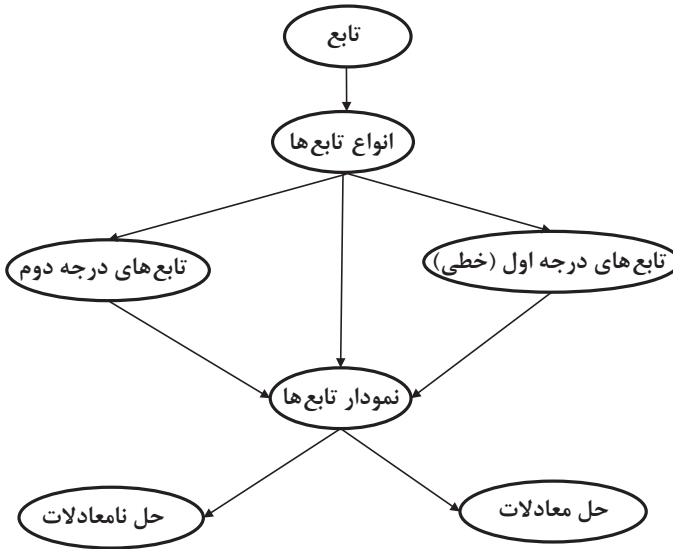


پودمان دوم

تابع‌های خطی و درجهٔ دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

طرح کلی مفاهیم پودمان دوم (نقشه مفهومی)



اهداف کلی

- آشنایی با تابع‌های درجه اول و دوم
- آشنایی با نمودار تابع‌های درجه اول و دوم
- آشنایی با رسم نمودار تابع‌های درجه اول و دوم (با استفاده از جنوجبرا) و تشخیص شکل کلی نمودار این تابع‌ها
- حل معادلات و نامعادلات درجه اول و دوم به کمک نمودار تابع‌های درجه اول و دوم
- آشنایی کلی با حل انواع معادلات و نامعادلات از طریق رسم نمودار تابع‌های متناظر با آنها

پیش نیازهای پودمان

- مفهوم تابع
- قانون تابع
- دامنه تابع
- مقدار تابع در یک نقطه
- نمودار تابع

مثال	توضیح فرایند	فرایند	استانداردهای فرایندی
توصیف یک موقعیت مسئله‌ای که از طریق نمادین سازی، به یک مسئله در ریاضی تبدیل می‌شود که قبل از هر فعالیت انجام شده است.	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	حل مسئله	
برقراری ارتباط بین معادله $f(x)=0$ و نمودار تابع $y=f(x)$ برای یافتن جواب‌های معادله	شناخت و به کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل مسائل و یا انتخاب مناسب آنها		
صحبت و گفت‌وگوی صدرا در موقعیت مسئله کوهنوردی که او و هم‌کلاسی‌هایش در مورد رابطه دما و ارتفاع بحث می‌کنند و سعی می‌کنند رابطه بین آنها را تشخیص دهند.	سازماندهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ارتباطات و گفت‌وگو	
در موقعیت مسئله‌ای کوهنوردی، پس از تشخیص ارتباط دما و ارتفاع این رابطه به کمک مفهوم تابع بیان می‌شود.	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی		
بیان علت خطی بودن یا نبودن تابع	به کارگیری استدلال	استدلال اثبات	
تشخیص مفهوم تابع خطی در رابطه بین دما و ارتفاع در مسئله کوهنوردی	تشخیص و به کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	پیوندها و اتصالات	
تشخیص رابطه بین جواب‌های معادله $f(x)=0$ و محل تلاقی نمودار تابع $y=f(x)$ با محور طول‌ها	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی		
تابع خطی را به صورت جبری (قانون)، هندسی (نمودار) و جدول مقادیر (عددی) نمایش دهد.	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	بازنمایی و مدل‌سازی	
توانایی تعمیم رسم نمودار تابع خطی برای مقادیر مختلف ضریب x یعنی a و همچنین توانایی تعمیم و پیش‌بینی نمودار تابع درجه دوم	مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی، دسته بندی کردن	سایر مهارت‌های تفکر	

بخش اول: تابع‌های خطی

اهداف بخش

- تشخیص تابع‌های خطی و ویژگی‌های اساسی آنها
- رسم نمودار تابع‌های خطی با شیب مثبت، منفی و صفر
- مفهوم تابع ثابت

پیش‌نیازها

- مفهوم تابع، دامنه
- تعیین مقدار تابع به ازای یک مقدار از دامنه
- درک محورهای مختصات و تعیین نکات نقطه

واژه‌های کلیدی: تابع خطی، شیب خط

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش معرفی تابع‌های چندجمله‌ای از درجه ۱ یا همان تابع‌های خطی است. در ابتدا به معرفی انواع پدیده‌های طبیعی و رویدادهای اجتماعی که روابط بین متغیرهای آنها، قابل توصیف و تبیین به وسیله یک تابع خطی است، پرداخته می‌شود. پس از اینکه این پدیده‌ها با یک تابع خطی معرفی شدند، انواع تابع‌های خطی که شیب نمودار آنها مثبت یا منفی است معرفی می‌شوند. در نهایت یک تابع خطی خاص معرفی می‌شود که شیب نمودار آن صفر است که همان تابع ثابت است.

ورود به مطلب

برای شروع تدریس، می‌توان انواعی از روابط و پدیده‌ها مانند رشد گیاهان، حرکت یک متحرک مانند اتومبیل یا یک قطار با سرعت یکنواخت را مطرح کرد و با تأکید روی رشد با سرعت ثابت، تمرکز بحث را به سمت ایجاد سؤال برای نحوه توصیف این‌گونه پدیده‌ها به زبان ریاضی برد.

فعالیت آموزشی

کتاب با بحث بین محمد و مادرش درباره رشد یک گیاه خاص شروع می‌شود که محمد قصد دارد میزان رشد گیاه را بر حسب زمان به دست آورد که هدف فعالیت (۱) است. در این فعالیت اهداف زیر دنبال می‌شوند.

نوعی بامبو پس از آنکه به ارتفاع 20 سانتی‌متر می‌رسد، به‌طور تقریبی در هر ساعت 3.8 سانتی‌متر رشد می‌کند. از ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر از ارتفاع بامبو را (بر حسب سانتی‌متر) پس از t ساعت با $f(t)$ نشان دهیم داریم: $f(t) = 20 + 3.8t$.

اگر رشد بامبو را در یک شبانه‌روز در نظر بگیریم، دامنه این تابع $[0, 24]$ خواهد بود. جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

t (بر حسب ساعت)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (بر حسب سانتی‌متر)					

نمودار زیر، نمودار تابع $f(t) = 20 + 3.8t$ را نشان می‌دهد.

به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t ، مقدار f چه تغییری می‌کند؟

رابطه بین دو کمیت f و t ، خطی است یا غیر خطی؟ چرا؟

$f(2)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ $f(18)$ چطور؟

اگر $f(t) = 39$ ، t را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

اهداف موضوعی

- ۱ درک مفهوم تابع خطی
- ۲ تقویت مهارت یافتن مقدار تابع به‌ازای مقدار متغیر تابع و بالعکس. مهارت‌ها و فرایندها:
- ۱ حل مسئله،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ الگویابی،

۴ استدلال،

۵ بازنمایی‌ها،

۶ ارتباطات.

در این فعالیت، هنرجویان پدیده‌هایی که به صورت یکنواخت تغییر می‌کنند را تشخیص می‌دهند و در این مثال خاص، تابعی که رشد یکنواخت گیاه را با سرعت ثابت $\frac{3}{8}$ سانتی‌متر توصیف می‌کند، به دست می‌آورند. در بندهای مختلف این فعالیت، هنرجو با سرعت رشد ($\frac{3}{8}$ سانتی‌متر) که همان شیب نمودار تابع خطی است آشنا می‌شوند. همچنین مقادیر تابع را به ازای مقادیر مختلف دامنه به دست می‌آورند.

حل فعالیت

t (بر حسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (بر حسب سانتی‌متر)	۲۰	$23\frac{3}{8}$	$27\frac{3}{4}$	$31\frac{3}{4}$	$35\frac{3}{4}$
	$+3\frac{3}{8}$	$+3\frac{3}{8}$	$+3\frac{3}{8}$	$+3\frac{3}{8}$	$+3\frac{3}{8}$

۲ به اندازه $\frac{3}{8}$

۳ خطی است. زیرا به ازاء هر یک واحد افزایش مقدار t ، مقدار h به اندازه ثابت $\frac{3}{8}$ تغییر می‌کند.

۴ ارتفاع بامبو در ساعت دوم را نشان می‌دهد. ارتفاع بامبو در ساعت ۱۸ ام را نشان می‌دهد.

۵ $h(a) = 39$ یعنی ارتفاع بامبو در ساعت a ، ۳۹ متر است.

رضا علاقه زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل، ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهید، قانون تابع f و دامنه آن را بنویسید.

مقادیر $f(10)$ ، $f(0)$ را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(0)$ معنایی دارد؟

اگر دامنه تابع را بزرگ 12 ، 0 را به نظر بگیرید، نمودار تابع را رسم کنید.



اگر $f(17) = 17$ مقدار 0 را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

حل کار در کلاس ۱

اهداف: تقویت مهارت استفاده از توابع خطی در توصیف وضعیت‌های واقعی، حل مسئله (مدلسازی)، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات ارزیابی، بازنمایی‌ها.

۱ طرح تا سال قبل - در آخر ماه اول ۷ طرح - در آخر ماه پنجم $15 = 5 + 2 \times 5$

۲ چون عمل طراحی فقط ۱۲ ماه ادامه دارد، دامنه این تابع مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 12\}$ است.

۳ $f(0)$ یعنی رضا قبل از این تصمیم، ۵ طرح داشته است.

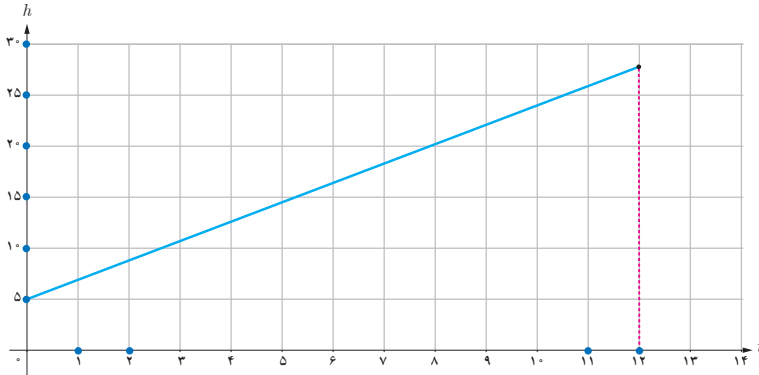
$$f(0) = 2 \times 0 + 5 = 5$$

$f(10)$ یعنی رضا بعد از ۱۰ ماه، ۲۵ طرح دارد.

$$f(10) = 2 \times 10 + 5 = 25$$

$f(-1)$ معنا ندارد زیرا این تابع فقط از ماه اول به بعد را توصیف می‌کند و در مورد قبل از آن اطلاعاتی را نمی‌دهد.

۴ دامنه واقعی تابع مجموعه گسسته $\{0, 1, 2, \dots, 12\}$ است ولی در اینجا دامنه را به صورت بازه $[0, 12]$ در نظر گرفته‌ایم.



۵ معنی $f(a) = 17$ یعنی اینکه رضا پس از a ماه، ۱۷ طرح داشته است که پاسخ ۶ ماه است.

پس از معرفی توابع خطی که شیب نمودار در آنها مثبت و یا منفی است، می‌خواهیم توابع خطی با شیب صفر و در واقع توابع ثابت را معرفی کنیم.

فعالیت ۱۷

خودرویی از نقطه A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۳۰ ثانیه است.

مقدار مسافت طی شده به وسیله خودرو از نقطه A ، پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟

جدول زیر را کامل کنید.

ت (زمان توقف بر حسب ثانیه)	۰	۲	۵	۱۰	۳۰
h (مسافت طی شده بر حسب کیلومتر)	-	-	-	-	-

نمودار تابع را از زمان $t=0$ تا زمان $t=20$ رسم کنید.

با تغییر زمان (t)، مسافت طی شده (h) چه تغییری می‌کند؟

هدف فعالیت:

معرفی تابع ثابت و تشخیص عدم تغییر مقدار تابع با تغییر مقدار متغیر

هدف موضوعی:

درک مفهوم تابع ثابت
مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ الگویابی،

۴ بازنمایی‌ها،

۵ ارتباطات.

حل فعالیت ۲

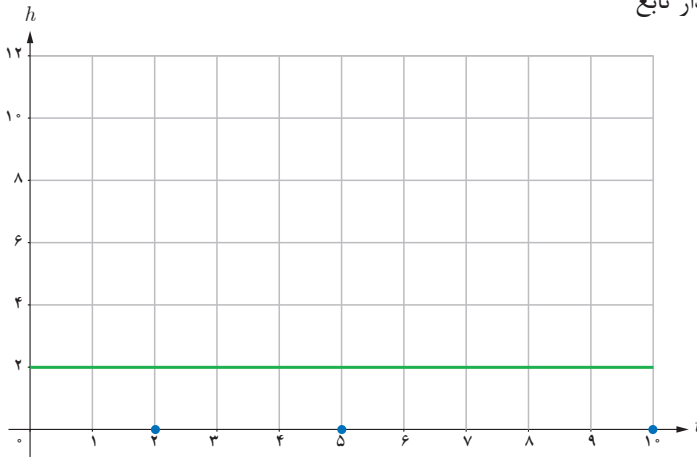
هدف از این فعالیت معرفی تابع ثابت است. خودرویی پس از طی ۲ کیلومتر مسافت از نقطه شروع حرکتش، پشت چراغ قرمز متوقف می‌شود و تا ۲۰ ثانیه بعد که چراغ قرمز هست، هیچ حرکتی ندارد و در نتیجه مسافت طی شده‌اش تغییر نمی‌کند.

۱ پس از ۲ ثانیه، ۲ کیلومتر. پس از ۵ ثانیه ۲ کیلومتر.

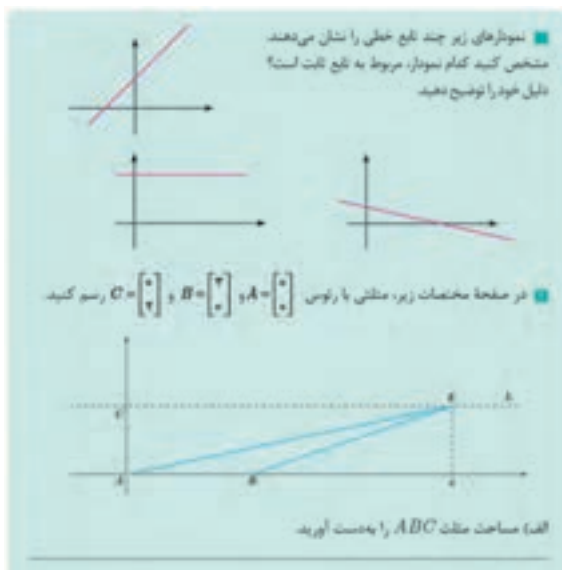
۲

t	۰	۲	۵	۱۰
d	۲	۲	۲	۲

۲ نمودار تابع



۴ با گذشت زمان، مسافت تغییر نمی‌کند.



حل کار در کلاس ۲

اهداف: تقویت مهارت تشخیص توابع خطی، تفکر بصری، پیوندها و اتصالات، استدلال، ارتباطات، بازنمایی‌ها.

۱ نمودار دوم نمودار تابع ثابت است. زیرا نمودار آن خطی به موازات محور x است و این نشان می‌دهد با تغییر مقدار x ، مقدار تابع تغییر نمی‌کند. مثلث‌های ABC و ABC' و هر مثلث دیگر که یک ضلع آن AB است و رأس سوم آن (C) روی خط L قرار داشته باشد دارای مساحت‌های مساوی ۳ هستند. مساحت‌های این مثلث‌ها تابعی از طول نقطه C روی خط L هستند که البته مقدار آنها، مقدار ثابت ۳ است.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \quad \text{(الف)}$$

(ب)

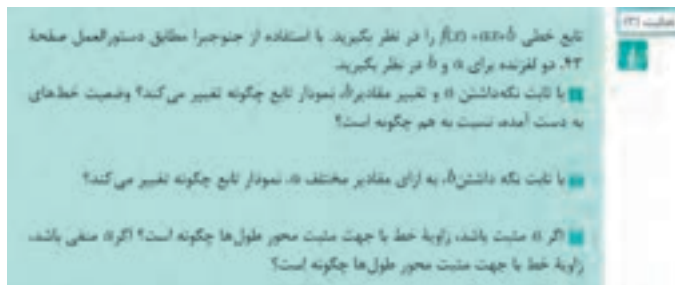
x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
S	۳	۳	۳	۳	۳	۳

اختلاف مقادیر تابع در همه نقاط صفر است.

پ) به ازاء هر یک مقدار برای x ، فقط یک مقدار برای مساحت S ، به دست می آید بنابراین S تابعی از x است و $S(x)=3$.

ت) مقدار $S(x)$ هیچ تغییری نمی کند. شیب نمودار تابع (شیب خط) صفر است.

ث) نمودار تابع خطی موازی محور طول ها است.



هدف فعالیت ۳

درک نقش پارامترهای a و b در تعیین وضعیت (شیب، عرض از مبدأ و ...) نمودار

$$y = ax + b$$

مهارت ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ تقویت مهارت استفاده از نرم افزار،

۳ بازنمایی،

۴ ارزیابی،

۵ تعمیم دادن،

۶ تفکر بصری،

۷ ارتباطات.

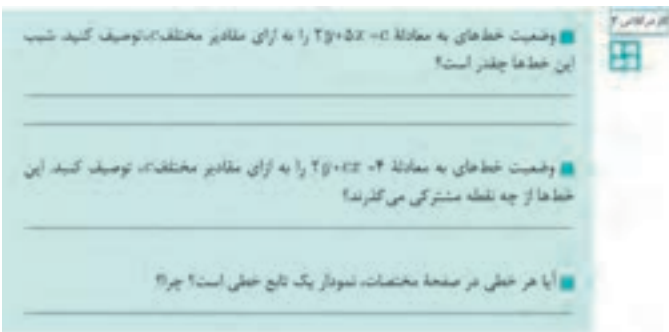
حل فعالیت ۳

در این فعالیت با استفاده از جئوجبرا نمودار تابع‌های خطی $y=ax+b$ را رسم می‌کنیم.

۱ محل تلاقی نمودار این توابع با محور y ها نقطه b است که با تغییر b ، محل تلاقی روی محور y ها بالا و پایین می‌رود. همه این خطوط موازی‌اند، چون a تغییر نمی‌کند.

۲ همه این توابع از نقطه‌ای به عرض b و طول صفر عبور می‌کنند و همدیگر را در این نقطه قطع می‌کنند و فقط شیب خطوط متفاوت است.

۳ زمانی که علامت a مثبت است نمودار (خط) با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه بین 0° تا 90° درجه می‌سازد و زمانی که علامت a منفی است نمودار (خط) با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه بین 90° تا 180° درجه می‌سازد.



حل کار در کلاس ۳

اهداف: درک نقش پارامترهای a و c در تعیین وضعیت (شیب، عرض از مبدأ و ...) نمودار خط $ax+by=c$ ، استدلال، ارتباطات، بازنمایی‌ها، تقویت مهارت استفاده از نرم‌افزار.

۱ تمام این خطوط با هم موازی هستند و برای مقادیر مختلف c عرض از مبدأ آنها مختلف خواهد بود. شیب آنها $-5/2$ است.

۲ این خطوط متقاطع هستند و شیب آنها با تغییر مقدار c تغییر می‌کند. این خطوط یکدیگر را در نقطه $(0, 2)$ قطع می‌کنند.

۳ خیر، خطوطی که به موازات محور عرض‌ها (y ها) است نمودار تابع نیستند. زیرا برای هر x ، فقط یک y نداریم.

مسئله

در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهار تابع داده شده است. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

x	-۲	-۱	۰	۱
$g(x)$	۵	-۱۰	-۲۵	-۴۰

x	-۲	-۱	۰	۱
$f(x)$	-۸	-۱	۰	۱

x	۰	۱	۲	۳
$h(x)$	۱	۳	۵	۷

x	-۲	-۱	۰	۱
$h(x)$	۵	۵	۵	۵

حل مسائل

۱- اهداف: تشخیص تابع خطی از طریق چگونگی تغییر مقادیر تابع مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال، حل مسئله.

تابع g خطی است زیرا به ازای یک واحد افزایش مقدار x ، مقدار $g(x)$ به اندازه ثابت ۱۵ واحد کاهش می‌یابد. یعنی شیب نمودار این تابع ثابت بوده و مقدار آن -۱۵ است.

x	-۲	-۱	۰	۱
$g(x)$	۵	-۱۰	-۲۵	-۴۰

تابع f خطی نیست زیرا با تغییر یک واحد متغیر x ، مقدار تابع به اندازه ثابت، تغییر نمی‌کند.

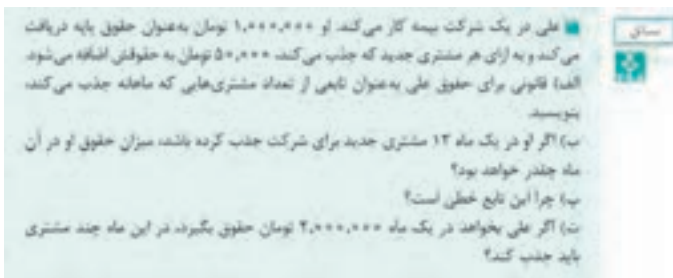
x	-۲	-۱	۰	۱
$f(x)$	-۸	-۱	۰	۱

تابع k خطی است زیرا با یک واحد افزایش متغیر x ، مقدار تابع به اندازه ثابت ۲ واحد افزایش می‌یابد.

x	۰	۱	۲	۳
$k(x)$	۱	۳	۵	۷

تابع h خطی است. زیرا با یک واحد تغییر مقدار x ، مقدار تابع به اندازه ثابت صفر تغییر می‌کند.

x	-۲	-۱	۰	۱
$h(x)$	۵	۵	۵	۵



۲- اهداف: تشخیص تابع خطی و یافتن قانون و دامنه آن مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، حل مسئله، ارتباطات، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی.

الف) $f(x) = 50000x + 1000000$

ب) $f(12) = 50000 \times 12 + 1000000 = 1600000$

پ) این تابع خطی است زیرا به ازاء اضافه شدن هر یک مشتری، مقدار ثابت ۵۰۰۰۰ تومان حقوق افزایش می‌یابد.

ت) اگر بخواهد دو میلیون تومان حقوق بگیرد باید داشته باشیم $f(x) = 2000000$
 در این صورت داریم $2000000 = x + 1000000$ ، بنابراین $x = 2000000$.

سوال

ارمان سوار بر یک کشتی، در فاصله 10 کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت 3 کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت 5 ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنه تابع مربوط به فاصله ارمان از ساحل (بر حسب کیلومتر) را بر حسب t (زمان بر حسب ساعت) بنویسید.

ب) ارمان پس از 3 ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

پ) چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

۳- اهداف: تمرین در تشخیص تابع خطی و یافتن قانون و دامنه آن

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات.

الف) $d(t) = 10 + 3t$ ، دامنه $=[0, 5]$

ب) $d(2) = 10 + 3(2) = 16$

پ) خطی است زیرا در هر ساعت، به اندازه مقدار ثابت 3 کیلومتر فاصله‌اش از ساحل بیشتر می‌شود. شیب مثبت است.

دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت 1 ظهر، 25 درجه سانتی‌گراد بوده است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

t (روز)	1	2	3	4	5	6	7
f (دما بر حسب درجه سانتی‌گراد)							

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟

ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.

۴- اهداف: تشخیص تابع ثابت

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات.

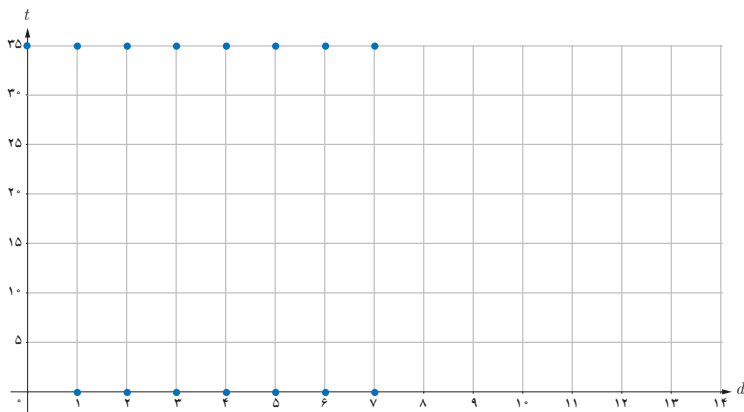
(الف)

(روز) d	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما برحسب درجه سانتی‌گراد)	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵

(ب) دامنه این تابع روزهای هفته یعنی $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ است و قانون آن به صورت $t(d) = 35$ است.

(پ) این تابع، تابع ثابت است زیرا مقادیر تابع تغییر نمی‌کند و ثابت است.

(ت) نمودار این تابع به خاطر گسسته بودن دامنه به صورت چند نقطه هستند که روی خطی موازی محور طول‌ها قرار دارند.



رابطه بین دو واحد اندازه‌گیری دما، درجه سانتی‌گراد (C) و درجه فارنهایت (F) با کلمون
 $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$ بیان می‌شود.

الف) مقدارهای $F(28)$ و $F(-40)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

ب) دمای صفر درجه سانتی‌گراد معادل چند درجه فارنهایت است؟

پ) اگر $F(C) = 212$ ، مقدار C را حساب کنید. C چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۵- اهداف: کار با تابع خطی در یک زمینه فیزیکی

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات.

الف) دمای ۲۸ درجه سانتی‌گراد با $82/4$ درجه فارنهایت برابر است.

$$f(28) = \frac{9}{5}(28) + 32 = 82/4$$

$$f(-40) = \frac{9}{5}(-40) + 32 = -40$$

ب) اگر $C = 0$ داریم:

$$f(0) = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$$

پ) از $f(C) = \frac{9}{5}C + 32 = 212$ نتیجه می‌شود $\frac{9}{5}C = 180$ ، پس $C = 100$

یعنی دمای ۲۱۲ درجه فارنهایت برابر ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد است.

بخش دوم: تابع‌های درجه دوم

اهداف بخش

- معرفی تابع‌های درجه دوم با قانون $y = ax^2 + bx + c$
- استفاده از جئوجبرا برای رسم نمودار تابع درجه دوم
- رسم نمودار تابع با استفاده از انتقال به چپ و راست و بالا و پایین نمودار $y = kx^2$

پیش‌نیازها

- مفهوم تابع
- نمودار $y = x^2$
- مربع کامل کردن

واژه‌های کلیدی: تابع، تابع درجه دوم، تابع $y = x^2$

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش معرفی تابع درجه دوم است. در ابتدای بخش، داستانی آورده شده است که دانش‌آموز را با موقعیت‌هایی که ممکن است با نمودار توابع درجه دوم برخورد کند، معرفی می‌کند. سپس به کمک جئوجبرا انواع حالات ممکن برای نمودار تابع‌های درجه دوم بررسی می‌شود.

ورود به مطلب

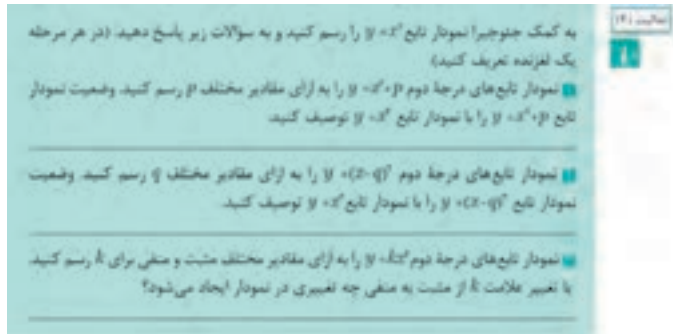
مناسب است که در زمینه‌هایی واقعی که تابع‌های درجه دوم و نمودار آنها دیده می‌شوند بحث آغاز شود. مثلاً حرکت پرتابه‌ها مثال خوبی است. فواره‌ها به طور طبیعی نمودار یک تابع درجه دوم را رسم می‌کنند. پرتاب یک توپ بسکتبال نیز مثال خوبی است. با توجه به این مثال‌ها می‌توان وارد نمودار تابع‌های درجه دوم شد.

فعالیت آموزشی

با معرفی تابع‌های درجه دوم به فعالیت (۴) می‌رسیم که به کمک جئوجبرا شکل‌های مختلف نمودارهای تابع‌های درجه دوم در آن بررسی می‌شود.

اهداف فعالیت (۴):

رسم نمودار تابع‌های $y = x^2 + p$ و $y = (x - q)^2$ و $y = kx^2$ به کمک جئوجبرا و بررسی وضعیت آنها نسبت به نمودار تابع $y = x^2$.



اهداف موضوعی:

۱ درک وضعیت نمودار تابع‌های درجه دوم $y = x^2 + p$ و $y = (x - q)^2$ و $y = kx^2$ به کمک تابع $y = x^2$

۲ تقویت مهارت رسم نمودار تابع‌های درجه دوم $y = x^2 + p$ و $y = (x - q)^2$ و $y = kx^2$ با استفاده از نمودار $y = x^2$
مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله

۲ تقویت مهارت استفاده از نرم‌افزار

۳ تعمیم دادن

۴ تفکر بصری

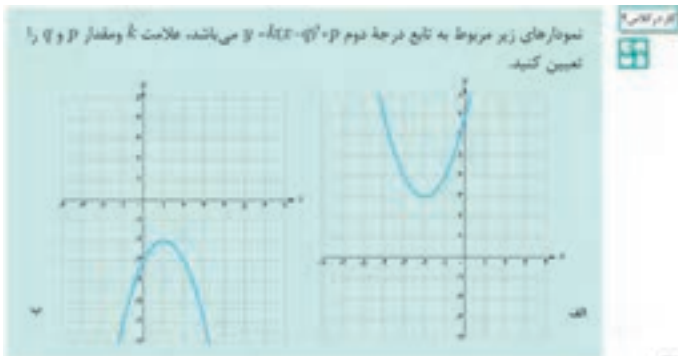
۵ بازنمایی‌ها

حل فعالیت ۴

۱ با انجام عملیات مربوطه در جئوجبرا مشخص می‌شود که با تغییر p نمودار تابع $y = x^2 + p$ همان نمودار تابع $y = x^2$ که به اندازه p به بالا یا پایین جابه‌جا شده است.

۲ با انجام عملیات مربوطه در جئوجبرا مشخص می‌شود که با تغییر q نمودار تابع $y = (x - q)^2$ همان نمودار تابع $y = x^2$ که به اندازه q به چپ یا راست منتقل شده است.

۳ برای $k < 0$ نمودار مشابه نمودار $y = x^2$ است که شاخه‌های آن به خط عمود (در اینجا محور y ‌ها) نزدیک‌تر یا از آن دورتر شده است. برای $k > 0$ نمودار مشابه نمودار $y = -x^2$ است که شاخه‌های آن به خط قائم نزدیک‌تر یا دورتر شده است.



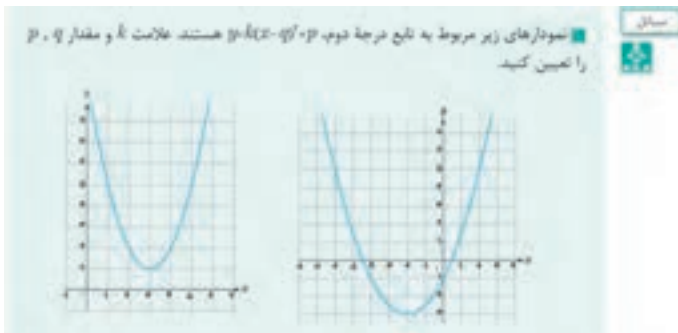
اهداف: تقویت مهارت یافتن معادله تابع‌های درجه دوم از روی نمودار آنها به کمک قوانین انتقال تابع، بازنمایی‌ها، تفکر بصری.

حل کار در کلاس ۴

اهداف:

الف) $k > 0$ زیرا نمودار رو به بالا است. از آنجا که نمودار ۲ واحد به چپ منتقل شده است پس $q = -2$ و ۳ واحد به بالا منتقل شده است پس $p = 3$.

ب) k منفی است زیرا نمودار رو به پایین است. از آنجا که نمودار ۱ واحد به راست منتقل شده است پس $q = 1$ و ۲ واحد به پایین منتقل شده است پس $p = -2$.



حل مسائل

۱- **اهداف:** تشخیص قانون تابع‌ها از روی نمودار تابع‌های درجه دوم و تعیین

ضرایب و علامت‌های آن
مهارت‌ها و فرایندها:
 حل مسئله به روش هندسی.

در شکل سمت راست k مثبت است، زیرا نمودار $y=kx^2$ رو به بالاست. نمودار ۲ واحد به چپ منتقل شده، پس $q=-2$ و ۳ واحد به پایین منتقل شده، پس $p=-3$ است.

در شکل سمت چپ نمودار $y=kx^2$ رو به بالاست پس k مثبت است، ۳ واحد به راست منتقل شده پس $q=3$ و ۱ واحد به بالا منتقل شده است. پس: $p=1$

سوال

نمودار زیر مربوط به یک تابع درجه دوم است. مشخص کنید که کدام قانون مربوط به این نمودار است.

الف) $f(x) = (x-1)^2 + 1$
 ب) $f(x) = (x-1)^2 - 1$
 ج) $f(x) = (x+1)^2 - 2$
 د) $f(x) = (x+1)^2 - 3$

۲- اهداف: تشخیص قانون تابع درجه دوم از روی نمودار آن نمودار این تابع ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل شده است پس $q=-1$ و $p=-2$. از طرفی نمودار روبه بالاست پس $k > 0$ است. پس گزینه ت جواب است.

سوال

فرید بسکتبال بازی می‌کند. تصویر زیر یک پرتاب او را به سمت سبد نشان می‌دهد. صفحه مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً روی نقطه پرتاب توپ قرار گیرد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجه دوم با قانون $f(x) = k(x-q)^2 + p$ است. علامت k و q و p را تعیین کنید.

۳- اهداف: تمرین روی شکل نمودار تابع‌های درجه دوم در یک زمینه واقعی k منفی است زیرا نمودار روبه پایین است و نمودار $y=-x^2$ به چپ و بالا منتقل شده است پس $q < 0$ ، $p > 0$.

بخش سوم: کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها

اهداف بخش

- حل معادله $ax+b=0$ با استفاده از رسم نمودار تابع $f(x)=ax+b$
- حل معادله $ax+bx+c=0$ با استفاده از رسم نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$
- برقراری ارتباط بین محل برخورد نمودار تابع $f(x)$ با محور x ها و جواب‌های معادله $f(x)=0$

پیش نیازها

- رسم نمودار تابع خطی $y=ax+b$
- تشخیص نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ از طریق علامت ضرایب a, b, c و برعکس

واژه‌های کلیدی: تابع خطی، تابع درجه دوم، معادله، تلاقی نمودارها

نگاه کلی به بخش

در ابتدای بخش، زمینه و بافتی معرفی شده است که در آن رابطه بین ارتفاع (h) و دمای هوا t به صورت قانون یک تابع توصیف شده است. هدف یافتن ارتفاعی است که در آن ارتفاع، دما صفر درجه سانتی‌گراد است که این، به معنی آن است که محل تلاقی نمودار تابع دما را با محور طول‌ها به دست آوریم و از طرف دیگر این به معنی حل یک معادله دما بر حسب ارتفاع است.

ورود به مطلب

معادلات و تابع‌ها بسیار به هم نزدیک‌اند. مناسب است یک معادله مثال بزنید و تابع متناظر آن را بنویسید. بر عکس یک تابع و معادله تناظر آن را بنویسید. چنین تناظری نشان از آن دارد که مفاهیم مربوط به تابع و معادله‌ها در ارتباط با یکدیگر خواهند بود. پرسش اصلی آن است که ارتباط بین معادلات و تابع‌ها چگونه است و این ارتباط چه مسائلی را حل خواهد کرد.

فعالیت آموزشی

پس از یک بحث داستانی و طرح یک مسئله، به فعالیت (۵) می‌رسیم که هدف از آن حل معادله درجه اول از طریق نمودار یک تابع خطی است.
هدف فعالیت (۵): حل معادله درجه اول با استفاده از نمودار تابع خطی

اهداف موضوعی:

- ۱ درک طول نقطه برخورد نمودار تابع درجه اول با محور x ها به عنوان ریشه تابع،
 - ۲ کسب مهارت حل معادله درجه اول با استفاده از نمودار تابع متناظر آن.
- مهارت‌ها و فرایندها:

- ۱ حل مسئله،
- ۲ مقایسه کردن،
- ۳ بازنمایی‌ها،
- ۴ ارتباطات،
- ۵ تفکر بصری،
- ۶ پیوندها و اتصال‌ها.

فعالیت

اگر دما در سطح دریا ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشد، در کوه دماوند رابطه بین دما (T) بر حسب درجه سانتی‌گراد و ارتفاع از سطح دریا h بر حسب متر با تساوی $T(h) = 15 - \frac{h}{150}$ مشخص می‌شود. در اینجا T تابعی از h است و دانسته این تابع برای $h = 1800$ است.

(۱) ارتفاع کوه دماوند بر حسب متر است.

(۲) $T(0)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

(۳) در ارتفاع $h = 1800$ متری از سطح دریا دما چند درجه است؟

(۴) در زیر نمودار تابع T رسو شده است با توجه به نمودار به سوال‌های زیر پاسخ دهید. (ارتفاع h را روی محور افقی و هر واحد را 1000 متر در نظر می‌گیریم) و دمای T را روی محور عمودی نمایش داده شده است.

الف) تابع T از درجه ... است.

ب) نمودار این تابع درجه نقطه‌ای محور افقی (ارتفاع) را قطع می‌کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

حل فعالیت ۵

- ۱ $T(0)$ یعنی مقدار دما در ارتفاع صفر که همان سطح دریاست.

$$T(1800) = 15 - \frac{1800}{150} = 3$$

- ۲ درجه سانتی‌گراد

- ۳ الف) تابع T از درجه یک است.

ب) محل تقاطع نمودار این تابع با محور طول‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T = 0 \Rightarrow T(h) = 15 - \frac{h}{150} = 0 \Rightarrow \frac{h}{150} = 15 \Rightarrow h = 2250$$

این نقطه نشان می‌دهد که دما در ارتفاع ۲۲۵۰ متری از سطح دریا، صفر درجه است.

۴ این معادله نیز همان معادله بالا است. $15 - \frac{h}{150} = 0 \Rightarrow h = 2250$. جواب این معادله نیز به همان معنای بالا است و همان ارتفاعی را نشان می‌دهد که در آن، دما صفر است.

۵ نتیجه می‌گیریم برای به‌دست آوردن جواب معادله $15 - \frac{h}{150} = 0$ کافی است محل تلاقی نمودار تابع $T(h) = 15 - \frac{h}{150}$ را با محور x ‌ها به‌دست آوریم.

در جمع‌بندی این فعالیت نتیجه گرفته می‌شود این روش برای هرگونه معادله‌ای قابل به‌کار بردن است و در مثال ۶ یک معادله درجه ۳ داده شده است و با رسم نمودار ریشه‌های این معادله به دست آمده است.

آب از بالای آبشاری که ارتفاع آن ۱۸۰ متر است، به رودخانه می‌ریزد. تابع $f(t) = -5t^2 + 18t$ با قانون مدنی ریاضی است که ارتفاع هر قطره آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جدا شدن از بالای آبشار مشخص می‌کند.

۱. ارتفاع یک قطره آب از سطح رودخانه بعد از ۲ ثانیه چقدر است؟

۲. نمودار تابع با قانون $f(t)$ و دامنه \mathbb{R} آورده شده است. از زمان را روی محور افقی و ارتفاع را روی محور عمودی هر واحد $1 =$ متر، در نظر بگیرید. نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور x ‌ها را قطع می‌کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۳. جواب‌های معادله $-5t^2 + 18t = 0$ چه مفاهیمی هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.

۴. دامنه تابع f را طوری تعیین کنید که قانون $f(t)$ ارتفاع قطره آب از سطح رودخانه را مشخص کند.

حل کار در کلاس ۵

اهداف: تقویت مهارت حل معادله درجه دوم با استفاده از نمودار، حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال، ارتباطات، بازنمایی‌ها.

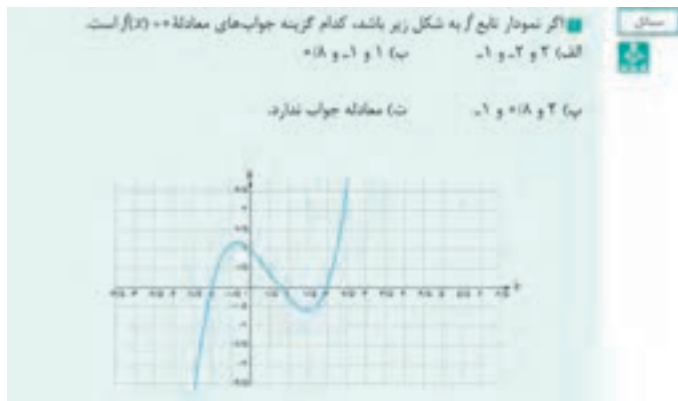
$$d(t) = -5(t)^2 + 180 \Rightarrow d(t) = 160 \quad \text{متر} \quad \color{red}{\boxed{1}}$$

۲ نمودار این تابع در نقاط ۶ و ۶- محور طول‌ها را قطع می‌کند. لحظه ۶ همان لحظه‌ای است که آب به سطح زمین می‌رسد. اما ۶- از لحاظ فیزیکی معنا ندارد.

$$-5t^2 + 180 = 0 \Rightarrow -5t^2 = -180 \Rightarrow t^2 = 36 \Rightarrow t = \pm 6$$

$t = 6$ یعنی پس از ۶ ثانیه یک قطره به سطح رودخانه می‌رسد اما $t = -6$ قابل قبول نیست زیرا این تابع وضعیت قطره آب را در زمان‌های منفی توصیف نمی‌کند.

۴ قانون این تابع فقط از لحظه سقوط قطره آب تا رسیدن به سطح رودخانه اعتبار دارد پس از لحظه $t = 0$ تا $t = 6$ می‌توان از این قانون استفاده کرد و دامنه این تابع بازه $[0, 6]$ است.

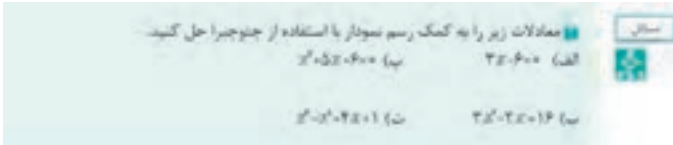


حل مسائل

۱- اهداف: حل معادله $f(x) = 0$ با استفاده از نمودار تابع f .

مهارت‌ها و فرایندها:

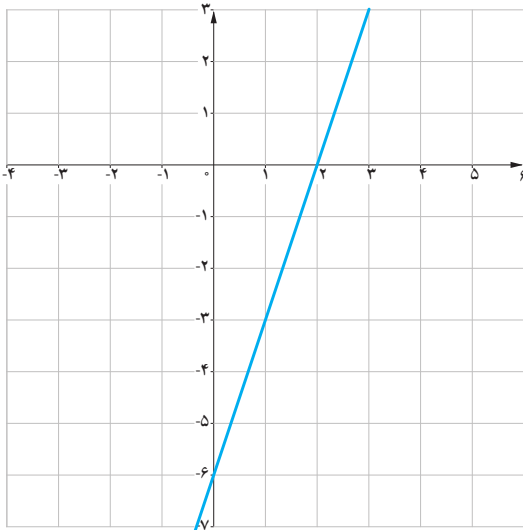
حل مسئله (به روش هندسی)، پرورش تفکر بصری.
گزینه پ. زیرا نمودار تابع در این سه نقطه نمودار محور طول‌ها را قطع می‌کند.



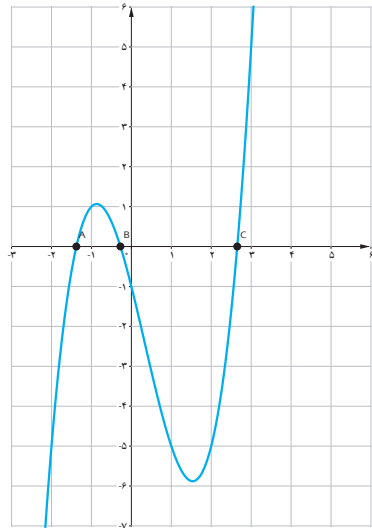
۲-اهداف: حل معادله $f(x) = 0$ با استفاده از نمودار تابع f .

مهارت‌ها و فرایندها:

بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، حل مسئله.



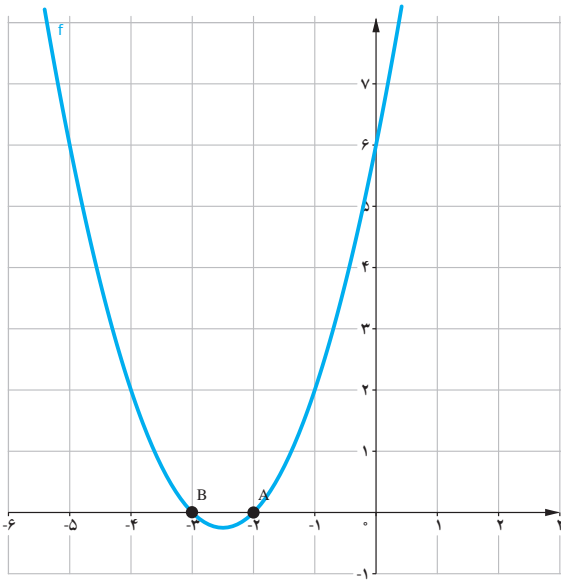
(الف)



(ت)

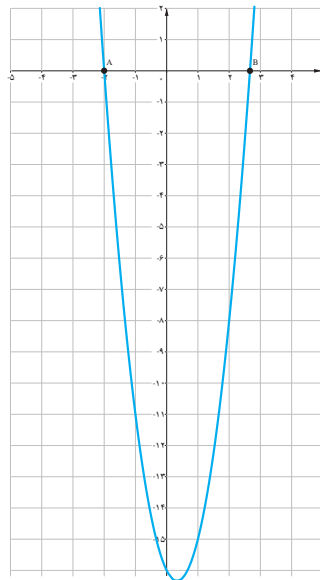
این نمودار محور طول‌ها را در نقطه ۲ قطع می‌کند پس جواب معادله ۲ است.

این نمودار محور طول‌ها را در نقاط $1/83$ ، $0/27$ و $2/65$ قطع می‌کند، پس جواب‌های معادله $1/38$ ، $0/27$ و $2/65$ است.



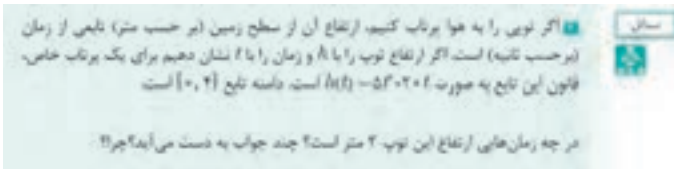
این نمودار محور طول‌ها را در نقاط -2 و -3 قطع می‌کند، پس جواب‌های معادله -2 و -3 است.

(ب)



(پ)

این نمودار محور طول‌ها را در نقاط -2 و $2/67$ قطع می‌کند، پس جواب‌های معادله -2 و $2/67$ است.



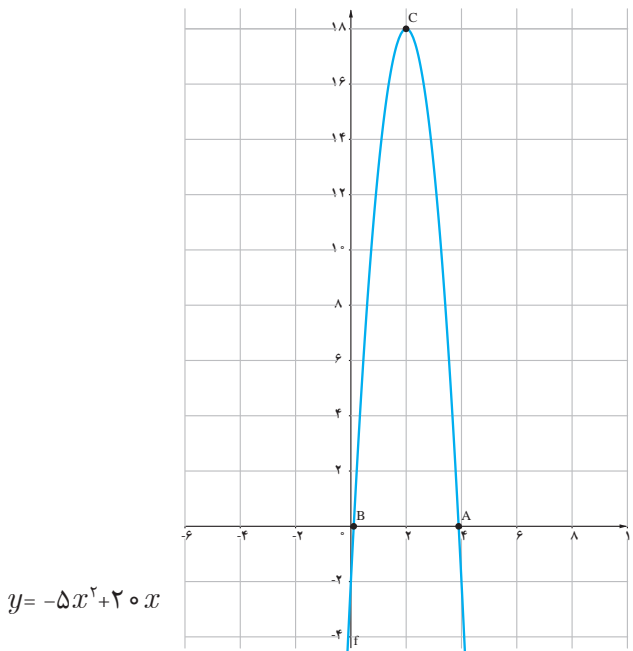
۳- اهداف: حل یک معادله درجهٔ دوم در زمینه و بافت زندگی و درک معنای جواب یک معادله

مهارت‌ها و فرایندها:

بازنمایی‌ها، پیوند و اتصال با خارج ریاضی، پرورش تفکر واگرا، حل مسئله، استدلال.

$$h(t) = -5t^2 + 20t = 2 \Rightarrow t = 2 + \frac{3}{5}\sqrt{10} \quad \text{و} \quad t = 2 - \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

مسئله دو جواب دارد. یک بار وقتی که توپ بالا می‌رود و یک بار وقتی که پایین می‌آید.



باید با رسم نمودارها به کمک جئوجبرا حل شوند. نمودار محور طول‌ها را در نقاط 0/1 و 3/9 قطع می‌کند، پس جواب‌های معادله 0/1 و 3/9 است.

بخش چهارم: کاربرد تابع‌ها در حل نامعادله‌ها

اهداف بخش

- حل نامعادلهٔ $ax+b > 0$ یا $ax+b < 0$ با استفاده از رسم نمودار تابع $f(x) = ax+b$
- حل نامعادلهٔ $ax^2+bx+c > 0$ یا $ax^2+bx+c < 0$ با استفاده از رسم نمودار تابع $f(x) = ax^2+bx+c$
- برقراری ارتباط بین وضعیت نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور x و جواب‌های نامعادله‌های $f(x) > 0$ و $f(x) < 0$

پیش‌نیازها

- رسم نمودار تابع‌های خطی $y = ax+b$ و نمودار تابع‌های درجه دوم $y = ax^2+bx+c$
- تشخیص علامت مقادیر یک تابع $f(x)$ و وضعیت $f(x)$ نسبت به محور طول‌ها

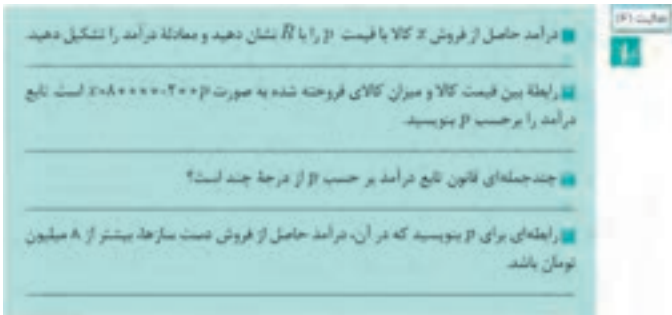
واژه‌های کلیدی: تابع خطی، تابع درجهٔ دوم، نامعادله، علامت مقادیر تابع

نگاه کلی به بخش

در این بخش، به حل نامعادله‌های درجهٔ ۱ و درجهٔ ۲ و بالاتر با استفاده از رسم نمودار می‌پردازیم. در ابتدای فصل یک موقعیت داستانی توصیف شده است که این موقعیت به وسیلهٔ یک مدل ریاضی (نامعادله) توصیف شده است. در فعالیت اول هدف ارتباط دادن این موقعیت و نامعادله است و در فعالیت دوم روش حل نامعادله‌ها با استفاده از رسم نمودار مشخص می‌شود.

ورود به مطلب

معادلات و نامعادلات بسیار به هم نزدیک‌اند و هر معادله‌ای متناظر نامعادله‌هایی است. می‌توان ابتدا مفهوم نامعادله را یادآوری کرد و در زمینه‌های واقعی نمونه‌هایی از آن را نشان داد. قبلاً نامعادله‌های درجه اول آموزش داده شده‌اند و بر مبنای آن می‌توان سایر نامعادله‌ها را نیز مطرح کرد. در کتاب در یک زمینهٔ واقعی نمونه‌ای از نامعادله‌های درجه دوم طرح شده است. سپس با ایده گرفتن از حل معادلات به کمک نمودارها روش حل نموداری نامعادله‌ها و امکان آن می‌تواند طرح شود و طبق فعالیت‌های کتاب پیش رفت.



فعالیت آموزشی

پس از توصیف کوتاه یک موقعیت به فعالیت (۶) می‌رسیم که هدف از آن مدل‌سازی ریاضی یک موقعیت واقعی و رسیدن به یک نامعادله درجه دوم است.

هدف فعالیت (۶): نوشتن نامعادله درجه دوم برای توصیف یک موقعیت واقعی
اهداف موضوعی:

۱ درک مفهوم نامعادله درجه دوم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله (مدل‌سازی)،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ ارتباطات.

حل فعالیت ۶

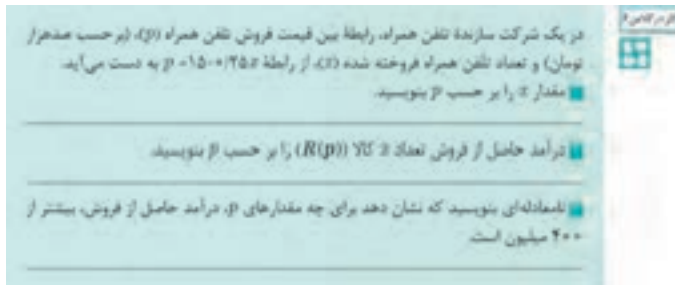
۱ $R = p \times x$

۲ $R = p \times (80000 - 200p)$ بنابراین $R = 80000p - 200p^2$

۳ از درجه ۲

۴ $800000 < R \Rightarrow 800000 < 80000p - 200p^2 \Rightarrow -p^2 + 400p - 40000 > 0$

با انجام این فعالیت به یک نامساوی می‌رسیم که نمونه‌ای از یک نامعادله از درجه ۲ است.



حل کار در کلاس ۶

اهداف: تقویت مهارت مدل‌سازی پدیده‌ها با استفاده از نامعادله درجه دوم، پیوندها و اتصالات، ارتباطات.

$$1 \quad x = 60 - 4p$$

$$2 \quad R = xp = (60 - 4p)p = 60p - 4p^2$$

$$3 \quad 60p - 4p^2 > 4000 \quad (\text{قیمت بر حسب صد هزار تومان است})$$

در ادامه به شیوه‌های حل نامعادله‌ها از طریق نمودارهای تابع‌ها پرداخته می‌شود.

اهداف موضوعی:

1 تعیین علامت مقادیر تابع درجه دوم به‌ازای مقادیر مختلف متغیر تابع با استفاده از نمودار،

2 کسب مهارت حل نامعادله درجه دوم با استفاده از نمودار مهارت‌ها و فرایندها:

1 مقایسه کردن،

2 استدلال،

3 بازنمایی،

4 ارتباطات.

تابع $f(x) = x^2 - 7x + 1$ را با دامنه \mathbb{R} در نظر بگیرید. نمودار آن در زیر رسم شده است.

طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور x ها، چه چیزی را نشان می‌دهند؟

با استفاده از نمودار، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را به دست آورید.

آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور x ها قرار گرفته است، رنگی (بزرگ) کنید و جمله زیر را کامل کنید.
عرض نقاط رنگی (کوچک‌تر از صفر / بزرگ‌تر از صفر) است.

آیا به ازای چه مقداری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر از دامنه را به صورت بازه نمایش دهید.

مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 7x + 1 > 0$ با مجموعه به دست آمده در (۴) چه رابطه‌ای دارد؟ توضیح دهید.

آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور x ها قرار گرفته است با رنگ دیگری مشخص کنید.

آیا به ازای چه مقداری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ این قسمت از دامنه را با استفاده از بازه‌ها بنویسید.

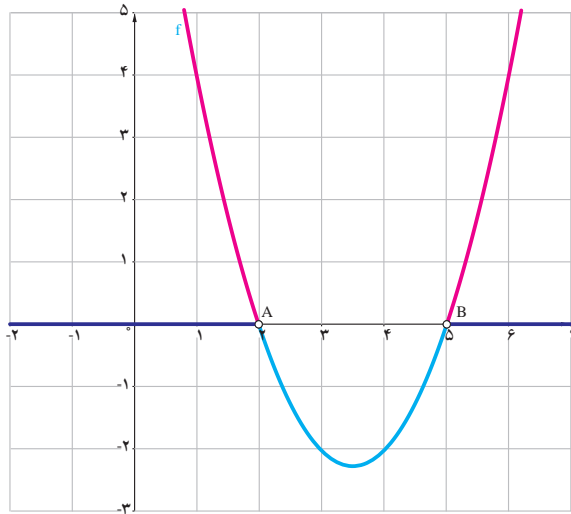
آیا مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 7x + 1 < 0$ همان مجموعه به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

حل فعالیت ۷

۱ طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور x ها، همان جواب‌های معادله $f(x) = x^2 - 7x + 1 = 0$ هستند.

۲ نقاط برخورد $x=2$ ، $x=5$ هستند که همان جواب‌های معادله هستند.

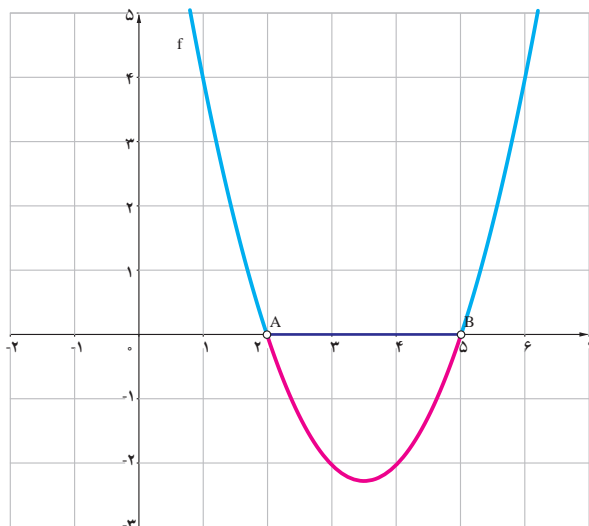
۳ عرض نقاط رنگی شده بزرگ‌تر از صفر هستند.



۴ به ازای طول نقاط رنگی شده مقدار تابع مثبت است و این نقاط مجموعه $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ را تشکیل می دهند.

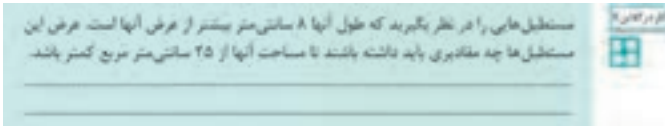
۵ مجموعه جواب های نامعادله $x^2 - 7x + 10 > 0$ ، یعنی تمام مقادیر x که $x^2 - 7x + 10 = 0$ بیشتر از صفر باشد که همان x هایی است به ازای آنها، مقدار تابع $f(x)$ مثبت است و همان مجموعه $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ است.

۶



بازه (۲, ۵) \checkmark

۸ بله، مجموعه جواب $x^2 - 7x + 10 < 0$ یعنی تمام مقادیر x که $x^2 - 7x + 10 = 0$ کمتر از صفر باشد که همان x هایی است به ازای آنها، مقدار تابع $f(x)$ منفی است و همان مجموعه (۲, ۵) است.



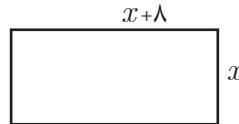
حل کار در کلاس (۷)

اهداف: تقویت مهارت حل نامعادله درجه دوم با استفاده از نمودار، حل مسئله (مدل‌سازی)، پیوندها و اتصالات، ارتباطات، کسب مهارت استفاده از نرم‌افزار.

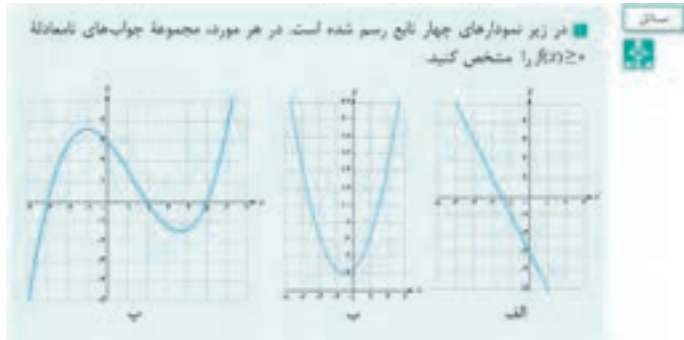
$$x^2 + 8x = (x+8)x = x^2 + 8x$$

$$x^2 + 8x < 25$$

$$x^2 + 8x - 25 < 0$$



برای حل نامعادله، نمودار تابع $f(x) = x^2 + 8x - 25$ را با دامنه \mathbb{R} رسم می‌کنیم و قسمت پایین محور x ها را انتخاب می‌کنیم. از روی شکل به‌طور تقریبی جواب‌های معادله $f(x) = x^2 + 8x - 25 = 0$ عبارت‌اند از $x \approx -10/4$ و $x \approx 2/4$ و قسمت پایین نمودار این تابع در بازه $(-10/4, 2/4)$ رخ می‌دهد که جواب این نامعادله است. اما این نامعادله و تابع مربوط به آن مربوط به عرض مستطیل‌ها است که مقادیر مثبتی دارند. یعنی دامنه تغییر x فقط در بازه $(0, +\infty)$ است. بنابراین این نامعادله روی بازه مطرح است و نمودار تابع فقط در این بازه باید رسم شود. که نتیجه می‌دهد مجموعه جواب نامعادله بازه $(0, 10/4)$ است.



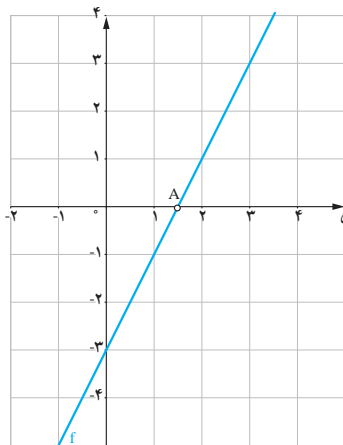
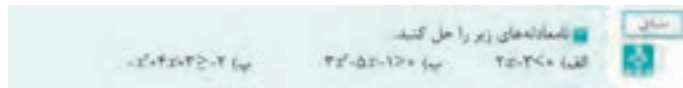
حل مسائل

۱- اهداف: تشخیص دیداری مجموعه جواب‌های نامعادله‌ها از روی نمودار تابع‌ها

مهارت‌ها و فرایندها:

پرورش تفکر بصری، حل مسئله

الف: $(-\infty, -1/5]$ ب: \mathbb{R} پ: $[-3, 2] \cup [5, +\infty)$



۲- اهداف: تمرین روی حل

نامعادله‌ها با استفاده از نمودار

تابع‌ها

مهارت‌ها و فرایندها: پرورش

تفکر بصری، بازنمایی‌های چندگانه،

مهارت کار با ابزار، حل مسئله.

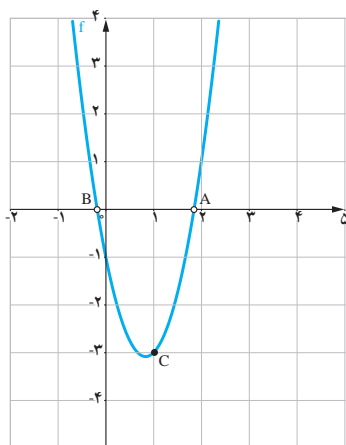
الف) $(-\infty, \frac{3}{2})$

نمودار در بازه $(-\infty, \frac{3}{2})$ زیر محور

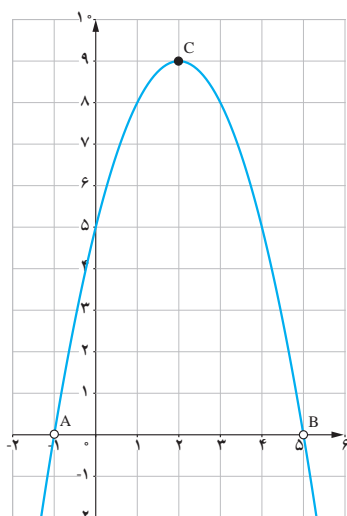
Xها است و این بازه مجموعه جواب

نامعادله است.

ب) از طریق نمودار مجموعه جواب نامعادله به طور تقریبی مجموعه $(-\infty, -0/18) \cup (1/85, +\infty)$ است.



پ) از طریق نمودار مجموعه جواب نامعادله به طور تقریبی بازه $[-1, 5]$ است.

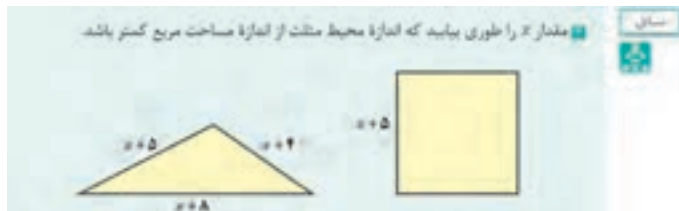
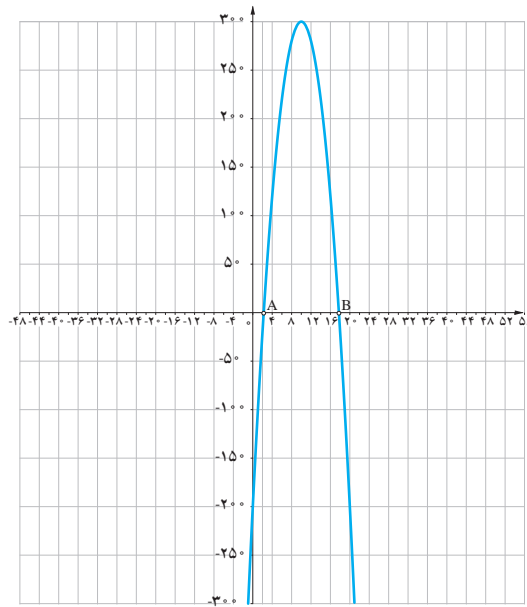


پرنده‌ای به طور عمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرنده از سطح دریا (بر حسب متر) به صورت تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) با رابطه $f(t) = -5t^2 + 10t + 2$ داده شده است. مشخص کنید در چه بازه زمانی، ارتفاع این پرنده بیش از ۳ متر خواهد بود.

۳- اهداف: حل یک مسئله در زمینه و بافت زندگی واقعی و توجه به محدودیت‌های آن و تفسیر جواب مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال با خارج ریاضی، حل مسئله به روش هندسی.

$$-5t^2 + 100t > 200 \Rightarrow -t^2 + 20t - 40 > 0$$

از طریق رسم نمودار تابع با دامنه \mathbb{R} مجموعه جواب نامعادله به طور تقریبی بازه $(2/25, 17/75)$ است. از آنجا که دامنه واقعی تابع شامل این بازه است، همین جواب درست است. اولین زمان مربوط به بالاتر رفتن پرتابه از ارتفاع ۲۰۰ متر است و دومین زمان مربوط به بازگشت از بالا و رسیدن به ارتفاع ۲۰۰ متر است.



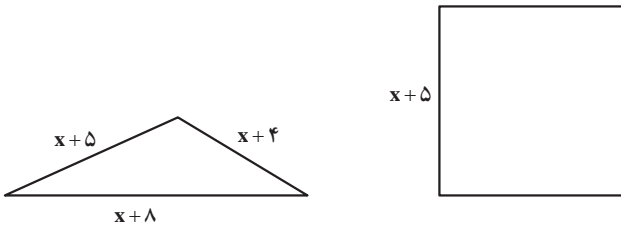
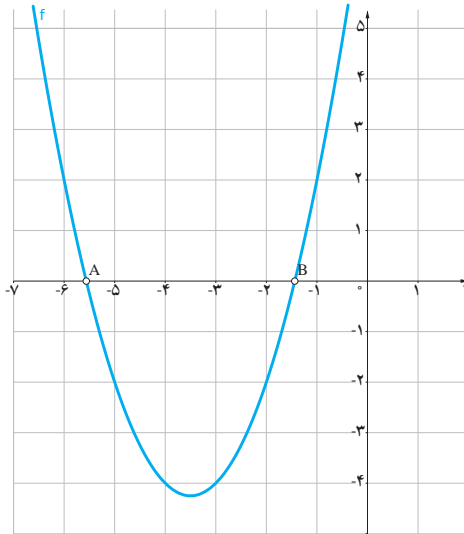
۴- اهداف: استدلال، یافتن رابطه‌ها، حل نامعادله و تفسیر جواب مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله.

$$x+5+x+4+x+8=3x+17 = \text{محیط مثلث}$$

مساحت مربع = $(x+5)^2$

$$3x+172(x+5)^2 \Rightarrow x^2+7x+8 > 0$$

با رسم نمودار تابع با دامنه \mathbb{R} ، مجموعه جواب این نامعادله به طور تقریبی به صورت $(-\infty, -5/5) \cup (-1/4, +\infty)$ است. اما با توجه به آنکه طول اضلاع مثلث و مربع مثبت باید باشند باید داشته باشیم $x < -4$. پس مجموعه جواب اصلی بازه $(-1/4, +\infty)$ است.



۵- اهداف: حل یک نامعادله در یک زمینه واقعی و توجه به محدودیت‌های عملی
مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج آن.

$$R(p) = -100p^2 + 50000p$$

$$-100p^2 + 50000p > 10000000$$

$$-p^2 + 500p - 100000 > 0$$

برای حل نامعادله، نمودار آن را به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم و مجموعهٔ جواب را به دست می‌آوریم که مجموعهٔ جواب تهی است یعنی در هیچ شرایطی درآمدش بیشتر از ده میلیون نخواهد شد.

