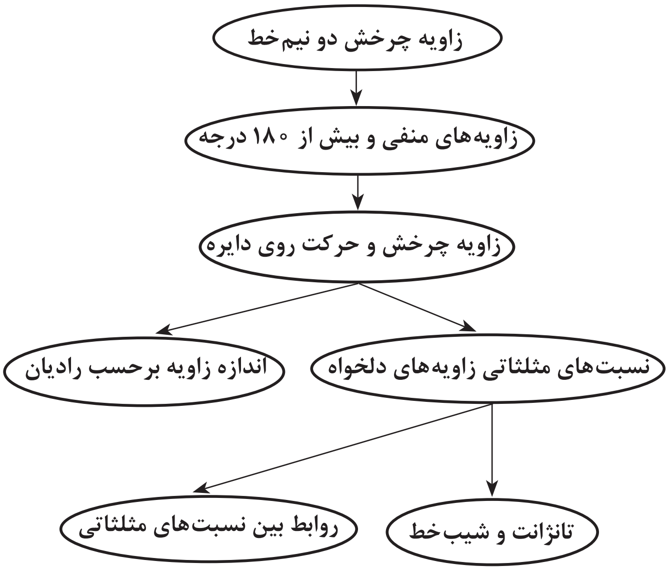
پودمان سوم

نسبت‌ها و تابع‌های مثلثاتی

طرح کلی مفاهیم پودمان سوم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- درک مفهوم زاویه‌های دلخواه به عنوان زاویه چرخش
- آشنایی با زاویه چرخش در یک دایره و نقطه متناظر زاویه‌ها در دایره
- آشنایی با واحد اندازه‌گیری رادیان برای زاویه‌های دلخواه
- درک نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه در دایره مثلثاتی
- آشنایی با ربع‌های مختلف دایره مثلثاتی و علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های مختلف
- آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه
- آشنایی با رابطه بین شیب یک خط و تانژانت زاویه بین آن خط و محور طول‌ها

پیش نیازهای پودمان

- آشنایی با مفهوم زاویه‌های تند و باز
- آشنایی با چرخش یک نقطه روی یک دایره و طول کمان طی شده
- آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند
- آشنایی با معادله خط و شیب خط

	فرایند	توصیف فرایند	مثال
استاندارد های فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	تعیین موقعیت کابین در بخش اوّل، تعمیم مفهوم نسبت‌های مثلثاتی بخش دوم، مسئله یکسانی شیب جاده و شیب خط، پیدا کردن ارتفاع کابین چرخ و فلک بر حسب زاویه چرخش بخش چهارم
		شناخت‌وبه‌کارگیری‌استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل	استراتژی رسم شکل برای فهم زاویه طی شده بخش اوّل، مشابهت با موقعیت‌های پیشین در متناسب بودن اندازه زاویه چرخش با طول کمان طی شده در بخش اوّل، تعمیم از حالات خاص به حالات عمومی‌تر در بخش دوم، ایجاد تناظر بین مفاهیم جبری و هندسی در روابط بین نسبت‌های مثلثاتی در بخش دوم، حدس و فرضیه‌سازی در یکسانی شیب خط و جاده در بخش سوم
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	طرح سؤال توسط هنرجویان و مباحثه در همه بخش‌ها، توصیف موقعیت‌ها و بیان موقعیت‌ها با مفاهیم ریاضی در همه بخش‌ها، سعی در دقیق‌سازی سؤالات مطرح شده
		برای بیان نظریات خود از زبان ریاضی به طور دقیق استفاده کند	استفاده از مفاهیم هندسی در بیان موقعیت چرخ و فلک در بخش اوّل، بیان ریاضی کمیت‌های متناسب اندازه زاویه و طول کمان طی شده در بخش اوّل، استفاده از دایره و مختصات نقاط در بیان نسبت‌های مثلثاتی در بخش دوم، تبدیل جاده و زمین به خط و صفحه مختصات در بخش سوم، استفاده از تابع برای حل مسئله ارتفاع کابین چرخ و فلک در بخش چهارم
	استدلال و اثبات	انواع مختلف استدلال و روش‌های اثبات را انتخاب کرده و به‌کاربرد و آنها را ارزیابی کند.	یافتن رابطه بین زاویه چرخش و کمان طی شده از طریق متناسب بودن دو کمیت در بخش اوّل، یافتن روابط بین نسبت‌های مثلثاتی از طریق تناظر با مفاهیم هندسی در بخش دوم، یافتن شیب خط‌ها و تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها با تناظر هندسی و محاسبات جبری در بخش سوم، محاسبات هندسی روی دایره در بخش چهارم
	پیوندها و اتصالات	ریاضیات را در سایر مضامین بیرون از چهارچوب موضوع ریاضیات (کاربردها در علوم دیگر) تشخیص و به‌کار گیرد.	ارتباط بین حرکت چرخ و فلک و حرکت یک نقطه روی دایره و ارتباط مسافت طی شده توسط کابین و طول کمانی از دایره در بخش اوّل، ارتباط شیب جاده و شیب خط در بخش سوم، ارتباط ارتفاع کابین‌ها و مفهوم تابع در بخش چهارم
		پیوستگی بین موضوع‌های ریاضی (اتصال جبر و هندسه)	ارتباط بین محاسبات جبری و هندسی در همه بخش‌ها، ارتباط بین دایره و نسبت‌های مثلثاتی در بخش دوم
	بازنمایی‌ها	جهت حل مسئله بازنمایی‌های مناسب را انتخاب نموده معنی کند و به‌کارگیرد.	رسم شکل دایره برای نمایش چرخ و فلک در بخش اوّل، نمایش جهت چرخش و دورهای چرخش با فلش‌های چرخنده، در بخش اوّل، رسم مختصات نقاط روی یک دایره و نمایش نسبت‌های مثلثاتی توسط آن در بخش دوم، رسم محورهای سینوس و کسینوس و تانژانت برای درک هندسی و بصری از نسبت‌های مثلثاتی بخش دوم، رسم جاده و خط برای نمایش مفاهیم در بخش سوم، رسم دایره به عنوان چرخ و فلک و محاسبات از طریق شکل در بخش چهارم
		از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و مقایسه پدیده‌های فیزیکی و ریاضی استفاده کند	
	سایر مهارت‌های تفکر	مقایسه و مشابهت	مشابهت چرخش چرخ و فلک و حرکت روی دایره در بخش اوّل، مشابهت ربع‌های دایره مثلثاتی با یکدیگر برای تعریف نسبت‌های مثلثاتی در بخش دوم، مشابهت جاده و خط در بخش سوم.
		تعمیم	تعمیم زاویه هندسی به زاویه چرخش در بخش اوّل، تعمیم نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های دلخواه در بخش دوم

بخش اوّل: زاویهٔ چرخش

اهداف بخش

- درک مفهوم زاویه‌های دلخواه به عنوان زاویه چرخش دو نیم‌خط نسبت به هم
- آشنایی با زاویه چرخش در یک دایره و نقطه متناظر زاویه‌ها در دایره

پیش‌نیازهای بخش:

- آشنایی با مفهوم زاویه‌های تند و باز

واژه‌های کلیدی: زاویه، چرخش و دوران

نگاه کلی به بخش

این بخش به آموزش مفهوم زاویه‌های دلخواه از طریق چرخش نیم‌خط‌ها و چرخش یک نقطه روی دایره اختصاص دارد. رویکرد کلی آموزشی این بخش، ارائه مفاهیم جدید در قالب یک داستان و مباحثه بین هنرجویان و هنرآموز و انجام چند فعالیت است. نقش اصلی داستان‌ها در آموزش مفاهیم در آن است که هنرجویان را در محیطی آشنا قرار می‌دهد که هنرجویان با اکثر مفاهیم رخ داده در آن محیط آشنا هستند و فقط با مفاهیم مورد نظر ما آشنایی کامل ندارند ولی یک آشنایی کیفی و کلی از آن مفاهیم دارند. این وضعیت موجب می‌شود هنرجویان به سادگی مفاهیم جدید را درک کنند و آنها را با مفاهیمی که از قبل می‌دانند پیوند ایجاد کنند.
داستان مورد استفاده در این بخش درباره حرکت یک چرخ و فلک و تشخیص موقعیت کابین‌های یک چرخ و فلک است. از طریق این داستان، با مباحثه بین هنرجویان و هنرآموز مفهوم زاویه چرخش و اندازه‌گیری آن ساخته می‌شود.

ورود به مطلب

برای آموزش مفهوم زاویه‌های دلخواه نیازمند آنیم که موقعیتی فیزیکی را مطرح سازیم که شامل چرخیدن یک نیم‌خط حول یک نیم‌خط دیگر است. زاویه دلخواه یک مفهوم کاملاً هندسی نیست و نمی‌توان صرفاً با استفاده از مفاهیم هندسی زاویه‌های دلخواه را تعریف کرد.
در هندسه، زاویه مفهومی است که وضعیت دو نیم‌خط غیر هم‌راستا با مبدأ یکسان را نسبت به هم بیان می‌کند. زاویه بین دو نیم‌خط، بر حسب درجه، همواره عددی بین صفر و ۱۸۰ است. برای رسیدن به مفهوم زاویه‌های دلخواه باید از مفهوم حرکت و چرخش و جهت حرکت نیز استفاده کنیم. جاهایی که این حرکت‌ها رخ می‌دهند زمینه مناسبی برای آموزش مفهوم زاویه‌های دلخواه است. در کتاب از

حرکت یک چرخ و فلک استفاده شده است ولی شما می‌توانید از هر نوع حرکتِ مشابه دیگری که درک آن برای هنرجویان شما آسان‌تر است استفاده کنید. مثلاً چرخش یکی از عقربه‌های ساعت، یا چرخش یک فرفره به دور خود، یا چرخیدن ورزشکاران باستانی به دور خود، یا چرخش زمین دور خورشیدو ... نیز می‌تواند استفاده شود. پس از انتخاب زمینه مناسب می‌توانید مانند کتاب عمل کنید و تعاریف مناسب را ارائه کنید.

فعالیت آموزشی

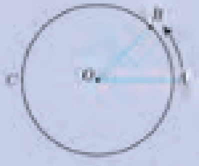
این بخش، با داستان چرخ و فلک و یافتن موقعیت‌های کابین چرخ و فلک آغاز می‌شود. در این موقعیت، مفهوم چرخش و زاویه چرخش آسان‌تر فهمیده می‌شود. با دنبال کردن داستان، مفهوم زاویه‌های بیش از ۱۸۰ درجه و زاویه‌های منفی توجیه می‌شوند. در ادامه، به طور رسمی، مفهوم زاویه چرخش بین دو نیم‌خط، به همراه مثال‌هایی، ارائه می‌شود. در این قسمت جهت قراردادی مثبت و منفی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها معرفی می‌شود.

همچنین، این نکته مهم تذکر داده می‌شود که مفهوم زاویه چرخش یک مفهوم صرفاً هندسی نیست و در آن از حرکت و جهت حرکت استفاده شده است. در واقع، وضعیت نهایی نیم‌خط‌ها، مشخص‌کننده مقدار زاویه چرخش نیست و باید جهت حرکت و تعداد دورهای زده شده نیز مشخص باشند.

در ادامه، این مفهوم به صورت حرکت یک نقطه روی محیط یک دایره نیز توصیف می‌شود و مفهوم زاویه چرخش با مقدار چرخش یک نقطه روی محیط یک دایره ارتباط برقرار می‌کند. به ویژه، مفهوم نقطه متناظر یک زاویه چرخش، روی دایره‌ای که مبدأ برای آن انتخاب شده است معرفی می‌شود.

برای تمرین روی این مفاهیم به کار در کلاس (۱) می‌رسیم.

کار در کلاس



دوچرخه‌سواری در یک مسیر دایره‌ای شکل، از نقطهٔ A طبق شکل زیر، با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. او یک دور این دایره را در ۳ دقیقه طی می‌کند.

۱ دوچرخه‌سوار، $\frac{1}{4}$ این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایرهٔ بالا با یک نقطه مشخص کنید.

۲ اگر دوچرخه‌سوار پس از ۳۰ ثانیه ($\frac{1}{2}$دقیقه) به نقطهٔ B رسیده باشد، زاویهٔ بین دو شعاع OA و OB چند درجه است؟

۳ این دوچرخه‌سوار پس از ۳ دقیقه و ۳۰ ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟

۴ اگر یک دوربین فیلمبرداری از مرکز دایره به دوچرخه‌سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟

۵ جدول زیر را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۴	۵	۴/۵	۶	۱۲
زاویهٔ چرخش دوربین						

حل کار در کلاس ۱

اهداف: تقویت مهارت یافتن زاویهٔ چرخش یک نقطه روی دایره، حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات، بازنمایی‌ها.

۱ کل مسیر یک دایره است و $\frac{۱}{۴}$ آن به اندازه یک ربع دایره است. بنابراین در نقطه متناظر زاویه ۹۰ درجه قرار خواهد گرفت. کل مسیر در ۳ دقیقه طی می‌شود، پس $\frac{۱}{۴}$ آن در $\frac{۳}{۴}$ دقیقه یعنی ۴۵ ثانیه طی خواهد شد.

یا به کمک جدول تناسب:

۳ دقیقه = ۱۸۰ ثانیه ←

$\frac{۱}{۴}$	۱
...	۱۸۰

← ... =۴۵

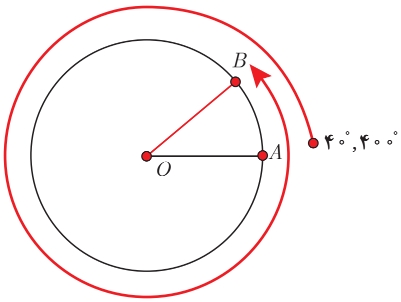
۲ طی کردن کل مسیر به معنای طی زاویه به اندازه ۳۶۰ درجه است. پس

۳۶۰ درجه در ۳ دقیقه طی می‌شود و در ۱ دقیقه ۱۲۰ درجه طی می‌شود. پس در $\frac{۱}{۳}$ دقیقه، ۴۰ درجه طی می‌شود.

یا به کمک جدول تناسب:

درجه ...	۳۶۰ درجه
۲۰ ثانیه	۱۸۰ درجه

$\rightarrow$ ... = °۴۰



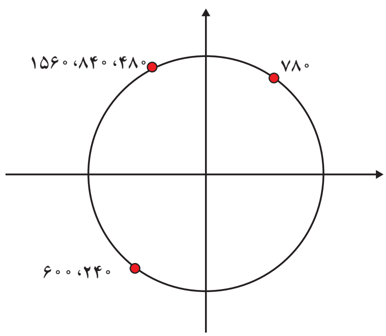
۳ پس از ۳ دقیقه دوچرخه سوار به مبدأ برگشته است و پس از ۲۰ ثانیه در ادامه حرکت طبق (۲)، ۴۰ درجه دیگر طی کرده است. پس در نقطه متناظر ۴۰ درجه قرار می‌گیرد.

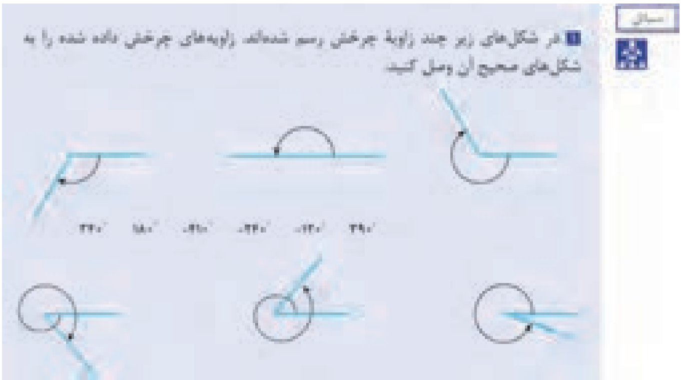
۴ در (۱) محاسبه کردیم که دوچرخه سوار در هر دقیقه ۱۲۰ درجه چرخش می‌کند.

۵ با توجه به (۳) جدول به شکل زیر در می‌آید.

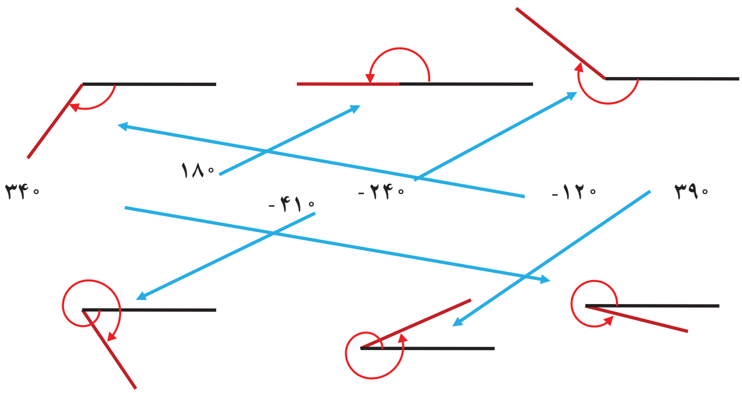
زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۴	۵	۶/۵	۷	۱۳
زاویه چرخش دوربین	۲۴۰	۴۸۰	۶۰۰	۷۸۰	۸۴۰	۱۵۶۰

نقاط متناظر زاویه‌های چرخش این جدول به صورت زیرند.





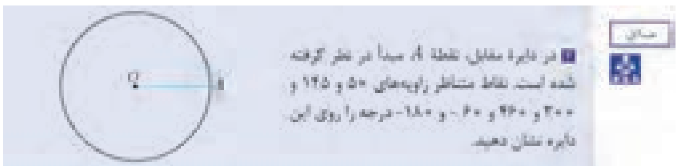
حل مسائل



مهارت‌ها و فرایندها:

پرورش تفکر بصری.

اهداف: تشخیص دیداری چرخش و مرتبط کردن با مفهوم اندازهٔ زاویهٔ چرخش

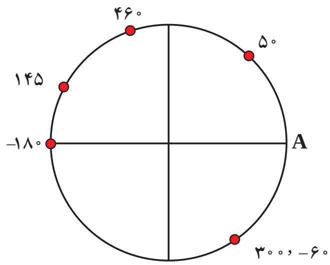


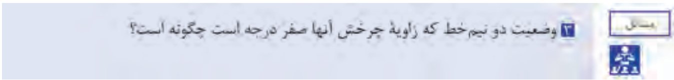
مهارت‌ها و فرایندها:

مهارت یافتن زاویهٔ دلخواه روی دایره.

اهداف: تشخیص چرخش مثبت و منفی و نقاط متناظر زاویه‌ها روی دایره

نقطه متناظر آنها به شکل زیرند.




مسائل

۳ وضعیت دو نیم‌خط که زاویهٔ چرخش آنها صفر درجه است چگونه است؟

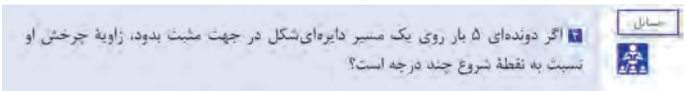
۳ وضعیت دو نیم‌خط که زاویه چرخش آنها صفر درجه است چگونه است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله.

اهداف: تشخیص زاویه صفر و مفهوم آن

این دو نیم خط بر هم منطبق‌اند.


مسائل

۴ اگر دونده‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای‌شکل در جهت مثبت بدود، زاویهٔ چرخش او نسبت به نقطهٔ شروع چند درجه است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی.

اهداف: تشخیص رابطه بین اندازهٔ زاویهٔ چرخش و تعداد دورهای زده شده برای هر دور ۳۶۰ درجه چرخیده است و برای ۵ دور ۵×۳۶۰ یعنی ۱۸۰۰ درجه چرخیده است.

مسائل

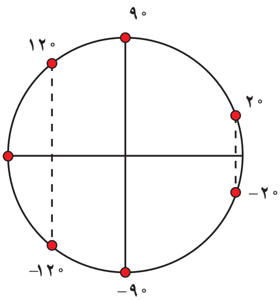
۵ یک دایره و یک مبدأ روی آن انتخاب کنید. نقاط متناظر دو زاویهٔ چرخش ۱۲۰ و ۱۲۰- درجه را روی آن بیابید. از لحاظ هندسی این نقاط چه وضعیتی نسبت به هم دارند. دو زاویهٔ قرینه دیگر مثال بزنید و وضعیت نقاط متناظر آنها نسبت به هم را توصیف کنید. آیا این وضعیت برای هر دو زاویه که قرینهٔ هم باشند برقرار است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، ارتباطات.

اهداف: تشخیص رابطه بین دو زاویه قرینه

نقاط متناظر دو زاویه ۱۲۰ و ۱۲۰- درجه نسبت به محور افقی قرینه یکدیگرند. برای سایر زاویه‌های قرینه هم همین وضعیت برقرار است.



بخش دوم: واحد اندازه‌گیری زاویه: رادیان

اهداف بخش

- آشنایی با واحد اندازه‌گیری رادیان برای زاویه‌های دلخواه
- آشنایی با تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر

پیش‌نیازهای بخش:

- آشنایی با چرخش یک نقطه روی یک دایره و طول کمان طی شده

واژه‌های کلیدی: زاویه، طول کمان دایره، چرخش در دایره

نگاه کلی به بخش

در این بخش واحد جدیدی برای اندازه‌گیری زاویه به نام رادیان مطرح می‌شود. رویکرد ما در این بخش استفاده مجدد از داستان چرخ و فلک است تا مسافت طی شده توسط کابین‌های چرخ و فلک مورد توجه قرار گیرند. با مطرح شدن طول کمان طی شده توسط کابین‌ها و رابطه آن با زاویه چرخش مفهوم واحد رادیان برای اندازه‌گیری زاویه‌ها ساخته می‌شود.

ورود به مطلب

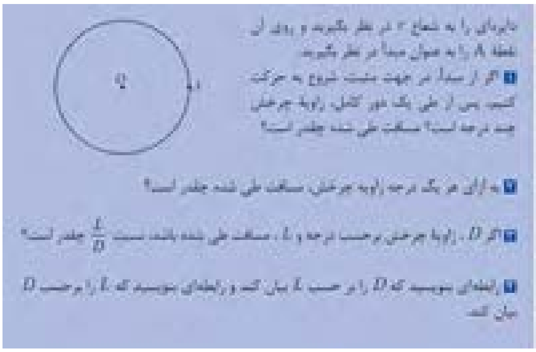
در این بخش که واحد جدیدی برای اندازه‌گیری زاویه ارائه می‌شود، به رابطه مستقیم بین طول کمان طی شده و اندازه زاویه چرخش اشاره شده است. چون تنها واحد اندازه‌گیری زاویه، که فعلاً می‌شناسیم درجه است، رابطه بین طول کمان طی شده و زاویه چرخش بر حسب درجه به دست آمده است. از آنجا که از زاویه طی شده می‌توان مسافت طی شده را یافت و برعکس از مسافت طی شده می‌توان زاویه طی شده را یافت، این نکته مطرح می‌شود که طول کمان طی شده نیز می‌تواند اندازه زاویه را به عنوان یک واحد جدید، اندازه‌گیری کند که این واحد جدید را رادیان می‌نامند.

البته واحدهای اندازه‌گیری همگی قراردادی هستند، ولی در مورد زاویه می‌توان مطرح کرد که اندازه زاویه بر حسب طول کمان طی شده (در دایره به شعاع ۱) یک واحد طبیعی است. مثلاً واحد درجه از تقسیم زاویه قائمه به ۹۰ قسمت مساوی به دست می‌آید. عدد ۹۰ ویژگی مهمی ندارد و شاید بهتر بود زاویه قائمه را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کردیم که در این صورت زاویه به دست آمده را ۱ گراد می‌نامند. در هر صورت هر گونه تقسیم زاویه قائمه اختیاری است و ارجحیتی

نسبت به هم ندارند. اما واحد رادیان بسیار طبیعی است و با طول کمان طی شده در دایره به شعاع ۱ بیان می‌شود. طبیعی بودن این واحد وقتی مشخص می‌شود که رابطه بین طول کمان یک دایره دلخواه را با شعاع دایره و زاویه کمان به دست می‌آوریم.

فعالیت آموزشی

در این بخش، به معرفی واحد رادیان برای اندازه‌گیری زاویه‌ها پرداخته می‌شود. واحد رادیان در ارتباط با طول کمان طی شده برای یک زاویه چرخش است. طول کمان طی شده به شعاع دایره هم بستگی دارد و نسبت کمان طی شده به شعاع دایره متناسب با اندازه زاویه است و همین مقدار به عنوان اندازه زاویه بر حسب رادیان تعریف می‌شود.
در این بخش نیز در طی یک مباحثه این سؤال مطرح می‌شود که رابطه طول کمان طی شده با اندازه زاویه چگونه است. این رابطه در فعالیت (۱) به دست می‌آید.


فعالیت ۱

دایره‌ای را به شعاع r در نظر بگیرید و روی آن نقطهٔ A را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید.

۱ اگر از مبدأ در جهت مثبت شروع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل زاویهٔ چرخش چند درجه است؟ مسافت طی شده چقدر است؟

۲ به ازای هر یک درجه زاویه چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

۳ اگر D، زاویهٔ چرخش برحسب درجه و L، مسافت طی شده باشد نسبت $\frac{L}{D}$ چقدر است؟

۴ رابطه‌ای بنویسید که D را بر حسب L بیان کند و رابطه‌ای بنویسید که L را برحسب D بیان کند.

اهداف موضوعی:

۱ درک ارتباط زاویهٔ چرخش یک نقطه روی دایره و طول کمان طی شده،

۲ زمینه‌سازی برای معرفی واحد رادیان،

۳ ارائه قانون رابطهٔ بین کمان طی شده و اندازهٔ زاویهٔ چرخش.

مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها.

حل فعالیت (۱)

۱ در یک دور کامل زاویه چرخش ۳۶۰ درجه است و طول مسافت طی شده

همان محیط دایره است که برابر $۲\pi r$ است.

۲ به خاطر یکسانی طول کمان‌ها در هر ۱ درجه، به ازای هر یک درجه مسافت طی شده $\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$ است.

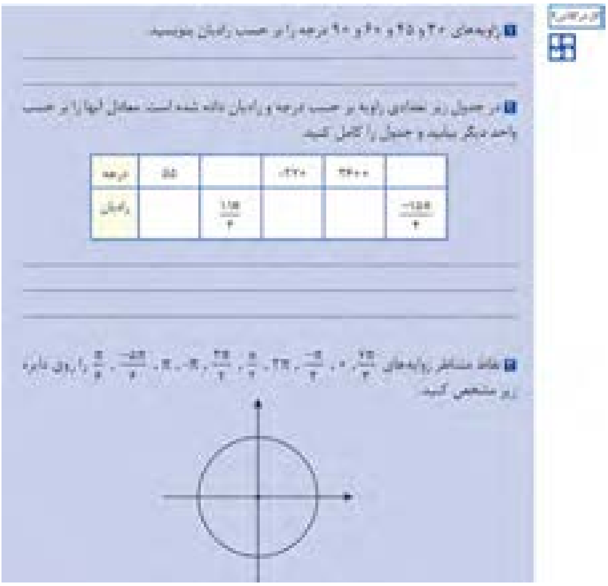
۳ به ازای هر یک درجه، مسافت طی شده $\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$ است، پس به ازای D درجه مسافت طی شده $\frac{۲\pi r}{۳۶۰}D$ است. یعنی $L=\frac{۲\pi r}{۳۶۰}D$، پس $\frac{L}{D}=\frac{\pi r}{۱۸۰}$.

۴ از تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت: $L=\frac{\pi r}{۱۸۰}D$ و $D=\frac{۱۸۰}{\pi r}L$

پس از جمع‌بندی نتایج به‌دست آمده از این فعالیت، واحد رادیان معرفی می‌شود و روابط تبدیل کننده واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر ارائه می‌شوند و مثال‌هایی از این تبدیل واحدها ارائه می‌شود.

در ادامه به یک بدفهمی رایج درباره عدد π پرداخته می‌شود. π یک عدد مشخص در ریاضی است که تقریباً ۳/۱۴ است. هر کجا که عدد π ظاهر می‌شود مقدار تقریبی آن همین مقدار است. مثلاً زاویه π رادیان یعنی تقریباً ۳/۱۴ رادیان. همواره باید مشخص باشد اندازه زاویه داده شده بر حسب درجه است یا رادیان. بسیاری از زاویه‌های آشنا بر حسب رادیان، نماد π در آن به‌کار رفته است، یک قرارداد نیمه رسمی وجود دارد که هر اندازه زاویه که در آن نماد π به‌کار رفته است بر حسب رادیان است. اما π یک عدد مانند سایر اعداد است و می‌توان از π برای درجه هم استفاده کرد. مثلاً π درجه هم داریم که تقریباً همان ۳/۱۴ درجه است ولی چنین اندازه‌ای عموماً به‌کار نمی‌رود. در هر صورت در هر اندازه‌ای از زاویه باید واحد اندازه‌گیری مشخص باشد، مگر آنکه به طور ضمنی واحد اندازه‌گیری مشخص باشد.

برای تمرین روی تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر و نقطه متناظر بر حسب واحد رادیان به کار در کلاس (۲) می‌رسیم.


۱ زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ و ۹۰ درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

۲ در جدول زیر تعدادی زاویه بر حسب درجه و رادیان داده شده است. معادل آنها را بر حسب واحد دیگر بیابید و جدول را کامل کنید.

درجه	۵۵		-۲۷۰	۳۶۰۰	
رادیان		$\frac{۱۱\pi}{۳}$			$\frac{-۱۵\pi}{۴}$

۳ نقاط متناظر زاویه‌های [illegible] را روی دایره زیر مشخص کنید.

اهداف: تقویت مهارت تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر، تقویت مهارت نمایش زاویه‌های دلخواه روی یک دایره، تعیین وضعیت یک نقطه روی دایره با استفاده از زاویهٔ چرخش و وضعیت اولیهٔ آن، پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌ها.

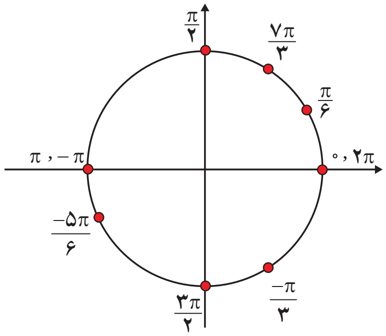
حل کار در کلاس ۲

۱ زاویه‌های داده شده را به کمک رابطه تبدیل‌کننده درجه به رادیان، به رادیان تبدیل می‌کنیم که به ترتیب $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۲}$ خواهند بود.

۲ کامل شده جدول به صورت زیر است:

درجه	۵۵	۶۶۰	-۲۷۰	۳۶۰۰	-۶۷۵
رادیان	$\frac{۱۱\pi}{۳۶}$	$\frac{۱۱\pi}{۳}$	$-\frac{۳\pi}{۲}$	۲۰π	$\frac{-۱۵\pi}{۴}$

۳



۴ رئوس شش ضلعی منتظم کل دایره را به شش قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. پس هر رأس نسبت به رأس قبلی ۶۰ درجه چرخش کرده است. از زاویه صفر که شروع کنیم، به ترتیب زاویه‌های ۰، ۶۰، ۱۲۰، ۱۸۰و ۲۴۰ و ۳۰۰ را به دست می‌آوریم.

۵ با دوران این چند ضلعی به اندازه ۳۰ درجه، کلیهٔ زاویه‌ها ۳۰ درجه اضافه می‌شوند و به صورت ۳۰، ۹۰، ۱۵۰، ۲۱۰ و ۲۷۰ و ۳۳۰ در می‌آیند.
در آخر این بخش به مسائل می‌رسیم که حل آنها به شکل زیر است:


مسائل
۱ زاویه‌های ۱۵، ۱۹۰، ۵۳۰ و ۱۰۰۰ درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

حل مسائل

مهارت‌ها و فرایندها:
مهارت تبدیل اندازه زاویه برحسب درجه به رادیان

اهداف: بالا بردن توانایی عملی تبدیل واحد درجه به رادیان و استفاده از رابطه بین درجه و رادیان

با استفاده از رابطه تبدیل کننده درجه به رادیان که به صورت $R=\frac{\pi}{180}D$ است، معادل این زاویه‌ها را برحسب رادیان به دست می‌آوریم. به ازای $D=15$ داریم $R=\frac{\pi}{180}\times 15=\frac{\pi}{12}$، به ازای $D=190$ داریم $R=\frac{\pi}{180}\times 190=\frac{19\pi}{18}$، به ازای $D=530$ داریم $R=\frac{\pi}{180}\times 530=\frac{53\pi}{18}$، به ازای $D=1000$ داریم $R=\frac{\pi}{180}\times 1000=\frac{50\pi}{9}$.

سؤال

زاویه‌های $\frac{\pi}{۷}$ ، $\frac{۴\pi}{۳}$ ، $\frac{-۸\pi}{۳}$ ، $\frac{-۱۴\pi}{۵}$ را بر حسب درجه بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها:

مهارت تبدیل اندازه زاویه برحسب رادیان به درجه

اهداف: بالا بردن توانایی عملی تبدیل واحد رادیان به درجه و استفاده از رابطه بین درجه و رادیان.

با استفاده از رابطه تبدیل‌کننده رادیان به درجه که به صورت $D=\frac{۱۸۰}{\pi}R$ است، معادل این زاویه‌ها را برحسب درجه به دست می‌آوریم. به ازای $R=\frac{\pi}{۷}$ داریم: $D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{\pi}{۷}=\frac{۱۸۰}{۷}$ ، به ازای $R=\frac{۴\pi}{۳}$ داریم: $D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{۴\pi}{۳}=۲۴۰$ ، به ازای $R=\frac{-۸\pi}{۳}$ داریم: $D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{-۸\pi}{۳}=-۴۸۰$ ، به ازای $R=\frac{-۱۴\pi}{۵}$ داریم: $D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{-۱۴\pi}{۵}=-۵۰۴$.

سؤال

اگر یک نیم‌خط بعد از چرخش روی حالت اول خود منطبق شود، توضیح دهید زاویهٔ چرخش آن بر حسب رادیان چه مقادیری می‌تواند باشد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، ارتباطات

اهداف: تشخیص زاویه‌هایی که مربوط به دورهای کامل روی دایره هستند.

وقتی یک نیم خط، بعد از چرخش، روی خود منطبق می‌شود ممکن است یک دور یا ۲ دور یا بیشتر چرخیده باشد ولی در هر صورت تعداد صحیحی دور در جهت مثبت یا منفی چرخیده است. پس زاویه چرخش به صورت $۲\pi k$ رادیان یا $۳۶۰k$ درجه است که k یک عدد صحیح (مثبت یا منفی) است.

سؤال

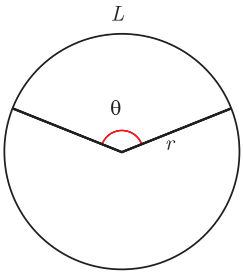
در یک دایره به شعاع r، اگر زاویهٔ یک کمان بر حسب رادیان، θ باشد طول این کمان برحسب r و θ چقدر است؟

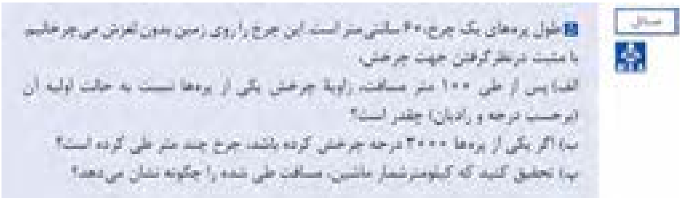
مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله

اهداف: تشخیص رابطه بین اندازه زاویه بر حسب رادیان و طول کمان و چگونگی تأثیر شعاع دایره بر آن

اگر طول کمان را با L نشان دهیم، با توجه به تعریف اندازه زاویه بر حسب رادیان داریم $\frac{L}{r}=\theta$، پس $L=r\theta$.





طول پره‌های یک چرخ ۶۰ سانتی‌متر است. این چرخ را روی زمین بدون لغزش می‌چرخانیم با مثبت درنظر گرفتن جهت چرخش.

الف) پس از طی ۱۰۰ متر مسافت، زاویهٔ چرخش یکی از پره‌ها نسبت به حالت اولیه آن (برحسب درجه و رادیان) چقدر است؟

ب) اگر یکی از پره‌ها ۳۰۰۰ درجه چرخش کرده باشند، چرخ چند متر طی کرده است؟

پ) تحقیق کنید که کیلومترشمار ماشین، مسافت طی شده را چگونه نشان می‌دهد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی.

اهداف: دیدن مفهوم زاویه چرخش در یک زمینه عملی و اهمیت واحد رادیان در محاسبات

الف) وقتی چرخ مسافت ۱۰۰ متر طی می‌کند، مانند آن است که طول کمان طی‌شده با چرخش یک نقطه از محیط دایره چرخ، ۱۰۰ متر است. شعاع دوچرخه ۰/۶ متر است، پس زاویه چرخش (بر حسب رادیان) برابر $\frac{۱۰۰}{۰/۶}$ یعنی $\frac{۵۰۰}{۳}$ رادیان است. مقدار زاویه چرخش بر حسب درجه از طریق رابطه $D=\frac{۱۸۰}{\pi}R$ به دست می‌آید. پس،

$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{۵۰۰}{۳}=\frac{۳۰۰۰۰}{\pi}\approx ۹۵۴۹$$

ب) چون رابطه طول کمان طی شده با زاویه بر حسب رادیان آسان‌تر است، ۳۰۰۰ درجه را بر حسب رادیان می‌نویسیم. داریم: $R=\frac{\pi}{۱۸۰}D=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۳۰۰۰=\frac{۵۰\pi}{۳}$

اگر مسافت طی شده (بر حسب متر) L باشد داریم:

$$L=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵۰\pi}{۳}=۱۰\pi\approx ۳۱/۴$$

پ) این سؤال نیازمند تحقیق است و ظاهراً کیلومترشمار ماشین با اندازه‌گیری تعداد دورهای چرخش یکی از چرخ‌ها تشخیص می‌دهد مسافت طی شده توسط ماشین چقدر است. حاصل‌ضرب تعداد دورهای چرخش در محیط چرخ برابر است با مسافت طی شده است.

سؤال

در یک چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیهٔ خود به اندازهٔ ۱ رادیان چرخیده باشد چه مسافتی را طی کرده است؟ اگر مسافت طی شده توسط کابین ۷۰ متر باشد، زاویهٔ چرخش کابین برحسب رادیان و درجه چقدر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی.

اهداف: به کارگیری واحد رادیان در یک زمینه عملی و دیدن رابطه طبیعی واحد رادیان و طول کمان طی شده طبق رابطه طول کمان با زاویه کمان بر حسب رادیان، اگر ۱ رادیان چرخش داشته باشیم طول کمان طی شده به اندازه شعاع دایره است، یعنی یک کابین به ازای ۱ رادیان چرخش ۱۰ متر طی می‌کند.

اگر کابین ۷۰ متر طی کرده باشد، زاویه چرخش آن بر حسب رادیان $\frac{۷۰}{۱۰}$ یعنی ۷ رادیان است که بر حسب درجه $۷\times\frac{۱۸۰}{\pi}$ یعنی تقریباً ۴۰۱ درجه خواهد شد.

بخش سوم: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه

اهداف بخش

- آشنایی با سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه‌های دلخواه
- آشنایی با دایره مثلثاتی و ربع‌های آن
- آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در ربع اوّل با نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در ربع‌های دیگر
- آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه

پیش‌نیازهای بخش:
صفحه مختصات و مختصات نقطه در آن، زاویه چرخش، تشابه، فاصله نقطه تا مبدأ
واژه‌های کلیدی: مختصات نقطه، زاویه چرخش، نسبت مثلثاتی

نگاه کلی به بخش

در این بخش، مفهوم نسبت‌های مثلثاتی که قبلاً برای زاویه‌های تند تعریف شده‌اند، برای زاویه‌های دلخواه تعمیم داده می‌شوند. برای این تعمیم، ابتدا طی یک مباحثه بین هنرآموز و هنرجویان، به رابطه بین مختصات یک نقطه روی ربع دایره به شعاع ۱ و نسبت‌های مثلثاتی کسینوس و سینوس زاویه تند متناظر آن، توجه داده می‌شود. سپس از هنرجویان خواسته می‌شود نقطه را به نیم‌دایره به شعاع ۱ حرکت دهند و به این رابطه همچنان توجه داشته باشند تا حدس مناسبی برای سینوس و کسینوس زاویه‌های باز ارائه کنند. این حدس خود به خود برای سایر زاویه‌ها در نظر گرفته می‌شود و تعریف رسمی سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه ارائه می‌شود.
نهایتاً اصطلاح دایره مثلثاتی و محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها معرفی می‌شوند. با تقسیم‌بندی دایره مثلثاتی به ربع‌های اوّل تا چهارم روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در ربع اوّل با ربع‌های دوم و سوم بررسی می‌شوند. به کمک این رابطه‌ها، محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی که در ربع دوم و سوم قرار دارند به محاسبه نسبت‌های مثلثاتی در ربع اوّل برگردانده می‌شوند و روشی برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی این‌گونه زاویه‌ها به دست می‌آید. همچنین رابطه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها و قرینه زاویه‌ها بررسی می‌شود و اینکه با اضافه شدن مضارب صحیح به یک زاویه نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کند ارائه می‌شوند و از این طریق نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه‌ای را می‌توان به نسبت‌های مثلثاتی یک

زاویه تند تبدیل کرد.
تا اینجا فقط درباره سینوس و کسینوس زاویه‌ها بحث شده است. برای ارائه تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه، ابتدا در یک فعالیت رابطه بین تانژانت و سینوس و کسینوس زاویه‌های تند ارائه می‌شود تا از طریق آن تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه معرفی شود.
نهایتاً در پایان این بخش با انجام یک تمرین در کلاس، چند رابطه مهم بین نسبت‌های مثلثاتی معرفی می‌شوند.

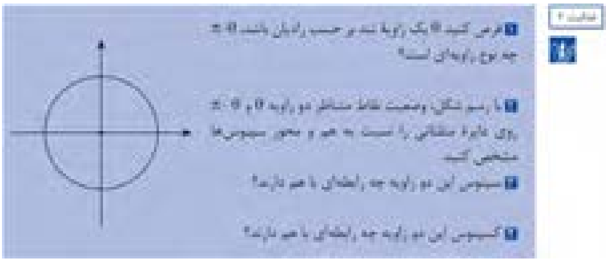
ورود به مطلب

برای آموزش هر مفهوم جدید مناسب است، انگیزه و سؤال موجه و جالبی را مطرح سازیم تا از طریق تلاش برای جواب به آن سؤال مفهوم جدید ارائه شود. البته، مفهوم مورد نظر این بخش با تعمیم سر وکار دارد و می‌توان به سادگی پرسشی درباره امکان تعمیم مفاهیم نسبت‌های مثلثاتی به زاویه‌های دلخواه بحث را شروع کرد. در کتاب به سادگی فقط امکان تعمیم نسبت‌های مثلثاتی به زاویه‌های دلخواه مطرح شده است و در طی یک مباحثه سعی در انجام این تعمیم شده است. اما، اگر روابط دیگری از نسبت‌های مثلثاتی داشته باشیم که برای زاویه‌های باز هم درست باشد، شاید بتوانیم برای این تعمیم انگیزه بهتری داشته باشیم.
مثلاً ممکن است هنرجویان را ابتدا با تساوی $BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB.AC.\cos\theta$ در یک مثلث ABC با زاویه تند θ در رأس A آشنا کنیم. سپس، این سؤال قابل طرح است که در حالتی که θ زاویه باز باشد، آیا این تساوی می‌تواند درست باشد؟ این سؤال به معنای آن است که باید برای $\cos\theta$ در حالتی که θ یک زاویه باز است، تعریف مناسبی داشته باشیم. البته به‌کارگیری این روش‌ها نیازمند قوت علمی کافی برای هنرجویان است. برای هنرجویانی که قوت علمی کافی ندارند، همانند کتاب می‌توانید سؤال از تعمیم را مستقیماً طرح کنید.

فعالیت آموزشی

در ابتدای این بخش از زبان هنرجو، از امکان تعمیم نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های دلخواه پرسش می‌شود. این پرسش‌ها توسط هنرآموز هدایت می‌شود تا به جواب مطلوب رسیده شود. مفهوم نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های تند در ربع دایره واحد بررسی و نهایتاً به کل دایره توسعه می‌یابد. تعریف رسمی نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و دایره مثلثاتی در این قسمت معرفی می‌شوند و پس از آشنایی کافی، به تعمیم تعریف تانژانت پرداخته می‌شود. پس از ارائه چند مثال به فعالیت (۲) می‌رسیم که در آن چگونگی محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های

باز مشخص می‌شود.



فعالیت ۲

۱ فرض کنید θ یک زاویهٔ تند بر حسب رادیان باشد. π-θ چه نوع زاویه‌ای است؟

۲ با رسم شکل، وضعیت نقاط متناظر دو زاویه θ و π-θ روی دایرهٔ مثلثاتی را نسبت به هم و محور سینوس‌ها مشخص کنید.

۳ سینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴ کسینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

هدف موضوعی:

درک وجود رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ باز و مکمل آن،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

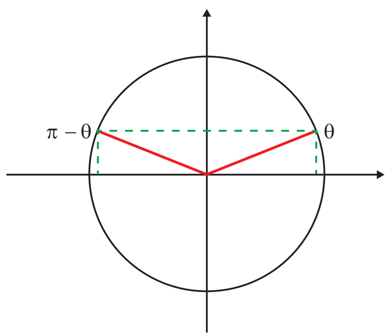
۳ مقایسه‌کردن،

۴ تعمیم.

حل فعالیت ۲

۱ وقتی θ (بر حسب رادیان) زاویه تند باشد، π-θ که زاویه مکمل آن است، یک زاویه باز است.

۲ از روی دایره مثلثاتی وضعیت نقاط متناظر زاویه تند θ و زاویه باز π-θ را تشخیص می‌دهیم.



دیده می‌شود نقاط متناظر دو زاویه θ و $\pi-\theta$ نسبت به محور عمودی قرینه یکدیگرند.

۳ به خاطر ویژگی به دست آمده در (۲) سینوس این دو زاویه مساوی هم هستند.

۴ به خاطر ویژگی به دست آمده در (۲) کسینوس این دو زاویه قرینه هم هستند.
پس از جمع‌بندی نتایج به دست آمده از این فعالیت، کاربردهایی از روابط به‌دست آمده در محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز ارائه شده است تا به کار در کلاس (۳) می‌رسیم تا نتایج مشابهی برای زاویه‌های θ و $\pi+\theta$ به دست آوریم.

حل کار در کلاس ۳

اهداف: یافتن رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی به صورت θ و $\pi+\theta$، پیوندها و اتصال‌ها، مقایسه‌کردن، تعمیم.

۱ وقتی نقطه متناظر زاویه θ در ربع اوّل است، نقطه متناظر زاویه $\pi+\theta$ در ربع سوم است.

۲ با توجه به شکل داده شده، نقاط متناظر زاویه‌های θ و $\pi+\theta$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه یکدیگرند.

۳ مختصات طولی و عرضی این نقاط قرینه یکدیگرند.

۴ بنابراین، سینوس و کسینوس این دو زاویه قرینه یکدیگرند.

روابط به دست آمده برای هر زاویه دلخواه θ برقرارند. با ارائه مثال‌هایی، چگونگی استفاده از این روابط برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی که نقاط

متناظرشان در ربع سوم قرار می‌گیرد، مشخص می‌شود. برای تکمیل بحث و یافتن روابط اساسی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها، در کاردرکلاس (۴) روابط بین نسبت‌های مثلثاتی θ و $-\theta$ بررسی می‌شود.

حل کار در کلاس ۴

اهداف: یافتن رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی به صورت θ و $-\theta$، پیوندها و اتصال‌ها، مقایسه‌کردن، تعمیم.

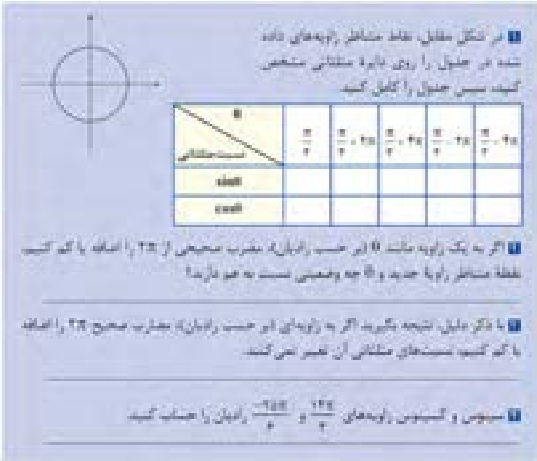
۱ اگر نقطه متناظر زاویه θ در ربع اوّل باشد، نقطه متناظر زاویه $-\theta$ در ربع چهارم است.

۲ نقاط متناظر θ و $-\theta$ نسبت به محور افقی قرینه یکدیگرند.

۳ طول این نقاط مساوی هستند ولی عرض آنها قرینه یکدیگرند.

۴ بنابراین،کسینوس این دو زاویه مساوی یکدیگرند و سینوس این دو زاویه قرینه یکدیگرند.

به کمک نتایج به دست آمده در این مسئله، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های منفی نیز قابل محاسبه هستند و مثال‌هایی ارائه شده است تا به کار در کلاس (۵) می‌رسیم تا تکلیف نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های بزرگ‌تر از 2π (بر حسب رادیان) در آن مشخص شود.



۱ در شکل مقابل نقاط متناظر زاویه‌های داده شده در جدول را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید سپس جدول را کامل کنید.

θ / نسبت مثلثاتی	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}+۲\pi$	$\frac{\pi}{۳}+۴\pi$	$\frac{\pi}{۳}-۲\pi$	$\frac{\pi}{۳}-۴\pi$
[illegible]					
[illegible]					

۲ اگر به یک زاویه مانند θ (بر حسب رادیان) مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا کم کنیم، نقطهٔ متناظر زاویهٔ جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

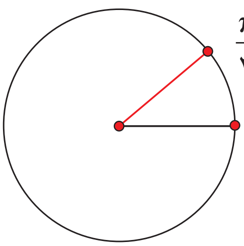
۳ با ذکر دلیل نتیجه بگیرید اگر به زاویه‌ای (بر حسب رادیان) مضارب صحیح ۲π را اضافه یا کم کنیم نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند.

۴ سینوس و کسینوس زاویه‌های [illegible] و [illegible] رادیان را حساب کنید.

حل کار در کلاس ۵

اهداف: تشخیص عدم تغییر نسبت‌های مثلثاتی وقتی مقدار زاویه (بر حسب رادیان) با مضرب صحیحی از ۲π جمع شود، پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌ها، مقایسه‌کردن، استدلال، تعمیم، ارتباطات.

۱ زاویه‌های داده شده همگی همان $\frac{\pi}{۳}$ هستند که با مضارب صحیحی از ۲π جمع یا تفریق شده‌اند و نقطه متناظر همگی آنها یک نقطه است. چون نقطه متناظر تمامی این زاویه‌ها یکی است نسبت‌های مثلثاتی آنها با هم مساوی است و مساوی نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{۳}$ هستند.



$$\frac{\pi}{۳}\,,\ \frac{\pi}{۳}+۲\pi\,,\ \frac{\pi}{۳}+۴\pi\,,\ \frac{\pi}{۳}-۲\pi\,,\ \frac{\pi}{۳}-۴\pi$$

θ / نسبت مثلثاتی	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}+2\pi$	$\frac{\pi}{3}+4\pi$	$\frac{\pi}{3}-2\pi$	$\frac{\pi}{3}-4\pi$
sinθ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosθ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

۲ وقتی به زاویه‌ای، مضرب صحیحی از 2π اضافه یا کم شود نقطه متناظر آن تغییری نمی‌کند.

۳ از آنجا که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، به نقطه متناظر آن در دایره مثلثاتی بستگی دارد و با اضافه یا کم شدن مضارب صحیح 2π به یک زاویه، نقطه متناظر آن تغییر نمی‌کند، نسبت‌های مثلثاتی آن نیز تغییر نمی‌کند.

۴ از آنجا که $\frac{14\pi}{3}=4\pi+\frac{2\pi}{3}$ داریم

$$\cos\frac{14\pi}{3}=\cos\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

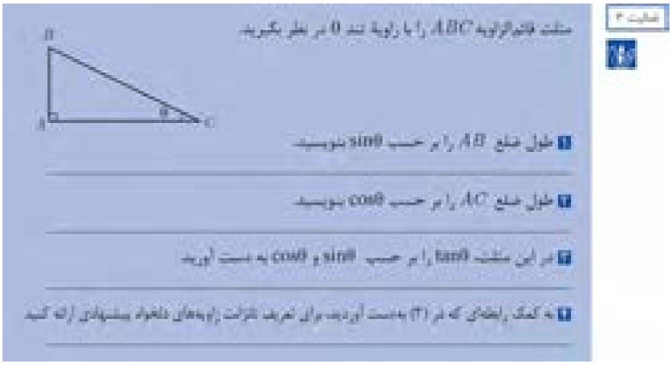
$$\sin\frac{14\pi}{3}=\sin\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵ به همین ترتیب داریم: $-\frac{25\pi}{6}=-4\pi-\frac{\pi}{6}$، بنابراین

$$\cos\frac{-25\pi}{6}=\cos\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{-\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{-25\pi}{6}=\sin\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{-\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

پس از بحث کافی در روابط بین سینوس و کسینوس زاویه‌ها، به تعمیم مفهوم تانژانت از طریق فعالیت (۳) می‌پردازیم.


فعالیت ۳

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با زاویهٔ تند θ در نظر بگیرید.

۱ طول ضلع AB را بر حسب $\sin\theta$ بنویسید.

۲ طول ضلع AC را بر حسب $\cos\theta$ بنویسید.

۳ در این مثلث $\tan\theta$ را بر حسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست آورید.

۴ به کمک رابطه‌ای که در (۳) به‌دست آوردید برای تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه پیشنهادی ارائه کنید.

اهداف موضوعی:

۱ درک وجود رابطه بین تانژانت زاویهٔ دلخواه و سینوس و کسینوس آن زاویه،

۲ درک مفهوم تانژانت زاویهٔ دلخواه.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ تعمیم،

۳ ارتباطات.

حل فعالیت ۳

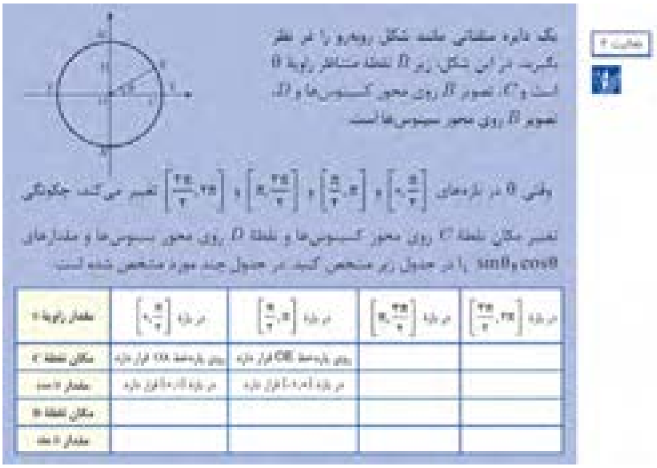
۱ در مثلث قائم‌الزاویه رسم شده داریم: $\sin\theta=\dfrac{AB}{BC}$، پس $AB=BC.\sin\theta$.

۲ در مثلث قائم‌الزاویه رسم شده داریم: $\cos\theta=\dfrac{AC}{BC}$، پس $AC=BC.\cos\theta$.

۳ در مثلث قائم‌الزاویه رسم شده داریم: $\tan\theta=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BC.\sin\theta}{BC.\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

۴ با توجه به رابطه بین تانژانت و سینوس و کسینوس در زاویه‌های تند، اگر این رابطه بخواهد برای زاویه‌های دیگر هم برقرار باشد، بهتر است تانژانت زاویه‌های دلخواه به صورت تقسیم سینوس آنها بر کسینوس آنها تعریف شود.

البته ممکن است هنرجویان نتوانند نتیجه‌گیری (۴) را انجام دهند یا فرض کنند خودبه‌خود باید این اتفاق بیفتد. هنرآموزان در این قسمت باید هنرجویان را به جواب درست راهنمایی کنند که تعریف به گونه‌ای انجام می‌شود که این تساوی برقرار بماند.
در ادامه در فعالیت (۴) به بررسی مقادیر ممکن برای سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه‌ها پرداخته می‌شود.



یک دایره مثلثاتی مانند شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. در این شکل زیر B نقطه متناظر زاویه θ است و C تصویر B روی محور کسینوس‌ها و D تصویر B روی محور سینوس‌ها است.

وقتی θ در بازه‌های $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ و $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ تغییر می‌کند چگونگی تغییر مکان نقطه C روی محور کسینوس‌ها و نقطه D روی محور سینوس‌ها و مقدارهای $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را در جدول زیر مشخص کنید. در جدول چند مورد مشخص شده است.

مقدار زاویه θ	در بازه $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	در بازه $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$	در بازه $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$	در بازه $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$
مکان نقطه C	روی پاره‌خط OA قرار دارد	روی پاره‌خط OE قرار دارد		
مقدار $\cos\theta$	در بازه $[0,1]$ قرار دارد	در بازه $[-1,0]$ قرار دارد		
مکان نقطه D				
مقدار $\sin\theta$				

اهداف موضوعی:

درک مقادیر ممکن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه.

مهارت‌ها و فرایندها:

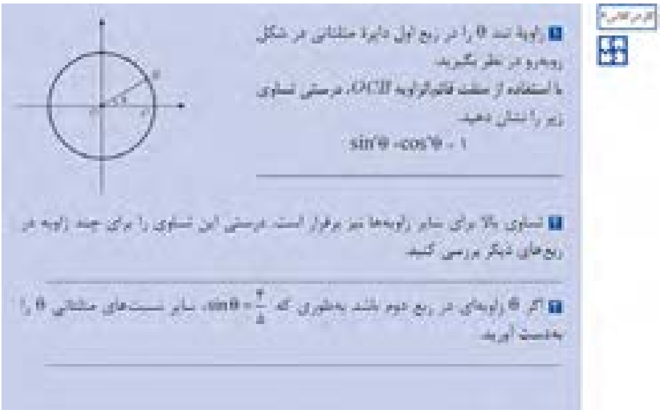
۱ پرورش تفکر بصری،

۲ تعمیم.

حل فعالیت ۴

مقدار زاویه θ	در بازه $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	در بازه $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$	در بازه $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$	در بازه $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$
مکان نقطه C	روی پاره‌خط OA قرار دارد.	روی پاره‌خط OE قرار دارد.	روی پاره‌خط OE قرار دارد.	روی پاره‌خط OA قرار دارد.
مقدار cosθ	در بازه $[0,1]$ قرار دارد.	در بازه $[-1,0]$ قرار دارد.	در بازه $[-1,0]$ قرار دارد.	در بازه $[0,1]$ قرار دارد.
مکان نقطه D	روی پاره‌خط OM قرار دارد.	روی پاره‌خط OM قرار دارد.	روی پاره‌خط ON قرار دارد.	روی پاره‌خط ON قرار دارد.
مقدار sinθ	در بازه $[0,1]$ قرار دارد.	در بازه $[0,1]$ قرار دارد.	در بازه $[-1,0]$ قرار دارد.	در بازه $[-1,0]$ قرار دارد.

پس از این فعالیت در ارتباط با قرارداد توان‌رسانی نسبت‌های مثلثاتی صحبت می‌شود و در ادامه، به کار در کلاس (۶) می‌رسیم که در آن به یک رابطه اساسی بین سینوس و کسینوس پرداخته می‌شود تا از طریق آن، با داشتن یکی از نسبت‌های مثلثاتی بتوان سایر نسبت‌های مثلثاتی را هم محاسبه کرد.


کار در کلاس ۶

۱ زاویهٔ تند θ را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی در شکل روبه‌رو در نظر بگیرید.
با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه OCH، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

۲ تساوی بالا برای سایر زاویه‌ها نیز برقرار است. درستی این تساوی را برای چند زاویه در ربع‌های دیگر بررسی کنید.

۳ اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به‌طوری که $\sin\theta = \frac{3}{5}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

اهداف: یافتن رابطهٔ بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، کسب مهارت در استفاده از رابطهٔ بین نسبت‌های مثلثاتی، استدلال و اثبات، تعمیم.

حل کار در کلاس (۶)

اهداف: یافتن برخی روابط مهم بین نسبت‌های مثلثاتی

۱ با رسم یک دایره مثلثاتی و با در نظرگرفتن یک زاویه در ربع اوّل، مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که طول اضلاع آن $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هستند و طول وتر آن ۱ است، رسم می‌کنیم و طبق قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$$

۲ در سایر ربع‌ها نیز این تساوی برقرار است، فقط علامت $\sin\theta$ و $\cos\theta$ ممکن است منفی شود که در درستی تساوی بالا تأثیری ندارد.

۳ از تساوی $\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$ نتیجه می‌شود

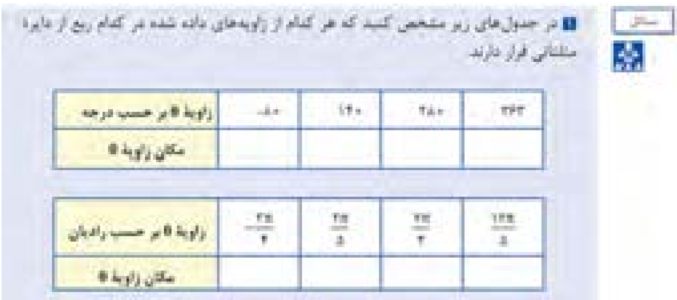
$$\sin\theta = \pm\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}$$

انتخاب علامت بستگی به آن دارد که زاویه در کدام ربع قرار گرفته باشد. در این مسئله، زاویه در ربع دوم است و کسینوس آن منفی است، پس

$$\cos\theta = -\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta} = -\sqrt{۱-\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}} = -\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}} = -\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۴}{۵}$$

تانژانت این زاویه نیز از طریق سینوس و کسینوس آن محاسبه می‌شوند. $\tan\theta = -\frac{۳}{۴}$

در این کتاب از سایر روابط بین نسبت‌های مثلثاتی صحبتی نشده است و بنا نیست بیش از این به این روابط پرداخته شود. هنرجویان هر کجا در عمل به روابط بیشتری نیاز داشته باشند می‌توانند این روابط را به دست آورند. مثلاً رابطه بین تانژانت و کسینوس نیامده است و اگر لازم شود با داشتن تانژانت، سایر نسبت‌های مثلثاتی محاسبه شود می‌توان از دو رابطه $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ و $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ هم‌زمان استفاده کرد و سینوس و کسینوس آن زاویه را به دست آورد. البته آن ربعی که زاویه در آن است نیز باید داده شده باشد.


مسائل

۱ در جدول‌های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه‌های داده شده در کدام ربع از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند

زاویهٔ θ بر حسب درجه	-۸۰	۱۴۰	۲۸۰	۳۶۳
مکان زاویهٔ θ				

زاویهٔ θ بر حسب رادیان	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
مکان زاویهٔ θ				

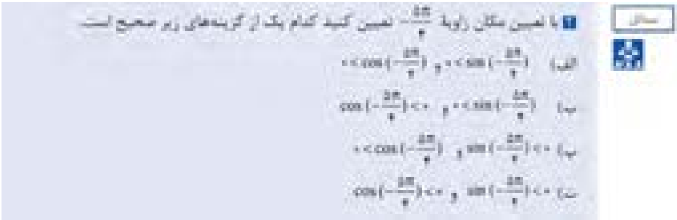
حل مسائل

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله.

اهداف: تشخیص نقاط متناظر زاویه‌ها که در کدام ربع واقع شده‌اند از طریق اندازه آنها

زاویه θ بر حسب درجه	-۸۰	۱۴۰	۲۸۰	۳۶۳
مکان زاویه θ	ربع چهارم	ربع دوم	ربع چهارم	ربع اوّل



سؤال

با تعیین مکان زاویهٔ $-\frac{5\pi}{4}$ تعیین کنید کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است.

الف) $0<\sin(-\frac{5\pi}{4})$ و $0<\cos(-\frac{5\pi}{4})$

ب) $0<\sin(-\frac{5\pi}{4})$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4})<0$

پ) $\sin(-\frac{5\pi}{4})<0$ و $0<\cos(-\frac{5\pi}{4})$

ت) $\sin(-\frac{5\pi}{4})<0$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4})<0$

مهارت‌ها و فرایندها:

مهارت مشخص کردن زاویه روی دایره، بازنمایی‌های چندگانه.

اهداف: تمرین روی مکان‌یابی نقاط متناظر زاویه‌ها که در کدام ربع واقع می‌شوند.

از آنجا که $-\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{-۵\pi}{۴}$ این زاویه در ربع دوم قرار دارد و گزینه (ب) صحیح است.

سؤال

جدول زیر را با مشخص کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها کامل کنید. در هر مورد مثالی بزنید.

θ / علامت نسبت مثلثاتی	ربع اوّل	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$				
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

مهارت‌ها و فرایندها:

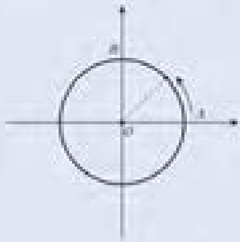
حل مسئله.

اهداف: درک علامت نسبت‌های مثلثاتی وابسته به مکان نقاط متناظر آنها در ربع‌های مختلف

θ / علامت نسبت مثلثاتی	ربع اوّل	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	مثبت	مثبت	منفی	منفی
$\cos\theta$	مثبت	منفی	منفی	مثبت
$\tan\theta$	مثبت	منفی	مثبت	منفی

دوچرخه‌سواری روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۵۰ متر، با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند. دو محور عمود بر هم (مانند شکل) در این دایره رسم می‌کنیم.

الف) اندازهٔ زاویهٔ چرخش (بر حسب رادیان) دوچرخه سوار را بر حسب زمان (ثانیه) به‌دست آورید.



ب) اگر دوچرخه‌سوار پس از ۳۰ دقیقه حرکت بایستد، در کدام ربع از دایره ایستاده است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله. پرورش، تفکر بصری، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

اهداف: دیدن مفهوم زاویه بر حسب رادیان در یک حرکت چرخشی و مکان‌یابی در ربع‌ها

الف) دوچرخه‌سوار در هر ثانیه ۲ متر حرکت می‌کند و شعاع دایره ۵۰ متر است، یعنی در هر ثانیه $\frac{۲}{۵۰}$ رادیان چرخش می‌کند.

ب) ۳۰ دقیقه معادل ۱۸۰۰ ثانیه است و زاویه چرخش دوچرخه‌سوار برابر $\frac{۲}{۵۰}\times ۱۸۰۰$ رادیان یعنی ۷۲ رادیان است. باید تشخیص دهیم نقطه متناظر ۷۲ رادیان در کدام ربع قرار دارد. برای یافتن نزدیک‌ترین مضرب صحیح از ۲π نزدیک ۷۲ مقدار تقریبی $\frac{۷۲}{۲\pi}$ را حساب می‌کنیم که تقریباً ۱۱/۴ است. مقدار $۷۲-۱۱\times۲\pi$ تقریباً ۲/۹ است. نقطه متناظر ۲/۹ رادیان تقریباً همان نقطه متناظر ۷۲ رادیان است. داریم $\frac{\pi}{۲} < ۲/۹ < \pi$، پس نقطه متناظر ۷۲ رادیان در ربع دوم است.

زاویهٔ θ در ربع سوم است و $\cos\theta = -\frac{۱}{۵}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله.

اهداف: یافتن سایر نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه وقتی یکی از نسبت‌ها معلوم است و مکان نقطه متناظر زاویه معلوم است که در کدام ربع واقع شده است.
در ربع سوم سینوس، مقداری منفی است، پس

$$\sin\theta = -\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta} = -\sqrt{۱-\left(\frac{-۱}{۵}\right)^{۲}} = -\sqrt{\frac{۲۴}{۲۵}} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

تانژانت این زاویه با تقسیم سینوس آن بر کسینوس آن به دست می‌آید.

$$\tan\theta = ۲\sqrt{۶}$$

اگر برای زاویهٔ θ داشته باشیم $\sin\theta = \frac{-۲}{۳}$، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورد؟ چرا؟ چه اطلاعات دیگری را هم باید بدانیم؟

مهارت‌ها و فرایندها:
استدلال کردن، ارتباطات

اهداف: تشخیص اهمیت دانستن مکان نقطه متناظر زاویه که در کدام ربع واقع است و کافی نبودن دانستن یکی از نسبت‌های مثلثاتی برای یافتن بقیه نسبت‌های مثلثاتی

دیدیم که رابطه $\cos\theta$ بر حسب $\sin\theta$ به صورت $\cos\theta = \pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}$ است.
برای مشخص شدن علامت کسینوس باید بدانیم که زاویه θ در کدام ربع واقع شده است. علامت $\sin\theta$ به تنهایی نمی‌تواند علامت $\cos\theta$ را مشخص کند.

نشان دهید برای زاویهٔ دلخواه θ تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta \;,\; \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \;,\; \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

مهارت‌ها و فرایندها:
استدلال کردن.

اهداف: یافتن رابطه بین تانژانت زاویه‌های θ و $-\theta$ و $\pi+\theta$ و $\pi-\theta$.

کافیست از روابط به دست آمده برای سینوس و کسینوس استفاده کنیم.

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

$$\tan(\pi+\theta)=\frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آنها ۱- است.

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله، پرورش تفکر واگرا
اهداف: یافتن زاویه از طریق داشتن نسبت مثلثاتی آن زاویه و درک یکتا نبودن جواب و رابطه بین این جواب‌ها می‌دانیم $\tan\frac{\pi}{۴}=۱$، پس $\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right)=-۱$.

پس $-\frac{\pi}{۴}$ یکی از جواب‌های مسئله است. زاویه $\pi-\frac{\pi}{۴}$ نیز یک جواب دیگر است.

بخش چهارم: شیب خط و تانژانت زاویه‌ها

اهداف بخش

- درک رابطه بین شیب یک خط و تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها

پیش‌نیازهای بخش:
آشنایی با معادله خط، شناخت تانژانت زاویه‌های تند و باز
واژه‌های کلیدی: شیب خط، تانژانت زاویه

نگاه کلی به بخش

این بخش با مفهوم شهودی شیب جاده‌ها شروع می‌شود. با شبیه‌سازی جاده با یک خط، مفهوم شیب جاده با مفهوم شیب خط‌ها متناظر می‌شود. با حدس آنکه شیب خط و جاده باید مفاهیم یکسانی باشند محاسباتی انجام می‌شود تا درستی این حدس برای خط‌های با شیب مثبت بررسی شود. با این بررسی، رابطه بین تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها با شیب خط به دست می‌آید. در ادامه همین مسئله برای خط‌های با شیب منفی بررسی می‌شود تا در حالت کلی این رابطه برای هر خطی به دست آید.
در حالت خط‌های عمود بر محور طول‌ها، شیب خط تعریف نمی‌شود و زاویه بین خط و محور طول‌ها ۹۰ درجه است و تانژانت ۹۰ درجه نیز تعریف نمی‌شود. این نکته در کتاب نیامده است و در صورت درک کافی هنرجویان مناسب است این نکته را برای آنها مطرح سازید.

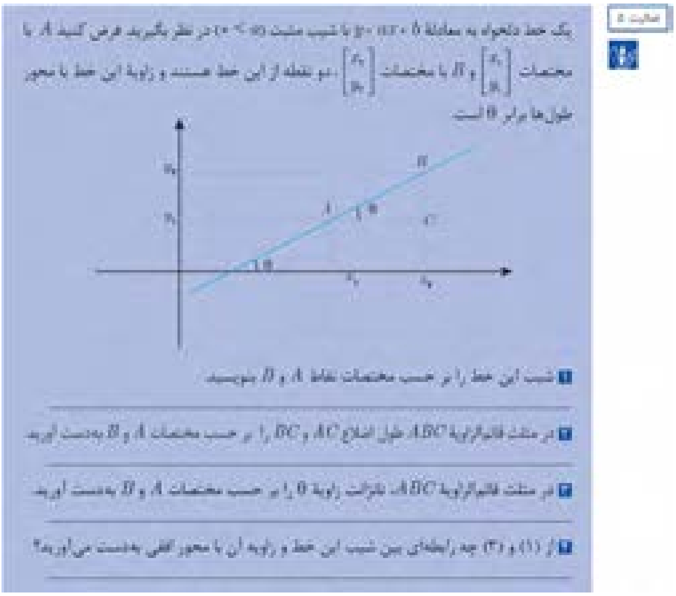
ورود به مطلب

برای آموزش این رابطه، مناسب است که موقعیتی را ترسیم کنیم که این رابطه به سادگی در آن دیده شود. در کتاب از مفهوم شیب جاده استفاده شده است که دیده می‌شود مفهوم شیب جاده، مستقیماً با تانژانت زاویه جاده با خط افق یکسان است. سپس با یک شبیه‌سازی جاده با خط، این ارتباط به خط‌ها نیز منتقل می‌شود.

فعالیت آموزشی

هدف این بخش، آشنایی با شیب خط‌ها، به عنوان تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها است. در کتاب از مفهوم شیب جاده‌ها شروع شده است که مستقیماً همان تانژانت زاویه جاده با سطح افق است. سپس با طرح این سؤال که آیا شیب خط‌ها

مانند شیب جاده است به فعالیت (۵) می‌رسیم تا به این سؤال برای خط‌های با شیب مثبت پاسخ داده شود.



فعالیت ۵

یک خط دلخواه به معادلهٔ $y = mx + b$ با شیب مثبت $m > 0$ در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویهٔ این خط با محور طول‌ها برابر θ است.

۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، تانژانت زاویهٔ θ را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویهٔ آن با محور افقی به‌دست می‌آورید؟

هدف موضوعی:

درک تساوی شیب خط (در خطوط با شیب مثبت) و تانژانت زاویهٔ تندی که با محور طول‌ها می‌سازد.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ مقایسه‌کردن،

۳ تعمیم‌دادن،

۴ ارتباطات.

حل فعالیت ۵

۱ از سال‌های گذشته، می‌دانیم که شیب یک خط که دو نقطه آن معلوم است

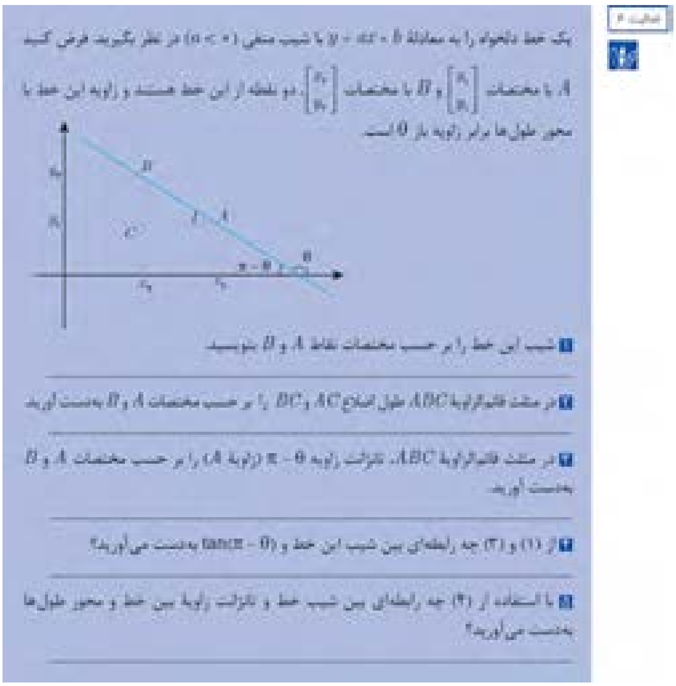
برابر $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است.

۲ طول ضلع AC برابر $x_۲-x_۱$ و طول ضلع BC برابر $y_۲-y_۱$ است.

۳ طبق تعریف تانژانت زاویه‌های تند داریم $\tan\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$.

۴ از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود: شیب خط (در حالت مثبت) همان تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها است.

پس از نتیجه‌گیری از این فعالیت، سؤال برای خط‌های با شیب منفی طرح می‌شود که آیا شیب این خط‌ها نیز تانژانت یک زاویه است. در این حالت تعریف کلی‌تری از زاویه بین خط و محور طول‌ها عرضه می‌شود که در هر دو حالت خط‌های با شیب‌های مثبت و منفی قابل کاربرد باشد. تعریف، از طریق دوران محور طول‌ها در جهت مثبت و انطباق بر خط انجام می‌شود. در حالت خط‌های با شیب منفی، این زاویه باز است و تانژانت آن منفی است و در فعالیت (۶) به این پرسش پاسخ می‌دهیم که آیا تانژانت این زاویه همان شیب خط می‌شود یا نه.


فعالیت ۶

یک خط دلخواه را به معادلهٔ $y = ax + b$ با شیب منفی $(a < 0)$ در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویه این خط با محور طول‌ها برابر زاویه باز θ است.

۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، تانژانت زاویه $\pi - \theta$ (زاویهٔ A) را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و $\tan(\pi - \theta)$ به‌دست می‌آورید؟

۵ با استفاده از (۴) چه رابطه‌ای بین شیب خط و تانژانت زاویهٔ بین خط و محور طول‌ها به‌دست می‌آورید؟

اهداف موضوعی:

درک تساوی شیب خط (در خطوط با شیب منفی) و تانژانت زاویهٔ تندی که با

محور طول‌ها می‌سازد.
مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ مقایسه‌کردن،

۳ تعمیم‌دادن،

۴ ارتباطات.

حل فعالیت ۶

۱ از سال‌های گذشته، می‌دانیم که شیب یک خط که دو نقطه آن معلوم است برابر $\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ است، یعنی $a = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$

۲ در این حالت، طول ضلع AC برابر $x_۱ - x_۲$ است ولی طول ضلع BC همان $y_۲ - y_۱$ است.

۳ طبق تعریف تانژانت زاویه‌های تند داریم $\tan(\pi - \theta) = \frac{BC}{AC} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۱ - x_۲}$.

۴ از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $\tan(\pi - \theta) = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۱ - x_۲} = -\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = -a$.

۵ از آنجا که $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ داریم $-\tan\theta = -a$ ، یعنی $\tan\theta = a$. پس، در این حالت نیز شیب خط، همان تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها است.
پس از این فعالیت نتیجه کلی به دست می‌آید که شیب همه خط‌ها همان تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها است. حالت خاص خط‌های عمود بر محور طول‌ها بحث نشده است. در این حالت برای خط، شیب تعریف نمی‌شود و تانژانت زاویه قائمه نیز تعریف نمی‌شود. حالت خط‌های موازی محور طول‌ها که زاویه صفر در نظر گرفته می‌شود به طور صریح بحث نشده است و در یک کار در کلاس، گذرا سخنی درباره آن گفته شده است. در این حالت شیب خط صفر است و تانژانت زاویه صفر نیز صفر است.

پس از ارائه چند مثال برای کار کردن با این رابطه، به کار در کلاس (۷) می‌رسیم که روی این مفاهیم تمرین شود و حالت خط‌های موازی محور طول‌ها هم دیده شود.


کار در کلاس ۷

۱ زاویهٔ بین خط به معادلهٔ $y=\sqrt{۳}x+\sqrt{۳}$ و محور طول‌ها چند رادیان است؟

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که در نقطه به طول ۱- ، محور طول‌ها را قطع می‌کند و با آن زاویهٔ ۱۵۰ درجه می‌سازد.

۳ شیب خط $y=-۴$ چقدر است؟ زاویهٔ بین خط $y=-۴$ و محور طول‌ها چقدر است؟

اهداف موضوعی:

۱ تقویت مهارت استفاده از معادله یک خط برای یافتن زاویهٔ آن با محور طول‌ها و بالعکس،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ بازنمایی،

۴ ارتباطات.

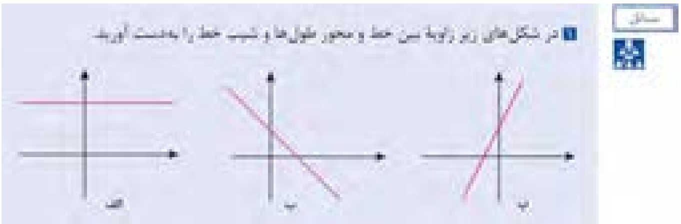
حل کار در کلاس ۷

اهداف: کار با رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها، و بررسی حالت شیب صفر

۱ شیب این خط $\sqrt{۳}$ است. و $\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$. پس، زاویه این خط با محور طول‌ها $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است.

۲ شیب این خط $\tan ۱۵۰$ است و $\tan ۱۵۰=\tan(۱۸۰-۳۰)=-\tan ۳۰=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$.
پس معادله خط $y=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x+۱)$ است.

۳ شیب خط $y=-۴$ صفر است. این خط با محور طول‌ها موازی است و زاویه آن با محور طول‌ها صفر است. تانژانت صفر نیز، صفر است.



مسائل

۱ در شکل‌های زیر زاویهٔ بین خط و محور طول‌ها و شیب خط را بدست آورید.

حل مسائل

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، پرورش تفکر بصری

اهداف: تمرین روی رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها به طور عملی و با اندازه‌گیری با خط‌کش و نقاله

در شکل (الف) خط موازی محور طول‌ها است و شیب آن صفر است و زاویه آن نیز صفر است. در شکل (ب) شیب منفی است و با توجه به آنکه فاصله محل تلاقی خط با محورها تا مبدأ یکسان است شیب ۱- است. زاویه این خط با محور طول‌ها ۱۳۵ درجه خواهد بود. در شکل (پ) شیب مثبت است و با اندازه‌گیری محل تقاطع خط با محورها شیب تقریباً ۲ خواهد بود و با اندازه‌گیری زاویه با نقاله مقدار زاویه تقریباً ۶۴ درجه خواهد بود.

مسائل

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویهٔ ۲۰ درجه بسازد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$ بگذرد.

(برای محاسبهٔ شیب خط می‌توانید از رسم به کمک نقاله یا ماشین‌حساب استفاده کنید.)

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، ارتباطات، مهارت کار با ابزار.

اهداف: تمرین روی رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها و استفاده از رسم یا ماشین حساب در محاسبه شیب خط و تانژانت یک زاویه کافی است شیب این خط که همان تانژانت ۲۰ درجه است، محاسبه کنیم. به کمک ماشین حساب داریم $\tan ۲۰^\circ \approx ۰/۳۶$. پس معادله این خط به صورت $y=۰/۳۶\, x + b$ است. با توجه به قرار داشتن نقطهٔ $\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$ روی خط داریم: $-۲=۰/۳۶\,(-۱) + b$ در نتیجه $b=-۱/۶۴$

که معادله خط به‌صورت $y=۰/۳۶\,x-۱/۶۴$ است.


مسائل

خطی که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۱\\۵\end{bmatrix}$ می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟
(از رسم خط و نقاله استفاده کنید.)

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، مهارت کار با ابزار.

اهداف: تمرین روی رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها و استفاده از ماشین حساب در محاسبه زاویه وقتی تانژانت زاویه را می‌دانیم با آزمون و خطا یا رسم شکل و استفاده از نقاله شیب این خط را حساب می‌کنیم.

$\frac{۳}{۲}=\frac{۵-۲}{۱-(-۱)}=m$ به کمک ماشین حساب یا با رسم و نقاله زاویه‌ای که تانژانت آن $\frac{۳}{۲}$ است را به دست می‌آوریم. این زاویه تقریباً ۵۶ درجه است


مسائل

خط به معادلهٔ $۳y+۲x=۴$ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع می‌کند و چه زاویه‌ای با آن می‌سازد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله

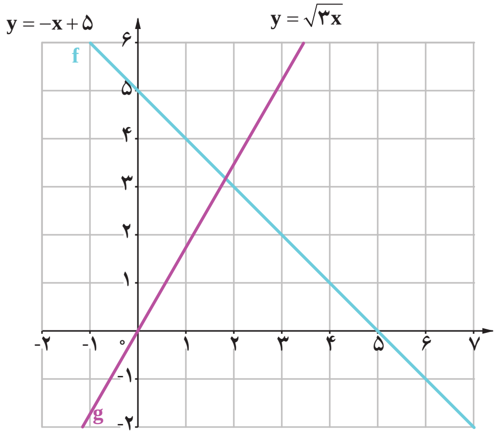
اهداف: تمرین روی رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها و استفاده از ماشین حساب در محاسبه زاویه وقتی تانژانت زاویه را می‌دانیم با آزمون و خطا یا رسم شکل و استفاده از نقاله شیب این خط $-\frac{۲}{۳}$ است و در نقطه به طول ۲ محور طول‌ها را قطع می‌کند. با رسم این خط زاویه آن را با نقاله حساب می‌کنیم که تقریباً ۱۴۷ درجه است. tan۱۴۷ تقریباً برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.


مسائل

از برخورد دو خط با معادله‌های $y=\sqrt{۳}x$ و $y=-x+۵$ و محور طول‌ها یک مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را بر حسب رادیان به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه.

اهداف: ترسیم موقعیت و استدلال و استفاده رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها
بهتر است این خط‌ها را رسم کنیم و مثلث تشکیل شده را تشخیص دهیم.



یکی از زاویه‌های این مثلث همان زاویه خط $y=\sqrt{۳}x$ با محور طول‌ها است. شیب این خط $\sqrt{۳}$ است و $\tan ۶۰ = \sqrt{۳}$. پس این زاویه ۶۰ درجه است. زاویه دیگر، مکمل زاویه خط $y=-x+۵$ با محور طول‌ها است. شیب این خط ۱- است و $\tan ۱۳۵ = -۱$. پس زاویه دیگر این مثلث ۴۵ درجه است. بنابراین زاویه سوم نیز ۷۵ درجه است.


سؤال
خط‌های به معادلهٔ $۳x - ۵y = c$ با هم (موازی‌اند/ متقاطع‌اند). زاویهٔ این خط‌ها با محور طول‌ها برحسب درجه و رادیان به‌طور تقریبی چقدر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله

اهداف: تشخیص دسته خط‌های موازی از طریق استدلال روی شیب‌های یکسان آنها
تمام این خط‌ها موازی‌اند زیرا شیب تمام آنها $\frac{۳}{۵}$ است. با رسم یکی از این خط‌ها و اندازه‌گیری زاویه آنها با محور طول‌ها یا با استفاده از ماشین حساب، این زاویه تقریباً ۳۱ درجه است که بر حسب رادیان تقریباً ۰/۵۴ رادیان است.