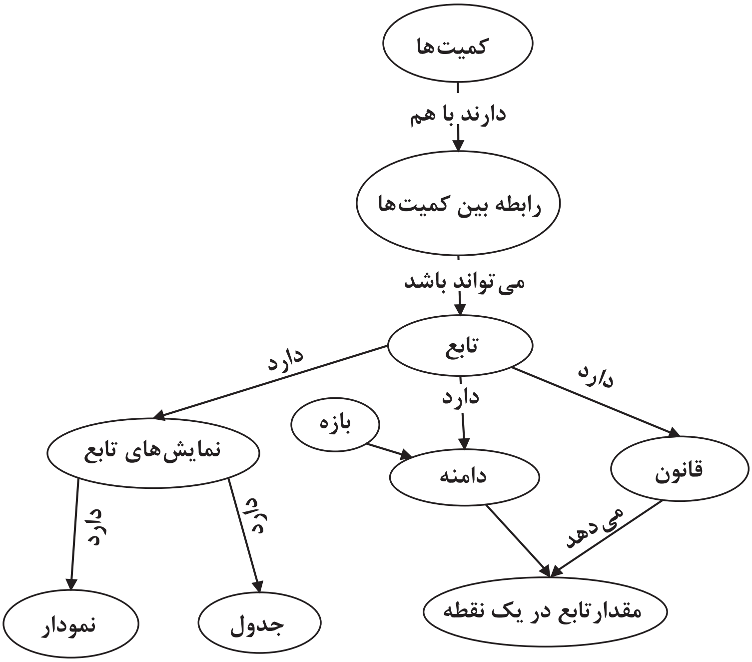
پودمان اول

تابع

طرح کلی مفاهیم پودمان اول (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- درک مفهوم رابطه بین کمیت‌ها در زمینه پدیده‌های طبیعی
- درک مفهوم تابع در زمینه پدیده‌های طبیعی
- آشنایی با قانون تابع و مفهوم متغیر تابع و دامنه تابع
- درک مفهوم بازه در اعداد حقیقی
- آشنایی با مقدار تابع در یک نقطه با استفاده از قانون تابع
- آشنایی با نمایش‌های جدولی و نموداری تابع
- آشنایی با مقدار تابع در یک نقطه با استفاده از نمودار تابع
- تشخیص رفتار تابع به کمک جدول یا نمودار تابع

پیش نیازهای پودمان

- آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و یافتن مقدار عددی آنها به ازای مقدار برای متغیر
- آشنایی با مختصات نقطه و نمایش آن در صفحه محورهای مختصات
- آشنایی با مجموعه اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌های آن

واژه‌های کلیدی

رابطه بین دو کمیت، تابع، دامنه، قانون تابع، بازه، جدول تابع، نمودار تابع

استاندارد های فرایندی	فرایند	توضیح فرایند	مثال
	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ـ ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و با انتخاب مناسب آنها	ـ ارائه نمایش‌های جدولی و نموداری تابع در مورد رابطه بین دو کمیت ـ بیان چگونگی تغییرات تابع از روی نمودار و جدول آن
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ـ ارائه رابطه بین دو کمیت توسط آرش پس ازمثال‌های مختلف دبیر در مورد میزان نور چراغ و فاصله چراغ از ما
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ ارائه رابطه ریاضی که مقدار مساحت مربع ساخته شده را بر حسب مقدار طول قطعه بریده شده از مفتول در کاردرکلاس ۱بیان می‌کند.
	استدلال و اثبات	به کارگیری استدلال	ـ بیان دلیل تشخیص چگونگی تغییرات تابع از روی نمایش‌های نموداری و جدول آن ـ بیان دلیل برای تشخیص مجموعه مقادیردامنه توابعی که در زمینه‌های واقعی ساخته می‌شوند. ـ بیان دلیل تابع بودن یا تابع نبودن رابطه بین دو کمیت
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـ تعیین رابطه بین طول فنر و جرم وزنه آویزان شده به آن ـ تعیین رابطه بین گنجایش بنزین در باک خودرو و میزان مسافت طی شده
		تشخیص‌چگونگی‌ارتباطات بین‌مفاهیم‌ریاضی	ـ نمایش بازه‌ها به‌صورت ریاضی و مجموعه‌ای و رسم نمودار آنها روی محور اعداد حقیقی
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ نمایش‌های مختلف تابع شامل جدول، قانون، نمودار ـ ارائه نمایش‌های مختلف یک بازه
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ توانایی تعمیم و الگویابی داده‌های جدول تابع برای نوشتن قانون آن ـتوانایی مقایسه بین جفت کمیت‌هایی که تابع هستند یا نیستند.

بخش اول: رابطه بین کمیت‌ها

اهداف بخش

- آشنایی با رابطه بین دو کمیت و درک آن در زمینه واقعی
- نوشتن قانون یا ضابطه برای بیان چگونگی رابطه بین دو کمیت و تعیین مقادیر ممکن برای کمیت‌ها

واژه‌های کلیدی: رابطه بین دو کمیت، مقادیر یک کمیت

نگاه کلی به بخش

این بخش، با مکالمه‌ای بین هنرآموز و هنرجو شروع می‌شود که سعی می‌کنند با یکدیگر یک مسئله را حل کنند. نکته اصلی این مسئله، دیدن رابطه بین کمیت‌هایی است که مشاهده می‌کنیم. برای متمرکزکردن هنرآموز به مفهوم اصلی رابطه بین کمیت‌ها، وضعیت‌هایی طراحی شده‌اند که در زمینه‌های مختلف وجود رابطه بین کمیت‌ها را نشان می‌دهند. پس از درک وجود رابطه بین کمیت‌ها، سعی در فرمول‌بندی این رابطه به زبان ریاضی می‌کنیم.

ورود به مطلب

یافتن رابطه بین کمیت‌ها، دلیل اصلی در پیدایش مفهوم تابع است. دبیران می‌توانند از طریق طرح مسئله‌ای که به یکی از این رابطه‌ها اشاره دارد، وارد مفهوم رابطه بین کمیت‌ها شوند. در کتاب از مسئله اندازه‌گیری فاصله ستارگان استفاده شده است تا از طریق آن به رابطه بین شدت نور و فاصله چشمه نور توجه شود. از این نوع رابطه‌ها در طبیعت بسیار دیده می‌شوند که هم به‌عنوان ورودی و هم به‌عنوان مثال می‌توانیم از آنها استفاده کنیم؛ مثلاً رابطه بین شدت صدا و فاصله منبع صدا، رابطه بین فشار هوا و ارتفاع از سطح دریا، رابطه بین فشار وارد بر سطح، مساحت سطح و ...

فعالیت آموزشی

پس از گفتگوی بین هنرجویان و هنرآموز که هنرجویان را آماده درک مفهوم رابطه بین کمیت‌ها می‌کند به فعالیت (۱) می‌رسیم که یکی از این رابطه‌ها را با دقت کافی بررسی کنیم.

اهداف موضوعی:

درک مفهوم:

۱ رابطه

۲ قانون رابطه

۳ مقادیر ممکن برای کمیت‌ها (آشنایی ضمنی با مفهوم دامنه تابع)

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله (مدل‌سازی)

۲ ارتباطات

۳ پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی)

۴ تفکر بصری

۵ بازنمایی‌ها (تصویر و نمادین)

فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۴۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود پاره می‌شود.

در جاهای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

الف) هر چه جرم وزنهٔ آویزان شده ...... شود، طول فنر ...... می‌شود.

ب) اگر به این فنر یک وزنهٔ ۳۰۰ گرمی آویزان کنیم برای پیدا کردن طول فنر، چون به ازای هر ۱۵ گرم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود، پس ابتدا ۳۰۰ را بر ... تقسیم می‌کنیم و سپس

در حالت کلی، اگر جرم وزنهٔ آویزان شده را بر حسب گرم با x نشان دهیم و طول فنر را برحسب سانتی‌متر با l نشان دهید، رابطه‌ای بنویسید که مقدار l را برحسب مقدار x بیان کند.

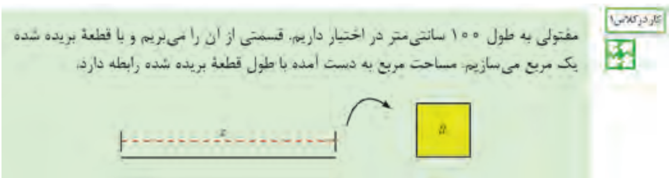
حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟ (راهنمایی: برای پیدا کردن حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، ابتدا باید حداکثر تغییر طول فنر را به‌دست آورید.)

۱ الف) زیادتر ـ بلندتر، یا کمتر ـ کوتاه‌تر

ب) ۳۰ = ۱۰ + ۲۰= طول فنر $\Rightarrow$ ۲۰ = ۱۵ ÷ ۳۰۰

۲ $۰ \leq a \leq ۷۵۰$ $\qquad l = \frac{a}{۱۵} + ۱۰$

۳ ۷۵۰ گرم $\qquad L=۶۰ \rightarrow ۶۰ = \frac{a}{۱۵} + ۱۰ \rightarrow \frac{a}{۱۵} = ۵۰ \quad a = ۱۵ \times ۵۰$


کار در کلاس ۱

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با قطعهٔ بریده شده یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.

اهداف:

- درک مفهوم رابطه در زمینه هندسی، درک قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها، حل مسئله، ارتباط کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال، بازنمایی‌ها (جدول، نمودار، معادله)

۱ خیر، زیرا مساحت عددی مثبت است. (در اینجا نیز قسمتی از مفتول بریده می‌شود.)

۲ اگر طول قطعه بریده شده را x در نظر بگیریم x عددی بین حداقل و حداکثر طول مفتول خواهد بود، یعنی بین صفر و ۱۰۰ سانتی‌متر

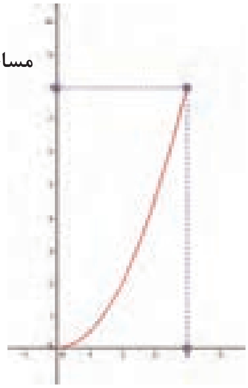
۳ با تقسیم ۸ بر ۴، ضلع مربع ۲ به دست می‌آید. بنابراین مساحت مربع ۴ سانتی‌متر مربع است.

۴ $۰ < x < ۱۰۰$, $s = (\frac{x}{۴})^۲ = \frac{x^۲}{۱۶}$, طول قطعه بریده شده $= x$

۵

طول قطعهٔ بریده شده	۱	۴	۲۰	۳۲	۴۸	۶۰	۱۰۰
مساحت مربع	$\frac{۱}{۱۶}$	۱	۲۵	۶۴	۱۴۴	۲۲۵	۶۲۵

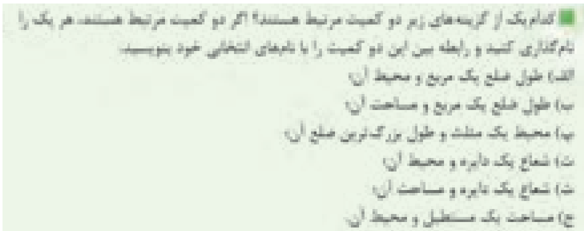
۶



۷ $۴۰ = \frac{x^۲}{۱۶} \Rightarrow x = ۸\sqrt{۱۰}cm$

۸ بله، به کمک جواب‌های سؤالات بند (۲) و (۴) جواب بقیه سؤالات را می‌توان داد.

مسائل



کدام یک از گزینه‌های زیر دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.
الف) طول ضلع یک مربع و محیط آن
ب) طول ضلع یک مربع و مساحت آن
پ) محیط یک مثلث و طول بزرگ‌ترین ضلع آن
ت) شعاع یک دایره و محیط آن
ث) شعاع یک دایره و مساحت آن
ج) مساحت یک مستطیل و محیط آن

مهارت‌ها و فرایندها:

● پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات مهارت تشخیص کمیت‌های مرتبط

الف) دو کمیت مرتبط هستند. اگر طول ضلع مربع را با x و محیط آن را با p نمایش دهیم، رابطه به‌صورت $p = ۴x$ است.

ب) دو کمیت مرتبط هستند. اگر طول ضلع مربع را با x و مساحت آن را با s نمایش دهیم، رابطه به‌صورت $s = x^۲$ است.

پ) دو کمیت مرتبط نیستند.

ت) دو کمیت مرتبط هستند. اگر شعاع دایره را با r و محیط آن را با p نمایش دهیم، رابطه به‌صورت $p = ۲\pi r$ است.

ث) دو کمیت مرتبط هستند. اگر شعاع دایره را با r و مساحت آن را با s نمایش

دهیم، رابطه به صورت $s = \pi r^۲$ است.
ج) دو کمیت مرتبط نیستند.

آیا درجه حرارت یک مکان بر حسب سانتی‌گراد و درجه حرارت آن بر حسب فارنهایت مرتبط هستند؟ اگر مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین آنها را بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها:

● استدلال کردن، ارتباطات، پیوند و اتصال‌ها، مهارت تشخیص کمیت‌های مرتبط.
بله، دو کمیت مرتبط هستند. اگر درجه حرارت بر حسب سانتی‌گراد را با C و درجه حرارت بر حسب فارنهایت را با F نمایش دهیم رابطه به‌صورت $F = ۱/۸^\circ C + ۳۲$ است.

وزن جلد کتابی (با حداکثر ۲۰۰ صفحه) برابر ۴۰ گرم و وزن هر ورق آن ۰/۸ گرم است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان وزن کتاب را بر حسب تعداد ورق‌های آن به‌دست آورد.

مهارت‌ها و فرایندها:

● حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی
رابطه به‌صورت $W = ۴۰ + ۰/۸\ x$ است و $۰ \leq x \leq ۱۰۰$.

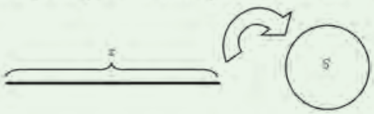
راننده‌ای مسافت ۳۵۰ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر بر ساعت در حال طی کردن است.
الف) آیا مقدار مسافتی که طی می‌کند (d) و زمان (t)، دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، چه رابطه‌ای بین آنها برقرار است؟
ب) هر یک از این دو کمیت چه مقادیری را می‌توانند داشته باشند؟

مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی
الف) بله دو کمیت مرتبط هستند و رابطه به‌صورت $d = ۷۰\,t$ است.

ب) $۰ \leq t \leq ۵$ و $۰ \leq d \leq ۳۵۰$

طنابی به طول ۱۰ متر در اختیار داریم. قطعه‌ای از آن را می‌بریم و با قطعهٔ بریده شده یک حلقهٔ دایره‌ای شکل می‌سازیم. مساحت حلقه دایره‌ای شکل به‌دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.



مهارت‌ها و فرایندها:

● حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات، پیوندها و اتصال‌ها

الف) خیر، زیرا مساحت عددی مثبت است.

ب) $۰ < x < ۱۰$

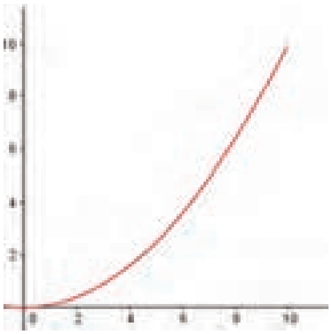
پ) $۲\pi r = ۴$ در نتیجه $r = \frac{۲}{\pi}$ و بنابراین $s = \frac{۴}{\pi}$.

ت) $۲\pi r = x$ در نتیجه $r = \frac{x}{۲\pi}$ و بنابراین $s = \frac{۱}{۴\pi}x^۲$.

ث)

طول قطعه بریده شده	$\frac{۱}{۲}$	۲	۴	۶	۸	۱۰
مساحت دایره	$\frac{۱}{۴۸}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	۳	$\frac{۱۶}{۳}$	$\frac{۲۵}{۳}$

ج)



چ) نیازمندِ دانستن بندهای (ب) و (ت) هستیم.

دو کمیت مرتبط به هم مثال بزنید. هر یک را نام‌گذاری کنید و در صورت امکان رابطهٔ بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها:

● حل مسئله، پرورش تفکر واگرا

جفت کمیت‌های مختلفی را می‌توان مثال زد؛ برای مثال، محیط و مساحت یک مربع یا محیط و مساحت یک دایره.

بخش دوم: مفهوم تابع

اهداف بخش

- درک تابع بودن یا نبودن رابطه بین دو کمیت
- درک مفاهیم دامنه و قانون یک تابع
- تعیین دامنه تابعی که در زمینه‌ای واقعی تعریف شده است، از طریق محدودیت‌های واقعی

واژه‌های کلیدی: تابع، دامنه، قانون تابع

نگاه کلی به بخش

روش آموزشی این کتاب برای معرفی تابع، با سایر کتاب‌ها فرق دارد و دبیران با توجه به این تفاوت باید شیوه نوینی برای آموزش مفهوم تابع در پیش بگیرند. هدف این کتاب ارائه مفهوم ریاضی تابع با همان روند تاریخی به وجود آمدن مفهوم تابع است. به همین دلیل در اینجا از تابع به‌عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب یاد نخواهیم کرد و بر مفهوم شهودی و اصلی تابع که عملگری است که به اعضای مجموعه مبدأ، عنصری معین در مجموعه مقصد نظیر می‌کند، تأکید خواهیم داشت. از لحاظ تاریخی، تابع به معنای رابطهٔ بین کمیت‌ها بوده است و ما نیز با همین روش مفهوم تابع را ارائه خواهیم کرد.

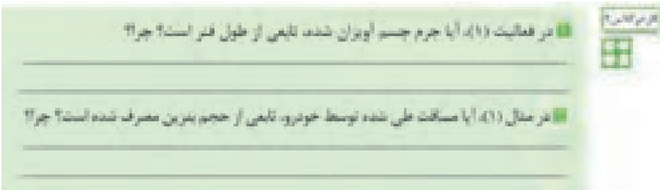
در این بخش ابتدا معرفی تابع به صورت غیررسمی انجام می‌شود و در طی مثال‌های متعدد، دو مفهوم زیربنایی دامنه و قانون تابع ارائه می‌شوند.

یک اشتباه رایج درباره مفهوم تابع این است که دامنه یک تابع را از طریق قانون (ضابطه) تابع تعیین می‌کنند، در حالی که این دو مفهوم مستقل از یکدیگرند. برای ساختن یا ارائه هر تابعی، ابتدا باید دامنه آن را ارائه کرد و سپس قانونی که روی این دامنه عمل می‌کند را باید بیابیم. دامنه یک تابع در زمینه پدیده‌های طبیعی را قانون آن معین نمی‌کند بلکه محدودیت‌های مسئله مورد بررسی، و آن چیزی که تابع قرار است توصیف کند، مشخص‌کننده دامنه تابع است. اگر در جهان ریاضی هم باشیم و هیچ محدودیت عملی هم نداشته باشیم، این شخصِ ارائه‌کننده تابع است که باید بگوید تابع مورد نظرش چه قانونی دارد و این قانونِ قرار است روی چه مجموعه‌ای عمل کند. برای تأکید روی این نکته، مثال‌ها و مسئله‌های متعددی آورده شده است.

ورود به مطلب

پس از بررسی چند وضعیت از رابطه بین کمیت‌ها که در فعالیت (۱) و مثال(۱) و

کار درکلاس(۱) آمده‌اند، هنرجویان با مفهوم رابطه بین کمیت‌ها آشنا شده‌اند و تاحدودی هم به‌طور غیرمستقیم با مفهوم دامنه و قانون تابع کار کرده‌اند. در این بخش مفهوم تابع به‌طور مستقیم ارائه می‌شود و سپس چند مثال ارائه می‌گردد. برای تأکید بر یکتایی مقدار تابع با یک مثال، حالتی که یک رابطه تابع نیست نیز تذکر داده می‌شود.


کار در کلاس

۱ در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر است؟ چرا؟

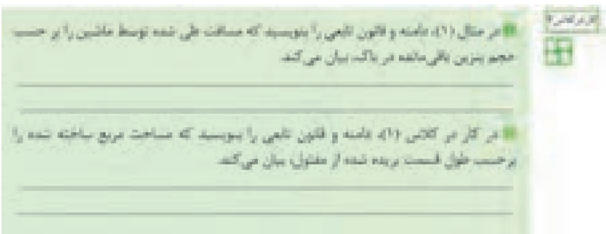
۲ در مثال (۱)، آیا مسافت طی شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین مصرف شده است؟ چرا؟

اهداف:

- تشخیص اینکه از دو کمیت مرتبط یک کمیت تابعی از کمیت دیگر است، استدلال، پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی).

۱ بله جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر است، زیرا با مشخص شدن طول فنر، برای جرم جسم آویزان شده یک مقدار معین به‌دست می‌آید.

۲ بله، زیرا با مشخص شدن بنزین مصرف شده، برای مسافت طی شده یک مقدار معین به‌دست می‌آید.


کار در کلاس

۱ در مثال (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط ماشین را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک بیان می‌کند.

۲ در کار در کلاس (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده را برحسب طول قسمت بریده شده از مفتول بیان می‌کند.

اهداف:

- کسب مهارت مدلسازی تابع و نمایش نمادین دامنه و قانون آن، پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی)

۱ دامنه تابع = $\{v \in \mathbb{R} \mid ۵ \leq v \leq ۶۰\}$

قانون تابع: $d = (۶۰ - v) \times ۱۲/۵$

۲ دامنه تابع = $\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۱۰۰\}$

قانون تابع: $s=\frac{x^{۲}}{۱۶}$

مسائل

■ آیا دمای کلاس شما در یک روز معین، تابعی از زمان است؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- استدلال کردن، پیوندها و اتصال‌ها

بله، زیرا با مشخص بودن زمان، یک **مقدار معین** برای دمای کلاس به‌دست می‌آید.

■ دمای هوا در یک منطقه، در ارتفاعات مختلف از سطح دریا، متفاوت است و به ازای هر ۱۵۰ متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. آیا دمای یک منطقه تابعی از ارتفاع آن منطقه از سطح دریا است؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- استدلال کردن، پیوندها و اتصال‌ها

بله، زیرا با مشخص بودن ارتفاع در یک منطقه، یک **مقدار معین** برای دما به‌دست می‌آید.

■ یک مغازه شیرینی فروشی ماهانه ۲ میلیون تومان بابت اجارهٔ مغازه، آب، برق و دستمزد کارگران، به‌طور ثابت پرداخت می‌کند. تولید هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان هزینهٔ مواد اولیه دارد. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد. اگر x میزان تولید شیرینی باشد.

الف) درآمد این مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) هزینهٔ ماهانهٔ مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

پ) سود مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

الف) اگر x میزان شیرینی بر حسب کیلوگرم باشد، داریم:

درآمد حاصل از فروش x واحد شیرینی = $R = ۱۲۰۰۰x\ ,\ ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

ب) $C = ۳۰۰۰x + ۷۰۰۰۰۰۰ \; , \; ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$ = هزینه تولید x واحد شیرینی

پ) $P = R - C = ۱۲۰۰۰x - (۳۰۰۰x + ۷۰۰۰۰۰۰) \; , \; ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$ = سود

$$P = ۹۰۰۰x - ۷۰۰۰۰۰۰ \; , \; ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$$

می‌توان در اینجا توضیح داد که حداقل باید ۷۷۸ کیلو شیرینی تولید شود تا شیرینی‌فروش ضرر نکند یعنی باید به جای x در این رابطه، عددی قرار داد که P را مثبت کند.

$$P = \text{سود} = ۹۰۰۰x - ۷۰۰۰۰۰۰ > ۰ \Rightarrow x \geq ۷۷۸$$

از منبع آبی با حجم ۵۰۰ لیتر برای پرکردن یک حوضچه استفاده می‌شود. اگر شیر آب منبع به‌طور کامل باز باشد، در هر دقیقه ۵ لیتر آب از آن خارج می‌شود.

الف) توضیح دهید که چرا حجم آب داخل حوضچه تابعی از زمان است.

ب) با فرض آنکه در لحظه صفر، حوضچه خالی است، قانون این تابع را با نوشتن حجم آب داخل حوضچه بر حسب زمان باز بودن شیر، بنویسید.

پ) دامنهٔ این تابع را مشخص کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- ارتباطات، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

الف) زیرا با مشخص بودن زمان، یک **مقدار معین** برای حجم آب داخل حوضچه به‌دست می‌آید.

ب) اگر حجم آب داخل حوضچه را بر حسب لیتر با v و زمان بازبودن شیر را بر حسب دقیقه با t نشان دهیم، قانون این تابع به‌صورت $v = ۵t$ است.

پ) $۰ \leq t \leq ۱۰۰$

سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. در این صورت کمیت ارتفاع سنگ از سطح زمین و کمیت زمان، باهم مرتبط هستند.

الف) چرا ارتفاع سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است؟

ب) اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ، زمان شروع پرتاب باشد، دامنهٔ این تابع چیست؟

مهارت‌ها و فرایندها:

● استدلال کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات

زیرا در هر لحظه، سنگ در جایی معین است و ارتفاع آن نیز معین است. از آنجا که این حرکت فقط در ۳ ثانیه انجام می‌شود، دامنه این تابع مجموعه اعداد بین ۰ تا ۳ است.

یک مقاومت ثابت ۳۰۰ اهمی (R_1)، به‌طور موازی به یک مقاومت متغیر (R_2) متصل شده است. مقاومت نهایی (R_{eq}) تابعی از مقاومت متغیر است. اگر مقاومت متغیر، حداقل ۵ اهم و حداکثر ۱۵۰۰ اهم باشد، دامنه و قانون تابعی را به‌دست آورید که مقاومت نهایی را بر حسب مقاومت متغیر بیان می‌کند. (راهنمایی: از فرمول $\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ کمک بگیرید.)

مهارت‌ها و فرایندها:

● حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات

$$\frac{۱}{۳۰۰}+\frac{۱}{R_۲}=\frac{۱}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq}=\frac{۳۰۰R_۲}{۳۰۰+R_۲}\ ,\ ۵\leq R_۲\leq ۱۵۰۰$$

فرض کنیم که x^2 مربع عدد حقیقی x باشد. آیا با مشخص بودن x^2، برای x یک مقدار معین در اعداد حقیقی به‌دست می‌آید؟ آیا یک عدد، تابعی از مربع آن است؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

● استدلال کردن، ارتباطات

یک عدد، تابعی از مربع خودش نیست، زیرا اگر $x^۲$ مشخص باشد برای x یک مقدار معین به‌دست نمی‌آید؛ مثلاً اگر $x^۲$ برابر ۴ باشد برای x دو مقدار ۲ و ۲- به دست می‌آید.

بخش سوم: بازه‌ها

اهداف بخش

- درک مفهوم بازه (فاصله)
- استفاده از بازه‌ها در تعیین دامنهٔ توابع
- معرفی و نمایش هندسی بازه‌ها
- آشنایی با نماد بی‌نهایت و چگونگی استفاده از آن برای نمایش یک بازه

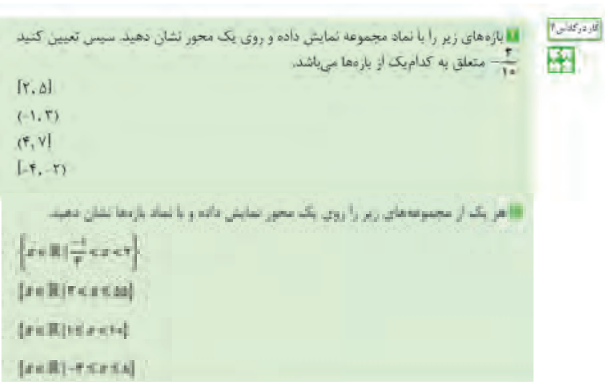
واژه‌های کلیدی : بازه، بی‌نهایت

نگاه کلی به بخش

در این بخش بازه‌ها و نمایش آنها مطرح می‌شوند تا در بیان ریاضی دامنه تابع‌ها، دچار مشکل نشویم.

ورود به مطلب

هدف این بخش فقط نمادگذاری برای نمایش برخی زیرمجموعه‌های مهم در مجموعه اعداد حقیقی است. بنابراین تنها انگیزه مهم این بخش نمادگذاری برای ساده‌تر صحبت کردن است و مناسب است که با مراجعه به بخش‌های قبل و دیدن برخی زیرمجموعه‌ها که به آنها برخورد کرده‌بودیم انگیزه لازم برای نام‌گذاری آنها را فراهم کنید. بازه‌ها دسته خاصی از زیرمجموعه‌های مجموعه اعداد حقیقی هستند که بسیار به کار می‌آیند و به همین دلیل آنها را نام‌گذاری می‌کنیم.


کار در کلاس ۴

۱ بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش داده و روی یک محور نشان دهید. سپس تعیین کنید $-\frac{۴}{۱۰}$ متعلق به کدام‌یک از بازه‌ها می‌باشد.

[۲، ۵]

(−۱، ۳)

(۴، ۷]

[−۴، −۲)

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور نمایش داده و با نماد بازه‌ها نشان دهید.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

● **اهداف:** بازنمایی‌های چندگانه

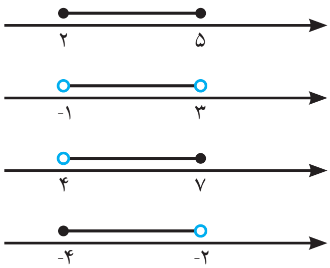
۱

$[۲\ ,\ ۵] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \leq x \leq ۵\}$

$(-۱\ ,\ ۳) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x < ۳\}$

$(۴\ ,\ ۷] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۴ < x \leq ۷\}$

$[-۴\ ,\ -۲) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۴ \leq x < -۲\}$



$\frac{-۳}{۱۰}$ متعلق به بازه $(-۱\ ,\ ۳)$ می‌باشد.

۲

$(۳\ ,\ ۵۵]\ ,\ (-\frac{۱}{۳}\ ,\ ۲)\ ,\ [-۳\ ,\ ۸]\ ,\ [۱\ ,\ ۱۰)$

توصیه: اعداد دیگری نظیر $\sqrt{۲}$ را انتخاب کرده و از هنرجو بخواهید بررسی کند داخل بازه‌ها هستند یا خیر. این تصور اشتباه در برخی هنرجویان وجود دارد که بازه مثلاً $[۱\ ,\ ۵]$ فقط شامل اعداد طبیعی است یا فقط اعداد ۱ و ۵ را دارد با انتخاب مناسب اعدادی نظیر $\sqrt{۲}$ و ... این تصور در هنرجویان اصلاح خواهد شد. در ادامه این بخش، نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ برای نمایش بازه‌های بی‌کران معرفی می‌شوند.

توجه داشته باشید که $+\infty$ و $-\infty$ نماد هستند و نشان‌دهنده هیچ عدد حقیقی نیستند و اشاره به نقطهٔ خاصی روی محور اعداد حقیقی ندارند. استفاده از این نمادها در بازه‌ها به معنای بی‌کران بودن بازه از بالا یا پایین است؛ مثلاً اگر بخواهیم مجموعه همهٔ اعداد بیشتر از ۲، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۲\}$، را نشان دهیم، می‌توانیم آن را به‌صورت $[۲\ ,\ +\infty)$ نمایش دهیم.

چون هر بازه، زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی است می‌توانید از اجتماع و اشتراک بازه‌ها نیز صحبت کنید و گاهی ممکن است این اعمال مجموعه‌ای، مجدداً یک بازه ایجاد کند. همچنین می‌توانید در صورت لزوم از نماد $(-\infty\ ,\ +\infty)$ برای نمایش کل مجموعه اعداد حقیقی استفاده نمایید.

کار در کلاس ۵

۱ بازهٔ $[۱, +\infty)$ را روی محور نمایش دهید.

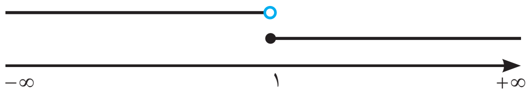
۲ بازهٔ $(-\infty, ۱)$ را روی محور نمایش دهید.

۳ اجتماع این دو بازه را روی محور نمایش دهید. اجتماع این دو بازه، چه مجموعه‌ای است؟

....

● **اهداف:** کسب مهارت نمایش هندسی بازه‌ها، بازنمایی‌ها (داخل ریاضی)

۱و۲)



۳)

$$(-\infty , ۱) \cup [۱ , +\infty) = (-\infty , +\infty) = \mathbb{R}$$

مسائل

مجموعه‌های زیر را با بازه نمایش دهید و روی محور مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳-؛

ب) مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۲؛

پ) مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۳- و ۵.

مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه

الف)

$$(-\infty , -۳) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -۳\}$$

ب)

$$[۲\ ,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \leq x\}$$

پ)

$$(-۳\ ,۵) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۳ < x < ۵\}$$

مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.
الف) $(۰\ ,۳)$
ب) $[-۱\ ,۵)$
پ) $(-۱\ ,۴]$

مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه

پ)

ب)

الف)

مجموعهٔ جواب نامعادله $۲x-۵>۱$ را با یک بازه نمایش دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات

$۲x - ۵ > ۱ \Rightarrow x > ۳ \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (۳\ ,+\infty)$

جدول زیر را کامل کنید.

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
			$\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x < ۲\}$
		$[۱ , ۴)$	
	۱		
مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲			

مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۰ و کوچک‌تر از ۲	۰ ۲	$[۰ , ۲)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x < ۲\}$
مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ و کوچک‌تر از ۴	۱ ۴	$[۱ , ۴)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \leq x < ۴\}$
مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱	۱	$[۱ , +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \leq x\}$
مجموعه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲	۲	$(-\infty , ۲]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq ۲\}$

بخش چهارم : نمادگذاری تابع‌ها

اهداف بخش

- آشنایی با نحوه نام‌گذاری تابع‌ها و دامنه آنها
- آشنایی با مفهوم مقدار تابع در یک نقطه و بیان جبری قانون تابع از طریق یک متغیر
- درک مفهوم دامنهٔ یک تابع به عنوان مجموعه مقادیر متغیر آن تابع
- درک تمایز بین مفهوم تابع و قانون تابع
- درک تفاوت تابع‌های با قانون یکسان و دامنه‌های مختلف

واژه‌های کلیدی: متغیر، دامنه تابع، مقدار تابع

نگاه کلی به بخش

پس از درک مفهوم تابع برای بررسی جزئیات این مفهوم، نیازمند نام‌گذاری اجزای مفهوم تابع هستیم تا بتوانیم با سهولت در مورد آنها صحبت کنیم. به همین دلیل شیوه نام‌گذاری خود تابع، دامنه آن و مقادیر تابع به کمک متغیرها مطرح شده‌اند. در این بخش برای داشتن یک تصویر ذهنی بهتر از ماهیت تابع، به‌طور غیرمستقیم به نمایش فلشی تابع در یک مثال خاص اشاره شده است. ولی کار با چنین نمایشی از اهداف کتاب نیست. دبیران در صورت نیاز می‌توانند برای کمک به درک مفهوم تابع به عنوان یک عملگر عمل‌کننده روی بعضی مقادیر و ایجاد مقادیری دیگر، از این نمایش استفاده کنند. این نمایش برای توصیف توابع دلخواه بسیار مفید است. از آنجا که در این کتاب فقط با توابع با متغیر عددی و مقادیر عددی سروکار خواهیم داشت، از این نمایش استفاده‌ای نکردیم.

اشتباه رایج:

در ادامه از طریق مکالمه بین هنرجو و هنرآموز به اشتباهی رایج در مفهوم تابع پرداخته‌ایم. در این اشتباه، هنرجویان برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه، به قانون تابع نگاه می‌کنند که آیا در آن نقطه معنا دارد یا خیر، درحالی‌که برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه باید به دامنه تابع توجه کرد که آیا آن نقطه در دامنه تابع می‌باشد یا خیر. این اشتباه ناشی از این بدفهمی‌است که تابع و قانون تابع یکسان گرفته می‌شوند در حالی که دامنه تابع نیز بخشی از مفهوم تابع است که مستقل از قانون تابع تعیین می‌شود.

در این بخش با ارائه مثال‌ها و مسئله‌ها و کار در کلاس‌های متنوع، سعی شده است اهمیت دامنه و شیوه‌های تعیین آن مشخص شود. در تعیین دامنه، نکته اصلی در آن است که آن تابع قرار است چه پدیده‌ای را توصیف کند. محدودیت‌هایی که

شرایط آن پدیده ایجاد می‌کند وضعیت دامنه تابع را مشخص می‌کند. البته ارائه تابع در جهان ریاضی هم انجام می‌شود که هیچ پدیده واقعی هم در کار نیست. در این حالت، این ارائه‌کننده تابع است که باید دامنه تابع را مشخص کند نه اینکه خودبه‌خود از روی قانون تابع، دامنه آن مشخص باشد.

ورود به مطلب

هدف اصلی این بخش نام‌گذاری توابع است و شیوه ورود به این‌گونه مباحث، یادآوری ضرورت نام‌گذاری برای سخن‌گفتن است؛ مثلاً اگر در مورد چند تابع بخواهیم صحبت کنیم باید نامی داشته باشند تا به آنها اشاره کنیم و برای آنکه بتوانیم در مورد تفاوت‌های این توابع صحبت کنیم باید جزئیات عملیاتی که با توابع انجام می‌دهیم را بتوانیم بیان کنیم.
درباره اهمیت توجه به دامنه توابع، می‌توانید از مثال‌های کتاب استفاده کنید یا مثال‌هایی شبیه آن را که متناسب هنرجویان کلاس باشد بیابید و مطرح کنید.

کار در کلاس

الف) تابع به‌دست آمده در مثال (۱) که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g بنامید و D_g را بنویسید. قانون تابع g چگونه نوشته می‌شود؟

ب) مقدارهای $g(۴۵)$ و $g(۱۸)$ را بیابید. آیا مقدار $g(۷۵)$ معنایی دارد؟ چرا؟

پ) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر متغیر این تابع را با u نشان دهیم، مجموعه‌ای که u در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ث) دو تابع قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) تابع به دست آمده در کار در کلاس (۱) که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند h نام‌گذاری کنید و D_h را بنویسید.

ب) مقدارهای $h(۵)$ و $h(۱۲)$ را بیابید. آیا مقدار $h(-۲۰۰)$ معنایی دارد؟ چرا؟

پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

ث) دو تابع قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اهداف: تقویت مهارت نام‌گذاری تابع و بیان قانون و دامنهٔ آن با استفاده از نمادهای ریاضی، کسب مهارت محاسبه مقدار تابع با استفاده از قانون تابع، حل مسئله (مدلسازی)، استدلال، مقایسه کردن، استنتاج، ارتباطات کلامی

۱ الف) x را میزان مصرف بنزین بر حسب لیتر در نظر می‌گیریم.

$$g(x) = (۶۰ - x)۱۲/۵ \qquad D_g = [۵ , ۶۰]$$

ب)

$$g(۴۵) = (۶۰ - ۴۵)۱۲/۵ = ۱۸۷/۵$$

$$g(۱۸) = (۶۰ - ۱۸)۱۲/۵ = ۵۲۵$$

خیر، $g(۷۵)$ معنی ندارد، زیرا ۷۵ در دامنه این تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود حجم بنزین موجود در باک خودرو است و یک خودرو که باک آن حداکثر ۶۰ لیتر گنجایش دارد نمی‌تواند ۷۵ لیتر بنزین در خود داشته باشد.

پ) مجموعه‌ای که متغیر یک تابع در آن تغییر می‌کند همان دامنه آن تابع است. اگر نام متغیر t باشد قانون این تابع به‌صورت $g(t) = (۶۰ - t)۱۲/۵$ نوشته می‌شود.

ت) اگر نام متغیر v باشد قانون این تابع به‌صورت $g(v) = (۶۰ - v)۱۲/۵$ نوشته می‌شود و مجموعه‌ای که v در آن تغییر می‌کند دامنه g است.

ث) تغییر نام متغیر تابع تأثیری در تابع ندارد و آن تابع را تغییر نمی‌دهد. اگرچه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود، ولی تابع عوض نمی‌شود.

۲ الف) $D_h = (۰ , ۱۰۰]$ و قانون تابع با متغیر t به‌صورت $h(t) = \frac{t^۲}{۱۶}$ است.

ب)

$$h(۵) = \frac{۵^۲}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} = ۱/۵۷$$

$$h(۱۲) = \frac{۱۲^۲}{۱۶} = ۹$$

خیر، $h(۲۰۰)$ معنی ندارد، زیرا ۲۰۰ در دامنه تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود طول مفتول بریده شده از یک مفتول ۱۰۰ سانتی‌متری است و نمی‌توان از چنین مفتولی، یک مفتول ۲۰۰سانتی‌متری برید.

پ) اگر نام متغیر تابع x باشد قانون تابع به‌صورت $h(x)=\frac{x^۲}{۱۶}$ نوشته می‌شود و x در دامنه تابع h تغییر می‌کند.

ت) در این حالت $D_k=(۰\ ,۱۰۰)$ و $k(z)=\frac{z^۲}{۱۶}$ و $z\in D_k$

ث) تغییر نام متغیر تابع تأثیری در تابع ندارد و آن تابع را تغییر نمی‌دهد. اگرچه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود ولی تابع عوض نمی‌شود.

مسائل

۶ جاهای خالی را برای تابع با قانون $f(x)=x^۲-x+۲$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ پر کنید.

x	$x^۲-x+۲$	$f(x)$
۲-	ــــ	$f(-۲)=$ــــ
۰	ــــ	ــــ
۲	ــــ	ــــ

مهارت‌ها و فرایندها:

- مهارت یافتن مقدار تابع به‌ازای مقادیر مختلف برای متغیر تابع، ارتباطات

x	$x^۲-x+۲$	$f(x)$
۲-	۸	$f(-۲)=۸$
۰	۲	$f(۰)=۲$
۲	۴	$f(۲)=۴$

۷ تابع g با قانون $g(x)=۴x^۲-۳x$ و دامنهٔ $D_g=[-۲,۳]$ را در نظر بگیرید. $g(-۲)$ و $g\left(-\frac{۴}{۳}\right)$ را محاسبه کنید. آیا $g(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- مهارت یافتن مقدار تابع به‌ازای مقادیر مختلف برای متغیر تابع، استدلال کردن،

$$g(-۲)=۴\times۴+۶=۲۲ \quad \text{و} \quad g(-\frac{۴}{۳})=۴\times\frac{۱۶}{۹}+۴=\frac{۱۰۰}{۹}$$

خیر، $g(۴)$ معنی ندارد، زیرا ۴ در دامنه این تابع نیست.

تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و قانون $f(x)=x^2-۴$ مفروض است. مقادیر خواسته شده را بیابید.

الف) $f(-۲)=$ ب) $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=$ پ) $f\left(\sqrt{۲}\right)=$

مهارت‌ها و فرایندها:

- مهارت پیدا کردن مقدار تابع

الف) $f(-۲)=۰$ و ب) $f(\frac{۱}{۲})=\frac{-۱۵}{۴}$ و پ) $f(\sqrt{۲})=-۲$

کرایه تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیهٔ تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر، ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را به‌دست آورید که کرایهٔ تاکسی را بر حسب مسافت طی شده بیان می‌کند. با توجه به آنکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند، دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. نامی برای این تابع و متغیر آن انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال‌کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات (زبان ریاضی)

فرض مسئله به معنای آن است که به ازای هر ۲ متر، ۱ تومان کرایه دریافت می‌شود. مسافت طی شده را برحسب متر و کرایه را برحسب تومان در نظر می‌گیریم. اگر متغیر این تابع را با x و خود تابع را با k نشان دهیم، x طول مسافت طی شده بر حسب متر خواهد بود و داریم:

$$k(x)=\frac{۱}{۲}x+۶۰۰ \qquad D_k=[۰\ ,۵۰۰۰۰۰]$$

اگر متغیر را با l و تابع را با f نشان دهیم، در این‌صورت داریم:

$$f(l)=\frac{۱}{۲}l+۶۰۰ \qquad D_f=[۰\ ,۵۰۰۰۰۰]$$

مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با l نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-۱)$ معنایی دارد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات

$g(l) = l(l + ۲)$ $\qquad$ $D_g = (۰ \,, +\infty)$

خیر $g(-۱)$ معنی ندارد، زیرا طول و عرض یک پاره‌خط نمی‌تواند منفی باشد.

سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با t و ارتفاع از سطح زمین را بر حسب متر اندازه‌گیری کنیم و با $f(t)$ نشان دهیم و لحظهٔ رها کردن سنگ، لحظهٔ صفر باشد، قانون این تابع به‌صورت $f(t) = -۵t^۲ + ۲۵$ است.

الف) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای $f(۱)$ و $f(۲)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

پ) آیا $f(۳)$ و $f(-۱)$ معنایی دارند؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات

الف) قانون این تابع تا زمانی اعتبار دارد که سنگ به زمین برسد و بعد از آن اعتبار ندارد. رسیدن سنگ به زمین در زمانی رخ می‌دهد که $f(t) = ۰$ و با حل معادله $f(t) = -۵t^۲ + ۲۵ = ۰$ دیده می‌شود که زمان رسیدن سنگ به زمین در لحظه $t = \sqrt{۵}$ است. پس $D_f = [۰ \,, \sqrt{۵}\,]$.

ب) $f(۱) = -۵(۱)^۲ + ۲۵ = ۲۰$ و $f(۲) = -۵(۲)^۲ + ۲۵ = ۵$؛ یعنی در پایان ۱ ثانیه، سنگ در ارتفاع ۲۰متری و در پایان ۲ ثانیه، سنگ در ارتفاع ۵ متری از زمین قرار دارد.

پ) هیچ معنایی ندارند، زیرا این اعداد در دامنه تابع نیستند و اگر به مفهومی‌که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم دیده می‌شود شروع حرکت از لحظه صفر به بعد است و قبل از صفر، چنین حرکتی وجود ندارد و همچنین در لحظه $\sqrt{۵}$ حرکت خاتمه می‌یابد و بعد از آن، قانونِ تابع اعتباری ندارد.

بخش پنجم: نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

اهداف بخش

- آشنایی با جدول تغییرات تابع
- آشنایی با نمودار تابع
- کسب مهارت در رسم جدول مقادیر تابع
- کسب مهارت در رسم نمودار تابع از روی جدول
- تشخیص رفتار تابع از روی جدول و نمودار
- درک رابطه بین نمودار تابع و جدول مقادیر تابع

نگاه کلی به بخش

در این بخش با طرح یک مسئله، هنرجو برای درک عمیق‌تری از تابع که ممکن است قانون یا فرمولی نداشته باشد، آماده می‌شود. همچنین، نمایش جدولی توابع نیز مطرح خواهند شد. در این قسمت همزمان دو هدف دنبال می‌شود که یکی درک و پذیرش توابعی که فرمول ندارند، است و دیگری دیدن نمایش جدول تغییرات یک تابع. در این بخش سعی شده که مثال‌های بیشتری در متن درس آورده شود.

از آنجا که رسم نمودار تابع‌ها کار آسانی نیست و هنرجویان هنوز مطالب کافی برای رسم نمودار تابع‌ها را فرا نگرفته‌اند، نرم افزار جئوجبرا می‌تواند به عنوان یک ابزار، هنرجویان را در رسم نمودار تابع‌ها یاری دهد.

ورود به مطلب

برای ورود به نمایش جدولی و نموداری توابع و اهمیت آن می‌توانید تابعی را مطرح کنید و سؤالاتی را در مورد دامنه و مقادیر تابع مطرح کنید. سپس با یافتن نقطه‌به‌نقطه مقادیر تابع و یادداشت این مقادیر در یک جدول، هم به سؤالات مطرح شده پاسخ دهید و هم غیرمستقیم جدول یک تابع را به دست آورده و آن را به‌عنوان نمایش جدولیِ تابع معرفی کنید. نمایش نموداری نیز مستقیماً از نمایش جدولی ساخته می‌شود که درک بصری و کاملی از مقادیر یک جدول به دست می‌دهد.

فعالیت ۲

عدد π تا ده رقم اعشار برابر است با:

$\pi \approx ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵$

برای $n=۱,۲,۳,...,۱۰$، اگر $f(n)$، رقم nام اعشاری π را نشان دهد، برای مثال داریم:

$f(۱)=۱ \quad , \quad f(۲)=۴$

۱ جاهای خالی را پر کنید.

$f(۸)=$ ...... $\quad f(۱۰)=$ ...... $\quad f(۹)=$ ...... $\quad f(۶)=$ ......

۲ دامنهٔ این تابع را با یک مجموعه نشان دهید.

۳ جدول زیر را با توجه به دامنه داده شده کامل کنید.

n	۱	۲
$f(n)$	۱	۴

اهداف موضوعی:

- آشنایی با نمایش‌های مختلف تابع (نمایش تابع به‌صورت جدول)

مهارت‌ها و فرایندها

- پیوندها و اتصال‌ها

۱

$f(۸)=۵$ و $f(۱۰)=۵$ و $f(۹)=۳$ و $f(۶)=۲$

۲

$\{۱,...,۱۰\}$

۳

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$f(n)$	۱	۴	۱	۵	۹	۲	۶	۵	۳	۵

مسائل

۱ هر یک از جدول‌های زیر نمایش یک تابع با دامنهٔ $\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$ می‌باشد. نمودار هریک را در صفحهٔ مختصات رسم کنید. در صورت امکان، قانون تابع را بنویسید.

الف)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۲	۰	۲	۴	۶

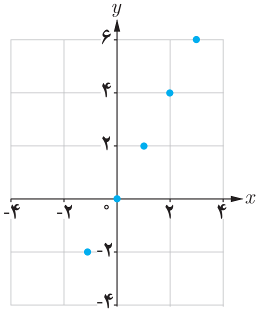
ب)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰	۱	۴	۹

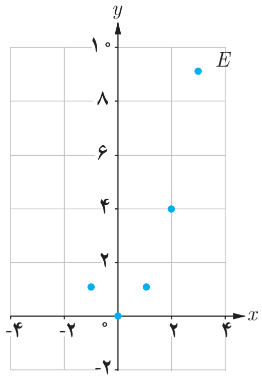
مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات

الف) $y = ۲x$



ب) $y(x^{۲})$



نمایش جدول تابع f با دامنهٔ $\{-۲, ۰, ۱, ۲, ۴\}$ به‌صورت زیر است:

x	-۲	۰	۱	۲	۴
$f(x)$	۰	۳	-۱	۳	۱

الف) مقادیر $f(۴)$، $f(۱)$ و $f(۰)$ را بیابید.

ب) نمودار f را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

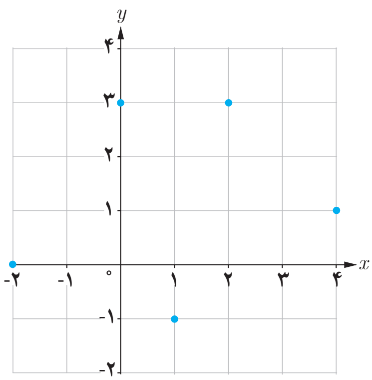
مهارت‌ها و فرایندها:

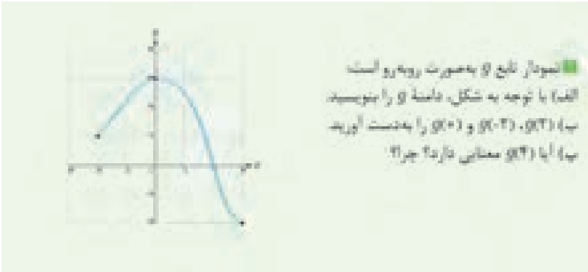
● بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات

الف)

$f(۰) = ۳$ و $f(۱) = -۱$ و $f(۴) = ۱$

ب)





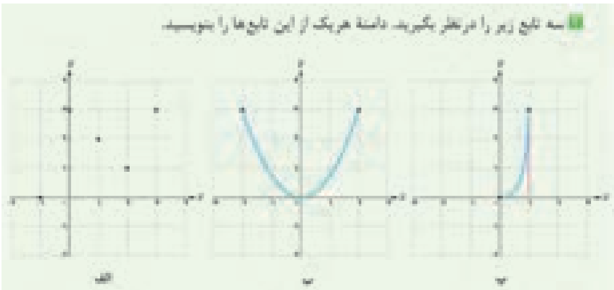
مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات، پرورش تفکر بصری

الف) [۳ , ۲-]

ب) $g(۲) = ۰$ و $g(۰) = ۳$ و $g(-۲) = ۱$

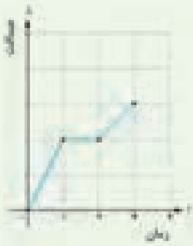
پ) $g(۴)$ معنایی ندارد، زیرا عدد ۴ در دامنه نیست.



مهارت‌ها و فرایندها:

● پرورش تفکر بصری، بازنمایی‌های چندگانه

الف) {۳, ۲ , ۱, ۰ , ۱-} و ب) [۲, ۲-] و ج) [۱, ۰]



وضعیتی از زندگی روزمره را بنویسید که نمودار زیر نشان‌دهندهٔ آن وضعیت باشد.

مهارت‌ها و فرایندها:

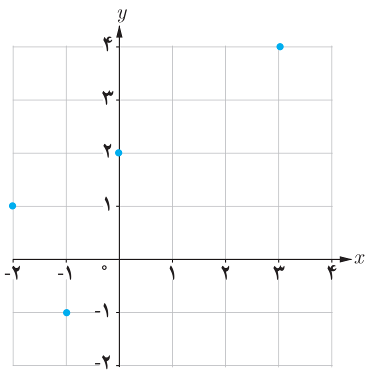
- بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، پرورش تفکر واگرا

برای مثال، می‌تواند وضعیت شخصی باشد که در ثانیه اول مسافتی به اندازه ۲ متر را طی می‌کند و در ثانیه دوم متوقف می‌شود و سپس در ثانیه سوم مسافتی به اندازه یک متر دیگر را طی می‌کند.

تابع g با دامنه $\{-۲, -۱, ۰, ۳\}$ را طوری رسم کنید که $g(-۲)=۱$ و $g(۰)=۲$.

مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری
- با تعیین دلخواه مقادیر $g(-۱)$ و $g(۳)$ توابع بسیاری را می‌توان مثال زد و برای نمونه یک تابع در زیر رسم شده که $g(-۱)$ و $g(۳)$ به ترتیب برابر ۱- و ۴ در نظر گرفته شده است:

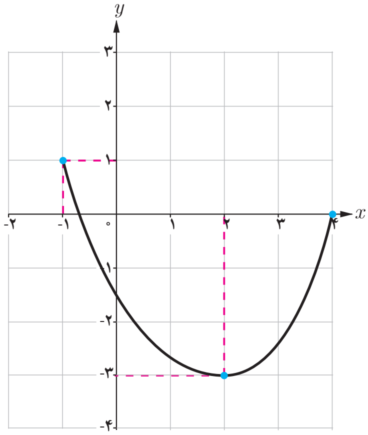


تابع دلخواه f با دامنهٔ $[-۱, ۴]$ را طوری رسم کنید که $f(-۱)=۱$ و $f(۲)=-۳$.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری

توابع بسیاری را می‌توان مثال زد. برای نمونه یک تابع در زیر رسم شده است:



تابع h با دامنهٔ $[۰, ۳]$ و قانون $h(x)=۳x^۲+a$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار a را طوری بیابید که $h(۱)=۲$.

ب) $h(۲)$ را بیابید.

پ) آیا $h(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن

الف) $۳ + a = ۲ \Rightarrow a = -۱$

ب) $h(۲) = ۱۲ - ۱ = ۱۱$

ج) $h(۴)$ معنایی ندارد، زیرا عدد ۴ در دامنه نیست.

تاریخ مفهوم تابع

تابع از اواخر قرن شانزدهم به دنیای ریاضی وارد شد. مفهوم تابع در تشخیص ارتباط بین مقادیر چند کمیت با هم است. تا زمانی که مسئله‌ای برای انسان پیش نیامده بود که حل آن، نیازمند شناخت ارتباط بین کمیت‌ها باشد، نیازی به مفهوم

تابع نبوده است. اولین مسائلی که نیازمند مفهوم تابع بود توسط گالیله مطرح شد که به مطالعه حرکت اجسام و سقوط آزد اجسام پرداخت. در این مسئله، یافتن ارتباط بین زمان و مکان اجسام مطرح بود که امروزه تابع حرکت جسم نام دارد. همچنین دکارت در اوایل قرن هفدهم با ساختن هندسه تحلیلی، برای توصیف خط‌ها و خم‌ها به ارتباط بین مؤلفه‌های طول و عرض نقاط این شکل‌ها رسید که بیان صریح آنها نیازمند مفهوم تابع بود.

ریاضی در طول تاریخ خود، همواره با فیزیک و مسائل مربوط به محیط پیرامونی همراه و عجین بوده است و تا شروع قرن بیستم هر ریاضی‌دانی مفاهیم ریاضی را در قالب مفاهیم فیزیکی یا هندسی دنیای پیرامون خود می‌دیده است. اولین جاهایی که مفهوم تابع رخ می‌دهد، ارتباط بین کمیت‌های متغیر فیزیکی است، به‌همین‌خاطر، نگاه اولیه به تابع به صورت ارتباط بین دو کمیت در حال تغییر است که متغیر اصلی را متغیر مستقل و کمیت وابسته به آن را متغیر تابع می‌نامند. در این نگاه، مفهوم تابع بسیار فیزیکی است و کمیتی در کار است که در حال تغییرکردن است و اصطلاح «متغیر» نیز از همین‌جا به وجود می‌آید.

رسیدن به مفهوم تابع به عنوان یک شیء مستقل و نام و نشان‌دار که هیچ پیشینه‌ای در ذهن کسی ندارد، کار آسانی نیست و ریاضیدان‌ها باید بسیار کار کنند تا به تعریفی درخور دست پیدا کنند. عملاً این فعالیت ریاضی‌دان‌ها از دوره لایب‌نیتس و نیوتون تا اوایل قرن بیستم که تعریف امروزین تابع به وجود آمد حدوداً سه و نیم قرن ادامه یافت. در این مدت هرکس برای خود تعریفی و برداشتی از تابع داشت و پس از پالایش‌های بسیار، ما امروز تعریف شسته و رُفته‌ای از تابع در اختیار داریم.

در زمان گالیله و دکارت، تنها اشیاء شناخته شده در ریاضی، اعداد و نقاط و خط و صفحه هندسی و اشیای ساخته شده از طریق آنها بوده‌اند. حتی چیزی به نام مجموعه اعداد به عنوان یک شیء ریاضی مورد قبول نبود. روابط و اعمال بین اعداد، در بیان خواص و گزاره‌ها به کار می‌رفت ولی به عنوان شیء مستقل دیده نمی‌شدند؛ مثلاً ما اشیای فیزیکی اطراف خود را به عنوان شیء به رسمیت می‌شناسیم ولی رابطه بالا یا پایین بودن دو شیء نسبت به یکدیگر را به عنوان یک شیی نمی‌شناسیم. تابع نیز از جنس رابطه است ولی نه رابطه‌ای بین دو عدد خاص بلکه رابطه‌ای بین دسته‌ای از اعداد با دسته‌ای از اعداد دیگر. چنین موجودی در آن زمان وجود نداشت و باید به طریقی به وجود می‌آمد.

در مورد برخی توابع خاص که در عمل با آنها برخورد می‌شد، قانونی که ارتباط بین دو کمیت را برقرار می‌ساخت وجود داشت و در تعریف اولیه از تابع، ریاضی‌دان‌ها می‌توانستند برای شناسایی تابع به همین قانون که با یک عبارت جبری و تحلیلی بیان می‌شد، اشاره کنند. چنین برداشتی از تابع را اولر در سال ۱۷۴۸ میلادی در یکی از کتاب‌هایش به این صورت ارائه کرد:

«یک تابع از یک متغیر، فرمولی جبری و تحلیلی است که از طریق اَعمال محاسباتی دل‌بخواهانه‌ای روی متغیر و اعداد، تشکیل شده است.»

توابعی که به این شکل به وجود می‌آیند را می‌توانیم توابع اولری بنامیم. اگرچه توابع اولری، همه توابعی را که ما می‌شناسیم دربرنمی‌گیرند ولی برای رفع نیاز به تابع در آن زمان کافی بوده‌اند. با کار روی توابع، این مفهوم توانست به عنوان یک شیء مستقل و با نام و نشان ریاضی، هویت بیابد و پذیرفته شد که در مورد توابع، همانند اعداد می‌توان صحبت کرد و خواص آنها را مورد مطالعه قرار داد، به ویژه مفاهیم پیوستگی و مشتق‌پذیری در مورد آنها قابل طرح است.

در برخورد با مسائل دیگری که در آنها خود تابع به عنوان مجهول مطرح می‌شود، نیاز به توابعی احساس شد که ممکن بود تابع اولری نباشند؛ مثلاً دالامبر در ۱۷۴۶ شکل یک تار مرتعش که نمودار یک تابع است را مورد مطالعه قرار داد و نتیجه گرفت شکل تار مرتعش وابسته به شکل اولیه آن است. آیا شکل اولیه یک تار حتماً به‌صورت نمودار یک تابع اولری است؟ دالامبر خودش معتقد بود که شکل اولیه تار باید به صورت نمودار یک تابع با عبارت تحلیلی باشد، ولی اولر با این نظر مخالفت کرد و نهایتاً در ۱۷۵۵ تعریف خود از تابع را کلیت داد و در کتاب دیگر خود تابع را به صورت زیر تعریف کرد:

«اگر کمیتی به گونه‌ای وابسته به یک کمیت دیگر باشد، که تغییر کمیت دوم موجب تغییری در کمیت اول شود، کمیت اول را تابعی از کمیت دوم می‌نامیم. این تعریف در کلی‌ترین حالت قابل به‌کار بردن است و شامل هر طریقی که مقدارهای کمیت دوم بر حسب مقدارهای کمیت اول مشخص شوند، می‌شود. بنابراین، اگر x مقدار کمیت متغیر را نشان دهد، هر کمیت دیگری که به هر شکلی توسط آن تعیین شود تابعی از x نامیده می‌شود.»

در این زمان تابع هویت مستقل خود را در افکار اکثر ریاضی‌دان‌ها یافته بود و نیازی نبود تا برای اشاره به آن حتماً عبارتی تحلیلی در کار باشد تا به وجود تابع اطمینان پیدا کنند و وجود رابطه‌ای تعیین‌کننده با هر نوع ماهیتی، برای قبول وجود یک تابع کافی بود. البته توافق همگانی نسبت به مفهوم تابع به سادگی قابل حصول نبود و هر ریاضی‌دانی نظر گاه خاص خود را داشت، زیرا توابع به شکل‌های گوناگونی در مسائل ظاهر می‌شدند و رویه واحدی برای برخورد با توابع وجود نداشت و هنوز معلوم نبود چه نگاهی به تابع ارزشمند و مناسب است.

یکی از تغییراتی که در مفهوم تابع رخ داد، آزادشدن آن از ارتباط بین تغییرات کمیت‌های فیزیکی است. تعریف فوریه از تابع به گونه‌ای است که به تغییرات یک متغیر به عنوان مقادیر عددی معمولی نگاه می‌کند که متغیر می‌تواند اختیار کند و مقدارهای تابع نیز مقادیر عددی هستند که به ازای مقدارهای در نظرگرفته شده برای متغیر با روشی معین که لزوماً تحت قانون ثابتی هم نیستند، به دست

می‌آیند. در این نگاه لزومی ندارد که برای درک تابع، به مفاهیم فیزیکی و تغییراتی که در زمان رخ می‌دهند متوسل شویم و همان روش برای تعیین یک عدد از طریق یک عدد دیگر، تابع را مشخص می‌کند. دیریکله با کامل کردن کارهای فوریه در یافتن شرایط هم‌گرایی سری‌های فوریه با تبعیت از فوریه تعریف تابع را در سال ۱۸۳۷ به شکل زیر ارائه می‌کند:

«y تابعی از x است ، هرگاه طبق قانونی به ازای هر مقدار x، مقدار منحصر به‌فردی برای y نظیر شود.»

در آن زمان این تعریف بسیار کلی به نظر می‌آمد و ضرورت چنین تعریفی روشن نبود. این سؤال مطرح بود که آیا آنالیز و حسابان نیازی به این‌گونه توابع که معلوم نیست قانون آنها چگونه ساخته شده است، دارد؟ با رشد ریاضی و ایجاد شاخه آنالیز و پیدایش نظریه مجموعه‌ها و واردشدن مسائل پیچیده‌تر، نیاز به تعمیم مفاهیم، موجب پیدایش فضاهای کلی‌تر مانند فضاهای متریک و توپولوژیک شد. بحث توابع روی این فضاها نشان داد، دامنه و بُرد توابع نقشی اساسی در خواص توابع، بازی می‌کنند. در تعمیم تعریف تابع، کاراتئودری در ۱۹۱۷، مجموعه‌های غیرعددی را نیز به عنوان دامنه تابع معرفی کرد و نهایتاً بورباکی در ۱۹۳۹ تعریف تابع را به عنوان قانون نظیرسازی از اعضای یک مجموعه به مجموعه دیگر عرضه کرد که نهایتاً زیرمجموعه‌ای از مجموعه حاصل‌ضرب را می‌سازد. این، تعریف رسمی تابع در ریاضیات امروزین است.

تعریف امروزین تابع در ریاضیات دانشگاهی بسیار مختصر، مفید و منطقی است و براساس مجموعه‌ها انجام می‌شود. ولی این تعریف مختصر و منطقی برای شروع آموزش تابع مفید نیست، زیرا بر اساس دانش قبلی هنرآموز بنا نمی‌شود و مفهوم واقعی تابع را که ارتباط بین دو کمیت است به خوبی نشان نمی‌دهد. آموزش صحیح یک مفهوم معمولاً از طریق تعریف منطقی صورت نمی‌گیرد و روش‌های مفهوم‌سازی باید به کار گرفته شوند. به همین علت در این کتاب هیچ‌گونه بحثی از تعریف منطقی تابع به صورت مجموعه زوج مرتبی دیده نمی‌شود.

پس از تبحر روی مفهوم تابع‌های با متغیر عددی و مقادیر عددی می‌توان از تابع‌های با دامنه‌های دیگر هم صحبت کرد. مثلاً تابع‌های با دامنه گسسته از انسان‌ها یا سیارات یا چیزهایی دیگر که در ارتباط با زندگی روزمره هم باشد و فایده‌ای در تعریف آنها دیده شود. گسترش مفهوم تابع بستگی به نیاز هنرجویان دارد که نهایتاً در کجاها با چه نوع تابع‌هایی روبه‌رو شوند.