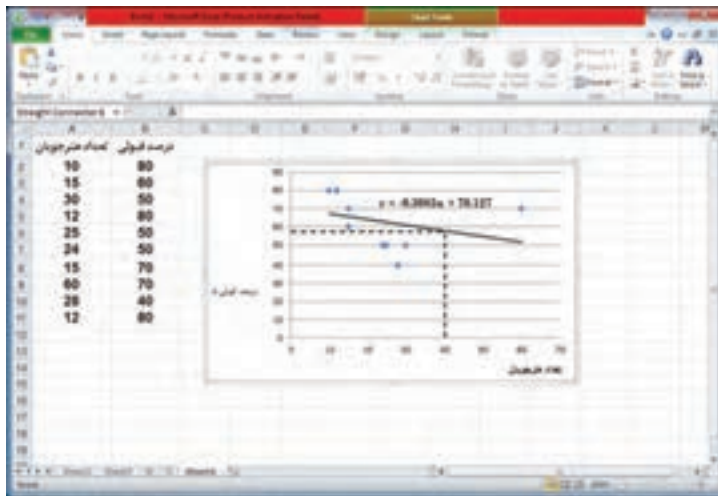
تعداد هنرجویان در کلاس	درصد قبولی
۱۰	۸۰
۱۵	۶۰
۲۰	۵۰
۲۴	۳۰
۲۵	۲۰
۲۶	۲۰
۳۵	۱۰
۴۰	۱۰
۵۰	۰
۶۰	۰

۱ نمودار برازش را رسم کنید.
۲ خط بهترین برازش را رسم کنید.
۳ پیش‌بینی می‌کند، چند درصد از هنرجویان در یک کلاس ۳۰ نفره قبول می‌شوند.
۴ برخی عقیده دارند نقطه $\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix}$ اطلاعات مربوط به یک کلاس ۴۰ نفره با یک داده بیرون (مربوط به یک وضعیت غیر معمول) است. فکر می‌کند اگر در تحلیل خود این داده را کنار بگذارید، بهتر است یا خیر؟ توضیح دهید چرا؟
۵ این داده را خارج کنید و پاسخ سؤال ۲ را مجدداً به دست آورید.

اهداف موضوعی:

- ۱ رسم نمودار پراکنش
 - ۲ یافتن خط بهترین برازش و استفاده از آن
 - ۳ تشخیص داده پرت،
 - ۴ پیوندها و اتصال‌ها،
 - ۵ استفاده از نرم‌افزار،
 - ۶ مقایسه کردن،
 - ۷ استدلال،
 - ۸ ارزیابی،
 - ۹ بازنمایی،
 - ۱۰ ارتباطات،
- هدف: .

۱ و ۲- نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را توسط نرم افزار Excel رسم می‌کنیم.



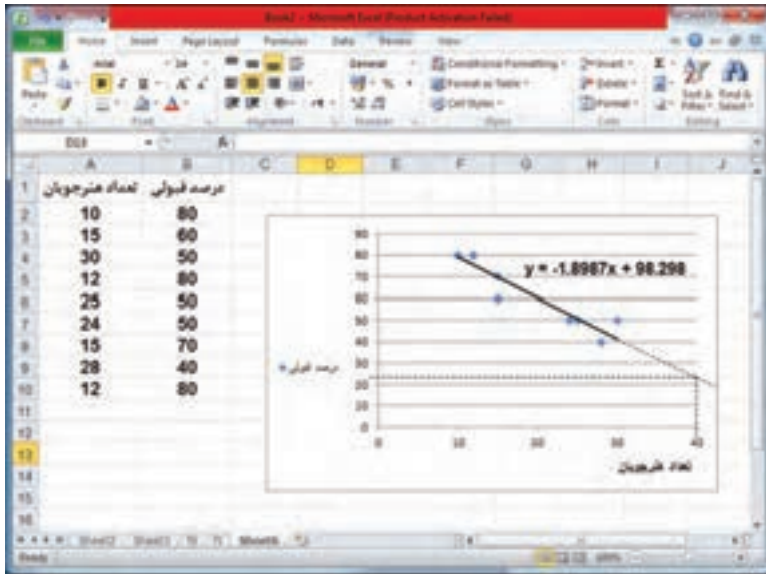
۳- با توجه به نمودار اگر تعداد هنرجویان ۴۰ نفر باشد از نقطه ۴۰ روی محور طول‌ها خطی نقطه چین به صورت عمود می‌کشیم تا خط برازش را قطع کند و از آنجا خطی نقطه چین به صورت افقی می‌کشیم که تقریباً عدد ۵۸ درصد را روی محور نشان می‌دهد. یعنی پیش بینی می‌کنیم ۵۸ درصد هنرجویان کلاس ۴۰

نفره قبول شوند.

یا اگر در معادله خط بهترین برازش یعنی $y = -0.3085x + 70.127$ به جای x عدد ۴۰ را قرار دهیم درصد قبولی $y = 57/787$ خواهد شد. شیب خط برازش منفی است که نشان می‌دهد هرچقدر تعداد هنرجویان کلاس بیشتر شود درصد قبولی در امتحان پایان سال، رسم خواهد شد.

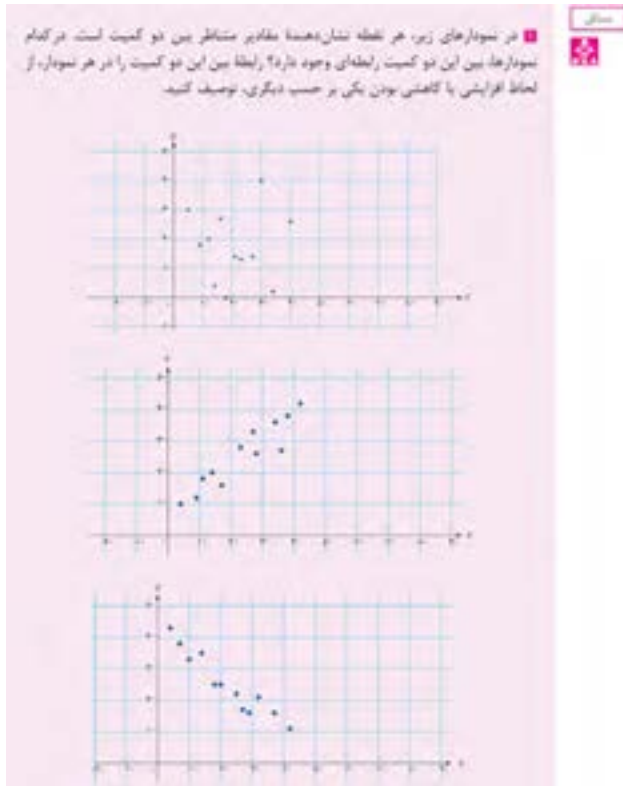
۴- بهتر است این داده را کنار بگذاریم زیرا در این صورت درک بهتری از وضعیت به ما می‌دهد.

۵- داده $\begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix}$ را کنار می‌گذاریم و دوباره خط بهترین برازش را رسم می‌کنیم.



با ادامه دادن خط برازش مشاهده می‌کنیم که اگر کلاس ۴۰ نفره باشد تقریباً ۲۲ درصد قبول خواهند شد.

اگر در معادله خط بهترین برازش یعنی $y = -1/8987x + 98/298$ به جای x عدد ۴۰ را قرار دهیم درصد قبولی $y \approx 22/35$ خواهد شد. در این رابطه شیب خط برازش منفی است که نشان می‌دهد هرچقدر تعداد هنرجویان کلاس بیشتر شود درصد قبولی در امتحان پایان سال، پایین‌تر خواهد آمد.



مهارت‌ها و فرایندها:

درک ارتباط بین کمیت‌ها از روی نمودار،

پرورش تفکر بصری، ارتباط

هدف: پیدا کردن بهترین خط برازش و رابطه بین دو کمیت x و y و تأثیر آنها

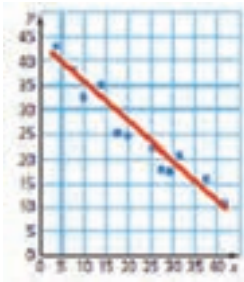
روی یکدیگر

در نمودار **اول** متوجه می‌شویم که تغییرات مقادیر روی محور x ‌ها هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره تغییرات مقادیر روی محور y ‌ها به ما نمی‌دهد. در این وضعیت رابطه بین دو کمیت را نمی‌توان به خوبی با یک خط راست نشان داد. یعنی نمی‌توان گفت رابطه بین دو کمیت افزایشی یا کاهش‌ی است.

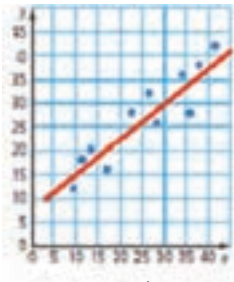
در نمودار **دوم** بین دو کمیت می‌توان خط بهترین برازش را در نظر گرفت. شیب این خط مثبت است یعنی با افزایش مقادیر روی محور x ‌ها، مقادیر روی محور y ‌ها، افزایش خواهد داشت.

در نمودار **سوم** بین دو کمیت می‌توان خط بهترین برازش را در نظر گرفت. شیب این خط منفی است یعنی با افزایش مقادیر روی محور x ‌ها، مقادیر روی محور

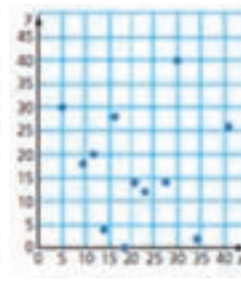
یها، کاهش خواهد داشت.



سوم



دوم



اول

نمودار زیر رابطه بین مدت زمانی که فرد رانندگی می‌کند و مساحت باقی‌مانده تا مقصد را نشان می‌دهد.

کدام یک از نمودارهای زیر، خط بهترین برازش برای نمودار پررنگش بالا را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

ارتباطات،

پرورش تفکر بصری،

هدف: سازماندهی تفکرات ریاضی و استدلال جهت پیدا کردن خط بهترین برازش

در ردیف دوم، نمودار سمت چپ بهترین برازش را نشان می‌دهد زیرا تعداد نقاط دو طرف خط برازش تقریباً برابر است. همچنین با افزایش مقادیر روی محور x ، مقادیر روی محور y ها کاهش می‌یابد یعنی هر چه زمان بیشتری رانندگی شود مسافت تا مقصد کمتر خواهد شد.



جدول روبرو طول قد و فاصله نوک دو انگشت وسط x نفر را (در حالتی که دست‌ها از طرفین کاملاً باز است) برحسب سانتی‌متر نشان می‌دهد.

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

ب) آیا رابطه‌ای بین طول قد و فاصله نوک دو انگشت وسط افراد دیده می‌شود؟ توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و معادله آن را به دست آورید.

ت) به کمک معادله یا نمودار، با داشتن طول قد خودتان، فاصله نوک دو انگشت وسط خودتان را تخمین بزنید.

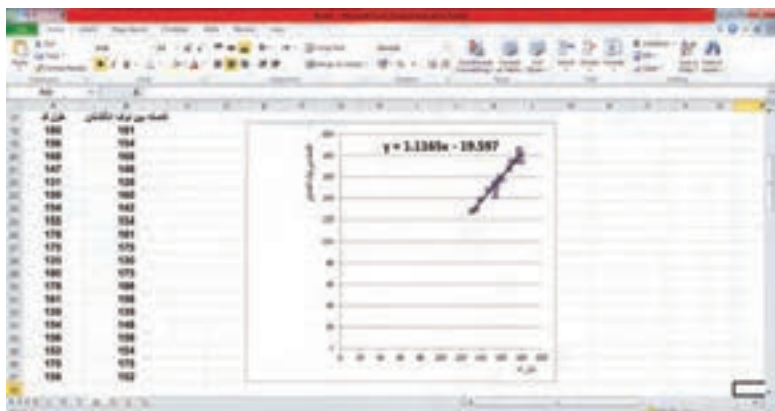
ث) فاصله نوک دو انگشت وسط خودتان را اندازه بگیرید، آیا با مقدار تخمین زده شده تفاوت دارد؟ اگر بله، توضیح دهید چرا؟

طول قد	فاصله بین نوک انگشتان
۱۸۰	۱۸۱
۱۵۶	۱۵۴
۱۶۸	۱۶۸
۱۴۴	۱۴۸
۱۳۱	۱۳۸
۱۵۹	۱۶۰
۱۵۴	۱۴۳
۱۵۵	۱۵۴
۱۷۸	۱۸۱
۱۷۵	۱۷۵
۱۳۵	۱۳۰
۱۸۰	۱۷۵
۱۷۸	۱۸۳
۱۶۱	۱۵۵
۱۳۹	۱۳۹
۱۵۴	۱۴۸
۱۵۶	۱۵۴
۱۵۳	۱۵۴
۱۷۰	۱۷۵
۱۵۴	۱۵۳

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و استدلال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت کار با ابزار، حل مسئله به روش هندسی، مهارت تخمین زدن، پرورش تفکر بصری،

هدف: تشخیص و به کارگیری ریاضیات در روابط بین اندازه‌های دو کمیت در بدن انسان الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش به صورت زیر است:



(ب) بله. با توجه به نمودار با زیاد شدن مقدار طول قد (مقادیر روی محور x ها)، فاصله بین نوک انگشتان (مقادیر روی محور y ها)، افزایش می‌یابد.
 (پ) خط بهترین برازش در قسمت (الف) توسط Excel رسم شده و معادله خط بهترین برازش $y = 1/1165x + 19/597$ است.
 (ت) اگر به طور مثال طول قد دانش‌آموز ۱۷۵ باشد فاصله بین دو انگشتان او از طریق معادله خط برابر است با:

$$\xrightarrow{x=175} y = 1/1165(175) - 19/597 \longrightarrow y \approx 175/79$$

با استفاده از نمودار هم این مقدار را به صورت تقریبی می‌توان به دست آورد. به این صورت که روی محور x ها از عدد ۱۷۵ خطی عمودی (موازی محور y ها) رسم کرده تا خط برازش را قطع کند سپس از محل برخورد، خطی افقی (موازی محور x ها) رسم کرده و هر کجا محور y ها را قطع کند، جواب است.
 (ث) بله. زیرا خط بهترین برازش رابطه را در حالت کلی نشان می‌دهد و با توجه به اینکه تمام نقاط لزوماً روی این خط قرار ندارد، در واقع تخمینی از اندازه‌های واقعی به ما می‌دهد.

سینا می‌گوید: اگر ریاضی شما خوب باشد، علوم شما نیز خوب است. علی می‌خواهد درستی این گفته را بررسی کند. به همین دلیل نمره ریاضی و علوم ۷ نفر را پرسید. داده‌هایی که علی به دست آورده در جدول زیر ثبت شده است.

نمره ریاضی	۱۷	۵/۵	۹	۱۴	۱۸	۶/۵	۸
نمره علوم	۱۵	۸	۱۰	۱۵	۱۱	۹	۱۰

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.
 ب) آیا با گفته سینا موافق‌اید؟ دلیل خود را توضیح دهید.
 پ) خط بهترین برازش را رسم کنید.
 ت) پیش‌بینی می‌کنید نمره علوم دانش‌آموزی که در آزمون ریاضی ۱۴ شده است، چند باشد؟

هدف: انتقال تفکر و پیدا کردن رابطه خطی بین نمرات دو درس
مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله به روش هندسی، مهارت کار با ابزار، پرورش تفکر بصری، استدلال کرد، بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و استدلال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت پیش‌بینی
 الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



ب) بله - زیرا هر دانش آموز که نمره ریاضی خوبی دارد، نمره علوم او نیز خوب است و برعکس

پ) خط بهترین برازش در نمودار بالا رسم شده است. و معادله خط آن به صورت $y = 0.6169x + 4.7979$ است.

ت) اگر نمره ریاضی دانش آموزی 14 باشد با توجه به نمودار و نقاط خط چین روی آن، نمره علوم او تقریباً 13/5 می شود. همچنین می توان این عدد را از معادله خط به صورت زیر حساب کرد:

$$y = 0.6169(14) + 4.7979 \longrightarrow y \approx 13.5$$

جدول زیر، نمرات ریاضی و زبان 14 دانش آموز را نشان می دهد.

نمره ریاضی	19	15.5	9	15	15	1	17	14	13	8
نمره زبان	10	8	9	18	18	4	19	14	9	9

الف) نمودار پراکنش این داده ها را رسم کنید. (طول هر نقطه نمره ریاضی و عرض هر نقطه نمره زبان یک دانش آموز است).

ب) آیا بین نمره ریاضی و نمره زبان دانش آموزان رابطه ای مشاهده می کنید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

ج) خط بهترین برازش را رسم کنید و به کمک معادله آن و یا نمودار، نمره زبان دانش آموزی را که در آزمون ریاضی 15 گرفته است، پیش بینی کنید.

د) نقطه های نشان دهنده نمره ریاضی و زبان کدام دو دانش آموز یا نمرات پایه دانش آموزان هماهنگی ندارند؟

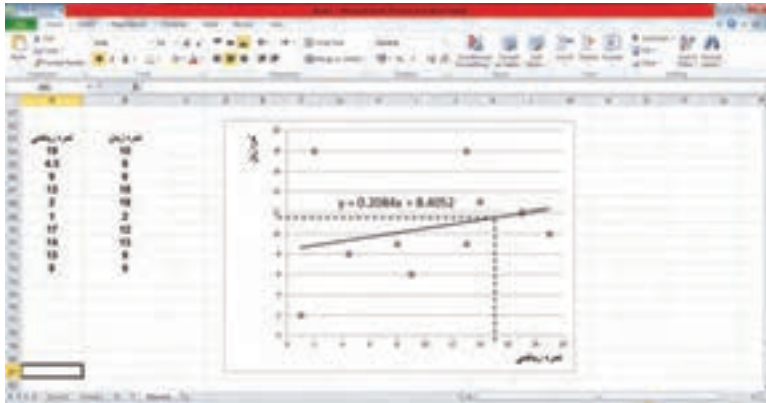
ه) این دو داده را از داده های متن حذف کنید و خط بهترین برازش را رسم کنید و این بار نمره زبان دانش آموزی را که در آزمون ریاضی 15 گرفته است، پیش بینی کنید.

و) آیا تفاوتی بین دو پیش بینی شما وجود دارد؟ دلیل خود را توضیح دهید.

هدف: پیدا کردن خط بهترین برازش و پیش بینی از روی آن. تشخیص نقاطی که وضعیت غیر معمول دارند. مقایسه وضعیت های مختلف **مهارت ها و فرایندها:**

حل مسئله، پرورش تفکر بصری، مهارت کار با ابزار، استدلال کرد، بازنمایی های چندگانه، پیوند و استدلال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت پیش بینی و مقایسه

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



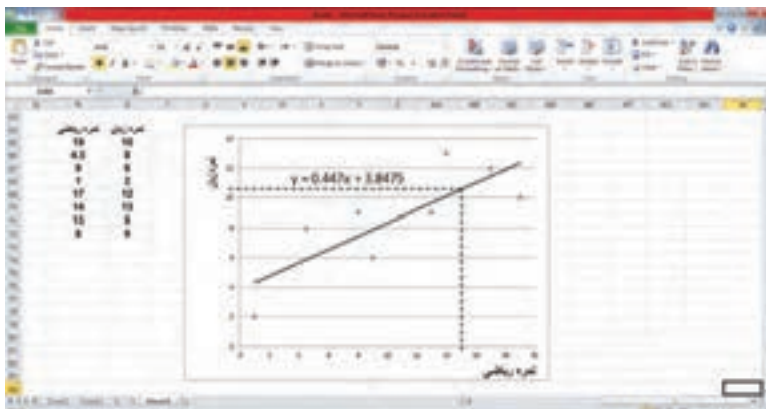
ب) بله - تقریباً اگر نمره ریاضی دانش آموز بالا برود، نمره زبان هم بالا می‌رود.
 پ) خط بهترین برازش در قسمت (الف) رسم شده است که با توجه به شکل اگر دانش آموزی نمره ریاضی ۱۵ بگیرد نمره زبان او تقریباً ۱۱/۶ می‌شود. همچنین با استفاده از معادله خط می‌توان این مقدار را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$y = 0.2084(15) + 8.8251 \rightarrow y \approx 11.15$$

ت) با توجه به شکل قسمت (الف) بین نمرات زیر با بقیه هماهنگی دیده نمی‌شود.

نمره ریاضی	۱۳	۲
نمره زبان	۱۸	۱۸

ث) با حذف دو داده، نمودار پراکنش و خط بهترین برازش به صورت زیر است:



با توجه به شکل بالا اگر دانش آموزی نمره ریاضی ۱۵ بگیرد نمره زبان او تقریباً $10/6$ می شود. با استفاده از معادله خط می توان این مقدار را به صورت زیر محاسبه کرد:

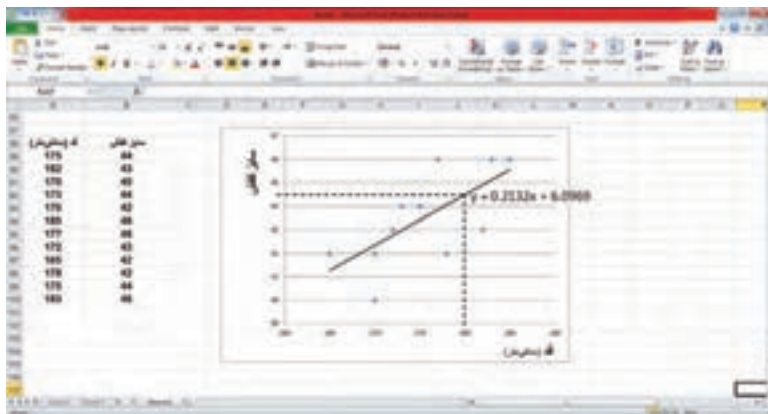
$$y = 0/447(15) + 3/8475 \rightarrow y \approx 10/5$$

ج) بله - زیرا با حذف داده های پرت درک بهتری از داده ها به دست می آید و همان طور که در شکل مشاهده می شود خط برازش به صورت بهتری بین داده ها قرار می گیرد یعنی نیمی از داده ها بالای خط و نیم دیگر پایین خط قرار می گیرند.



مهارت ها و فرایندها:

بازنمایی های چندگانه، پرورش تفکر بصری، پیوند و استدلال ریاضی با خارج ریاضی، مهارت کار با ابزار، مهارت پیش بینی
هدف: پیدا کردن خط بهترین برازش و پیش بینی با استفاده از آن
الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:

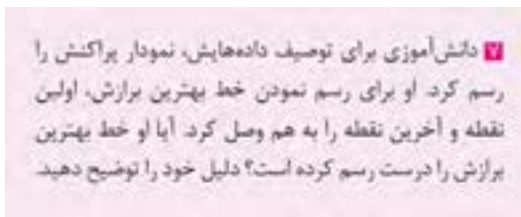


ب) با توجه به نمودار سایز کفش مردی که قد او ۱۸۰ سانتی‌متر است تقریباً برابر ۴۴/۵ می‌باشد.

پ) با توجه به معادله خط، طول قد فردی با رد پای ۵۸ به صورت زیر است:

$$y = 0.2132x + 6.0969 \xrightarrow{y=58} x = \frac{58 - 6.0969}{0.2132} \rightarrow x \approx 243/4$$

با توجه به معادله خط بهترین برازش، قد او تقریباً ۲۴۳ سانتی‌متر است.



مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، ارتباطات

هدف: به کارگیری استدلال

خیر - زیرا خط بهترین برازش باید تا حد ممکن کمترین فاصله را تا نقاط رسم شده در نمودار برازش داشته باشد. فقط در صورتی می‌تواند درست باشد که همهٔ نقاط برازش روی یک خط باشند.