

توابع پلکانی و قدر مطلق

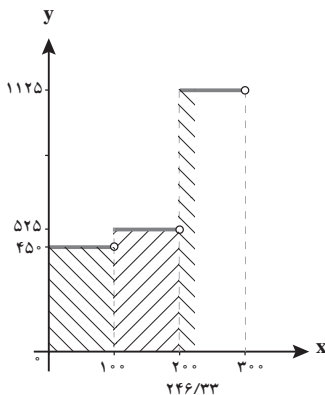
درس دوم

اهداف درس دوم

- ۱ معرفی تابع پلکانی و شناخت آن در مسائل واقعی؛
- ۲ مفهوم سطح زیر نمودار یک تابع با توجه به متغیر مستقل و وابسته؛
- ۳ معرفی تابع جزء صحیح و رسم آن؛
- ۴ معرفی تابع قدر مطلق و کاربرد آن برای توصیف و تحلیل دقیق و علمی مسائل پیرامون؛
- ۵ تبدیل تابع قدر مطلق به دو ضابطه و برعکس؛
- ۶ مدل سازی مسائل واقعی به کمک تابع پلکانی و تابع قدر مطلق؛
- ۷ رسم نمودار توابع قدر مطلق.

روش تدریس

برای معرفی تابع پلکانی، از مسئله قبض برق استفاده شده و جدول مربوط به آن، یک نمونه واقعی از قبض برق را



نشان می دهد. در فعالیت صفحه ۳۵، به کمک نمودار پلکانی رسم شده، هزینه برق مصرفی یک خانه خواسته شده است. قسمت ۱، هزینه ۱۰۰ کیلووات برابر $450 = 100 \times 450$ است و قسمت ۲، مساحت قسمت هاشور خورده، بیانگر هزینه مصرف ۱۰۰ تا ۲۰۰ کیلووات ساعت است. قسمت ۳، با توجه به مساحت هاشور خورده نمودار زیر، هزینه کل برق مصرفی خانه برابر $100 \times 450 + 100 \times 525 + 46/23 \times 1125 = 14950/75$ است.

هدف از طرح این مسئله، مهارت یافتن دانش آموزان در

محاسبه مسائل واقعی (مانند محاسبه هزینه برق خانه در یک ماه) است و اینکه نمودار هزینه برق مصرفی خانه در سی روز به صورت پلکانی است.

سؤال ۱ «کار در کلاس» صفحه ۳۶ یک مدل ریاضی برحسب تعداد روزها در ماه‌های سال است که یک تابع دوازده ضابطه‌ای است. حل سؤال ۲ قدمی در جهت درک مدل‌سازی مسائل واقعی محیط پیرامون به کمک علم ریاضی است و هدف از آن نیز مهارت یافتن دانش‌آموزان در تشخیص نوع نمودار تابع در توصیف یک پدیده واقعی است. نمودار تابع اول، مربوط به چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالتی است. محور x ها بیانگر زمان و محور y ها بیانگر تعداد رنگ چراغ راهنمایی است. در صورت مسئله چراغ سه حالتی، به هر کدام از حالت‌ها یک عدد نسبت می‌دهیم. بدیهی است که عدد نسبت داده شده اهمیتی ندارد و نکته مهم، نسبت دادن سه حالت قرمز، زرد و سبز به سه عدد حقیقی است. نمودار تابع دوم، مربوط به ساعت شنی است. وقتی شن با سرعت ثابت در درون مخروط می‌ریزد، حجم شن در هر دقیقه اضافه می‌شود. واضح است که حجم شن درون مخروط، تابع خطی برحسب زمان است. نمودار تابع سوم، مربوط به پرندۀ داخل ساعت است؛ پرندۀ ای که فقط رأس هر ساعت بیرون می‌آید و در بقیه زمان‌ها، درون ساعت است. ذکر این نکته مهم است که در این تمرین، علاوه بر توجه به مفهوم محور x ها در هر حالت، باید به مفهوم برد تابع، یعنی مجموعه مقادیری که y اختیار می‌کند توجه کنیم. دقت به خروجی هریک از مثال‌های مطرح شده، با توجه به توضیحات سمت راست در کنار هر شکل، مشخص می‌کند که مثلاً در شکل دوم، تنها دو حالت برای پرندۀ وجود دارد: درون ساعت و بیرون ساعت؛ یعنی برد تابع، تنها شامل دو عدد حقیقی است. در مثال چراغ راهنمایی و رانندگی نیز، با گذر زمان یعنی دامنه، رنگ چراغ، یعنی برد، سه حالت دارد: سبز، زرد و قرمز که می‌تواند با سه عدد حقیقی مشخص شود؛ بنابراین، در این حالت گزینه‌ای صحیح است که برد تابع آن شامل سه جواب باشد. با همین روش، یعنی توجه به جواب تابع، نمودار تابع مربوط به ساعت شنی نیز مشخص می‌شود. به‌طور خلاصه یکی از اهداف مهم این تمرین، بررسی مفهوم برد تابع و نقش آن در تفسیر نمودار تابع است.

برای آشنایی دانش‌آموزان با تابع جزء صحیح، فعالیتی مطرح شده است تا دانش‌آموزان، با تعیین مکان عدد بر روی نمودار، به درک بهتری از مفهوم جزء صحیح برسند.

در «فعالیت ۱» صفحه ۴۰ کتاب برای آشنایی دانش‌آموزان با تابع قدرمطلق، مسئله‌ای در مورد وزن استاندارد مطرح و نمودار آن با توجه به مفهوم مسئله، رسم شده است. با نتیجه‌گیری از آن و تفسیر جواب، به تعریف تابع قدرمطلق می‌رسیم. در صفحه ۴۱ «فعالیت ۲» مسئله، مربوط به افتتاح یک پل روی رودخانه سیمینه‌رود در استان آذربایجان غربی است. یکی از اهداف طرح این مسئله، بیان اهمیت محیط زیست کشور است. همچنین تصویر زمینه شروع فصل تابع، مرتبط با همین مسئله انتخاب شده است. در قسمت الف،

نمودار تابع جریمه برحسب زمان به صورت نقطه ای رسم می شود؛ زیرا در مسئله ذکر شده، تحویل این پروژه به ماه تحویل بستگی دارد، نه به روز. قسمت ب، با توجه به نمودار، ضابطه تابع $f(n) = |n - 4|$ ، $n \in N$ است. در قسمت ج، اگر پیمانکار، چهار میلیون جریمه پرداخت کند، پروژه در ماه های آبان ۹۵ یا اسفند ۹۴ پایان می یابد؛ چون چهار ماه اختلاف با زمان تحویل پروژه دارند. پاسخ این پرسش به کمک نمودار داده شده و ضابطه تابع قدرمطلق به دست آمده، برای ماه آبان ۹۵، $f(8) = |8 - 4| = 4$ و برای ماه اسفند ۹۴، $f(0) = |0 - 4| = 4$ است.

در «کار در کلاس» همین صفحه، مشخصه محور x ها در نمودار تابع برحسب زمان تحویل است؛ یعنی در این سؤال تحویل پروژه به روز هم، بستگی دارد. در قسمت الف، اگر پروژه در ماه دوم تحویل داده شود، پیمانکار جریمه نمی شود، ولی به ازای هر زمان اختلاف با زمان تحویل پروژه، جریمه ای پرداخت می کند. در قسمت ب، ضابطه هر خط خواسته شده است. دانش آموزان براساس نمودار تابع، برای هر خط، دو نقطه انتخاب کرده، سپس شیب خط را حساب می کنند و معادله خط را می نویسند که به صورت $y = 2x - 4$ ، $x \geq 2$ و $y = -2x + 4$ ، $x < 2$ می نویسند. در قسمت ج، به کمک تعریف تابع قدرمطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه به صورت $f(x) = |2x - 4|$ می نویسند. در قسمت د، شیب خط مثبت باشد، یعنی تأخیر در زمان تحویل پروژه و شیب خط منفی باشد، یعنی تحویل زودتر از موعد مقرر انجام شده است، که هر دو حالت موجب خسارت به صاحب کار (وزارت راه) است.

حل مسئله صفحه ۴۲ کتاب، در مورد نحوه رسم تابع قدرمطلق با توجه به تعریف قدرمطلق است. دانش آموزان پایه نهم با این تعریف آشنایی دارند. دانش آموزان ابتدا ضابطه تابع قدر مطلق را با توجه به تعریف قدر مطلق، به صورت تابع دوضابطه ای، می نویسند. سپس هر خط را براساس محدوده ای که دارد. رسم می کنند و به این طریق، نمودار تابع قدر مطلق رسم می شود در همین صفحه، هدف «کار در کلاس»، آموزش روش انتقال برای رسم نمودار قدرمطلق است. در قسمت الف، دانش آموز، نمودار تابع $y = |x - 4|$ را با کمک تعریف قدر مطلق رسم می کند. در قسمت ب، مختصات قسمت الف، نمودار تابع $y = |x|$ رسم می شود. در قسمت ج، از دانش آموزان خواسته شده تا نتیجه گیری خود را تشریح کنند. هدف از این سؤال، این است که دانش آموزان، برای رسم نمودار تابع، مراحل را طی کرده و سپس خودشان روش انتقال برای رسم نمودار تابع را نتیجه بگیرند و به درک بهتری برسند. برای قسمت د، دانش آموزان می توانند به کمک روش انتقال، نمودار را رسم کنند. برای قسمت ه نیز پیشنهاد می شود مثل مراحل رسم نمودار قسمت الف عمل شود تا دانش آموزان بعد از رسم نمودار، نحوه انتقال نمودار تابع $y = |x|$ را با توجه به ضابطه تابع داده شده به خوبی درک کنند.

توصیه آموزشی

هدف کتاب این است که نمودار تابع‌های قدرمطلق که به فرم $y = |x| + k$ و $y = |x - h|$ هستند، به کمک روش انتقال رسم شوند. همان‌طور که می‌دانید، برای رسم تابع قدرمطلق به فرم $y = |x| + k$ کافی است نمودار تابع به اندازه k واحد در راستای عمودی جابه‌جا شود. اگر $k > 0$ ، انتقال نمودار به سمت بالا و اگر $k < 0$ ، انتقال نمودار به سمت پایین است و برای رسم تابع قدرمطلق به فرم $y = |x - h|$ کافی است نمودار تابع به اندازه h واحد در راستای افقی جابه‌جا شود. اگر $h > 0$ ، انتقال نمودار به سمت راست و اگر $h < 0$ ، انتقال نمودار به سمت چپ است.

برای رسم نمودار تابع‌های قدرمطلق به فرم $y = |ax + b|$ ، بهتر است آموزش از روش حل مسئله در صفحه ۴۲ کتاب، که کمک گرفتن از تعریف قدرمطلق می‌باشد، انجام گیرد. در این مبحث نمی‌خواهیم وارد قوانین قدر مطلق و جزء صحیح شویم. هدف درس تنها آشنایی با مفهوم این توابع است.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

□ ممکن است برخی دانش‌آموزان، برای پیدا کردن جزء صحیح اعداد اعشاری منفی، بدون استفاده از محور اعداد، با مشکل مواجه شوند؛ یعنی عدد اعشاری منفی را میان دو عدد صحیح، متوالی، ولی جابه‌جا در نظر می‌گیرند؛ مثلاً برای پیدا کردن جزء صحیح عدد $-3/2$ ، این عدد را بین اعداد -3 و -4 تصور می‌کنند، ولی به مکان این اعداد روی محور اعداد توجه نکرده، مقدار جزء صحیح را -3 می‌نویسند.

□ ممکن است برای رسم نمودار تابع قدرمطلق از روش انتقال، جابه‌جایی نمودار در راستای افقی یا عمودی را اشتباه کنند.

اعمال بر روی توابع

درس سوم

اهداف درس سوم

- ۱ آشنایی با تعیین دامنه در اعمال میان توابع؛
- ۲ آشنایی با اعمال میان توابع به کمک ضابطه توابع؛
- ۳ آشنایی با اعمال میان توابع به کمک زوج مرتب‌ها و رسم نمودار آنها؛
- ۴ نگاه علمی به حل یک مسئله در خانواده و اجتماع.

روش تدریس

این درس با فعالیتی شروع شده که دانش‌آموزان با حل آن، به راحتی مفهوم جمع دو تابع را، با توجه به دامنه اشتراکشان، درک خواهند کرد. هدف، درک معنادار مفهوم جمع دو تابع در مسائل واقعی است. در قسمت الف سؤال ۱ «کار در کلاس» صفحه ۴۷ کتاب، دانش‌آموزان ابتدا نمایش پیکانی را با توجه به جدول‌هایی که در فعالیت داده شده، نشان می‌دهند. در قسمت ب، به اشتراک سبک فیلم موردعلاقه هریک تأکید شده و هدف آن توجه دادن دانش‌آموزان به دامنه دو تابع، قبل از انجام عمل جمع میان آنهاست و پاسخ آن، تابع $\{(18000 \text{ و علمی} - \text{تخیلی}) \text{ و } (18000 \text{ و اجتماعی})\}$ است. در قسمت ج چون در روز دوشنبه، علیرضا و مادرش به دیدن یک فیلم می‌روند، پس هزینه ۱۸۰۰۰ تومان است.

در قسمت الف از سؤال ۲، نمایش زوج مرتبی همه اعضای خانواده، به صورت زیر است:

$\{(30000 \text{ و اجتماعی}) \text{ و } (30000 \text{ و تاریخی}) \text{ و } (30000 \text{ و دفاع مقدس})\}$ = پدر علیرضا

$\{(30000 \text{ و تاریخی}) \text{ و } (30000 \text{ و دفاع مقدس}) \text{ و } (30000 \text{ و کمدی})\}$ = مادر علیرضا

$\{(24000 \text{ و تاریخی})\}$ = علیرضا

$\{(15000 \text{ و تاریخی}) \text{ و } (15000 \text{ و کمدی})\}$ = مریم

در قسمت ب، میزان هزینه علیرضا در این روز، برابر ۹۹۰۰۰ تومان است. هدف، ابتدا پیدا کردن

اشتراک دامنه‌ها است. در اینجا اشتراک علاقه همه اعضای خانواده، تئاتر سبک تاریخی است، و سپس جمع هزینه‌های بلیت هر چهار نفر برای تماشای تئاتر سبک تاریخی است.

در صفحه ۴۸ کتاب، با مطرح کردن پرسشی، از دانش‌آموزان خواسته شده تا یافته‌های خود از انجام فعالیت در مورد چگونگی شرایط جمع دو تابع را بنویسند. هدف، کسب مهارت دانش‌آموزان در توصیف و تجزیه و تحلیل است. سپس از نتیجه‌ای که از انجام فعالیت گرفته شده، به مفهوم جمع دو تابع می‌رسند. مثالی نیز از دو تابع به فرم زوج مرتبی آورده شده تا دانش‌آموزان با حل آن، مفهوم جمع دو تابع را بهتر درک کنند.

در صفحه ۴۹ کتاب، فعالیتی مطرح شده تا دانش‌آموزان با انجام آن، با اعمال تفریق، ضرب و تقسیم میان تابع نیز آشنا شوند. دو تابع به فرم ضابطه‌ای داده شده و دانش‌آموزان اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را انجام می‌دهند، سپس مقادیر توابع حاصل را به ازای $x=2$ که نماد وزنه‌های کفه‌های ترازو هستند، به دست می‌آورند. دلیل برابری دو کفه ترازو این است که مجموع وزنه‌های هر دو کفه ترازو ۱۷ است. با مقایسه وزنه‌های دو کفه ترازو، نتیجه‌ای که از این پاسخ می‌گیریم این است که:

$$f_6 = f_1 \times f_2 = 9 \quad \text{و} \quad |f_4| = |f_1 - f_2| = 0 \quad \text{و} \quad f_v = \frac{f_1}{f_2} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{f_2}{f_1} = f_8 = 1 \quad \text{و} \quad f_1 + f_2 = f_3 = 6 \quad \text{و}$$

$$|f_2 - f_1| = |f_5| = 0$$

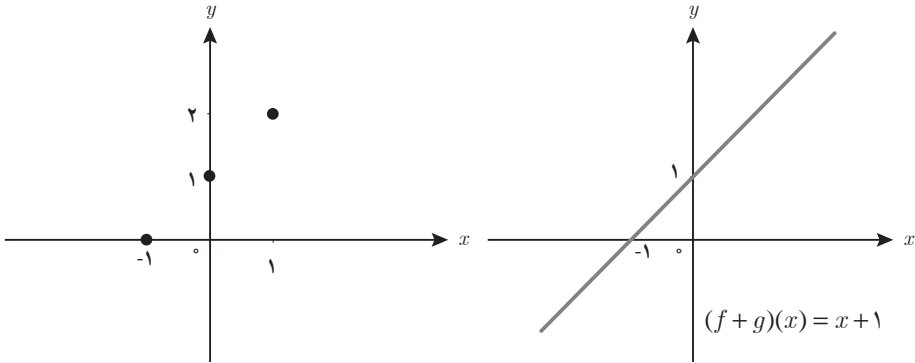
در سؤال ۱ «کار در کلاس» صفحه ۵۰ کتاب، دو تابع به صورت ضابطه‌ای آورده شده و دانش‌آموزان به ازای $x=2$ ، مقادیر توابع در شکل نمودار درختی را حساب می‌کنند. هدف از طرح سؤال به این شکل، ایجاد افزایش علاقه برای دانش‌آموزان در انجام محاسبات است. در سؤال ۲، دو تابع به فرم زوج مرتبی داده شده و چهار عمل اصلی میان این دو تابع خواسته شده است. جواب‌ها به صورت زیر است:

$$f + g = \{(2, 5), (-1, 5)\}, \quad f \times g = \{(2, 0), (-1, 6)\}, \quad \frac{g}{f} = \left\{ \left(-1, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(2, 0\right), \left(-1, \frac{3}{2}\right) \right\}, \quad f - g = \{(2, -5), (-1, 1)\}, \quad g - f = \{(2, 5), (-1, -1)\}$$

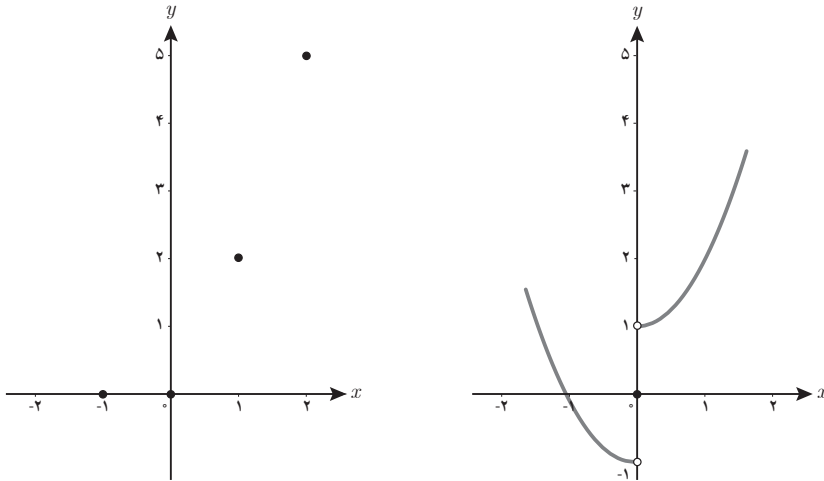
در فعالیت صفحه ۵۱ کتاب، نمودار دو تابع و ضابطه‌های آنها داده شده است. دانش‌آموزان، نمودار مجموع دو تابع را ابتدا به کمک نقاطی که معین شده و سپس به کمک ضابطه مجموع دو تابع، رسم می‌کنند. هدف، مهارت در رسم نمودار مجموع دو تابع است. دانش‌آموزان با رسم نمودار مجموع دو تابع، با استفاده از نقاط داده شده می‌توانند نمودار کلی مجموع دو تابع را حدس بزنند و نیز تأیید دامنه در رسم نمودار تابع را به خوبی درک کنند.

قسمت اول :



- $x = -1 \rightarrow y = 0$
- $x = 0 \rightarrow y = 1$
- $x = 1 \rightarrow y = 2$

قسمت دوم :



- $x = -1 \rightarrow y = 0$
- $x = 0 \rightarrow y = 0$
- $x = 1 \rightarrow y = 2$
- $x = 2 \rightarrow y = 5$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ x & x = 0 \\ x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

توصیه آموزشی

آموزش روش حل مسئله به صورت مستقیم معنا ندارد و اثربخش نیست. پیشنهاد می‌شود معلمان، با راهنمایی‌های غیرمستقیم، دانش‌آموزان را متوجه استراتژی‌های حل مسئله کنند و با دقت و مهارت، بر فرایند قبل، ضمن و بعد از حل مسئله، نظارت داشته باشند. رویارویی دانش‌آموزان با مسئله از طریق تعامل و همفکری با معلم و هم‌کلاسی‌های خود، بعضی جنبه‌های حل مسئله را پرورش می‌دهد. در این درس، دامنه بعضی از توابع به صورت نامساوی داده شده است. همان طور که می‌دانید دانش‌آموزان در پایه نهم، با نمایش نامساوی‌ها روی محور اعداد آشنا شدند. برای پیدا کردن دامنه اشتراک توابع، کافی است روی محور اعداد، هریک از نامساوی‌ها را نشان داده و سپس ناحیه اشتراک را مشخص کنند.

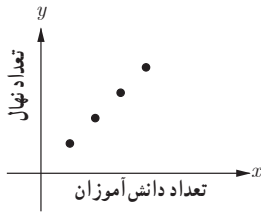
اشتباهات رایج دانش‌آموزان

- برخی اشتباهات رایج دانش‌آموزان، در مبحث اعمال میان توابع، توجه نکردن به دامنه اشتراک آنها است.
- ممکن است برخی دانش‌آموزان، در رسم نمودار تابع دقت نکنند و نقطه‌ای که متعلق به دامنه توابع نیست را توخالی بگذارند.

حل تمرینات برگزیده درس اول (صفحه ۳۱ کتاب)

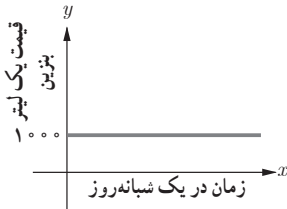
۱ با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هریک از توضیحات زیر کدام یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

الف) به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد.



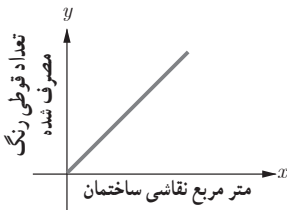
$$f(x) = x, \quad x \in \mathbb{N}$$

ب) هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است.



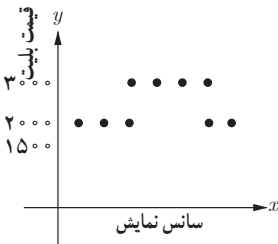
$$f(x) = 1000, \quad x \geq 0$$

ج) برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان، یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود.



$$f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

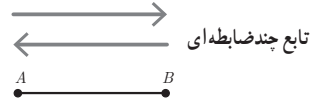
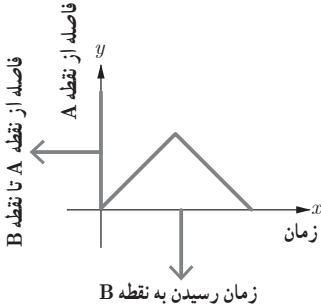
د) بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.



تابع چندضابطه‌ای

$$f(x) = \begin{cases} 2000 & x = 1, 2, 3 \\ 3000 & x = 4, 5, 6, 7 \\ 1500 & x = 8, 9 \end{cases}$$

ه) دونده‌ای، کنار یک زمین فوتبالی، با سرعت ثابت از نقطه A تا نقطه B شروع به دویدن می‌کند و دوباره به نقطه A برمی‌گردد.



۲) کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

الف) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.

نادرست است. مثلاً تابع $f = \{(1, 2), (2, 1)\}$ همانی نیست.

ب) اگر دامنه یک تابع همانی، مجموعه اعداد حقیقی باشد، آنگاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.

$$\begin{cases} f(x) = x \\ f(-x) = -x \end{cases} \rightarrow f(x) + f(-x) = x + (-x) = 0 \text{ زیرا درست است؛}$$

ج) اگر f یک تابع ثابت باشد، آنگاه $f(kx) = kf(x)$.

نادرست است؛ زیرا $f(kx) = c \rightarrow f(x) = c$ تابع ثابت

۸) در هر یک از زوج مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز

ناحیه اول و سوم باشد.

$$(2, n^2 - 3n + 4)$$

$$n^2 - 3n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-1) = 0 \rightarrow n = 2, n = 1$$

$$(-1, n^2 - 4n + 2)$$

$$n^2 - 4n + 2 = -1 \rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \rightarrow (n-3)(n-1) = 0 \rightarrow n = 3, n = 1$$

۹) اگر f یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و $n \in \mathbb{N}$ و m باشد، مقدار $m+t$ را به دست آورید.

$$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\}$$

$$t = 3$$

$$n^2 - 2n = 3 \rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \rightarrow (n-3)(n+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -1 \notin \mathbb{N} \end{cases} \times$$

$$n = 3, t = 3 \rightarrow f = \{(-1, 3), (m-4, 3), (m+3, 3)\}$$

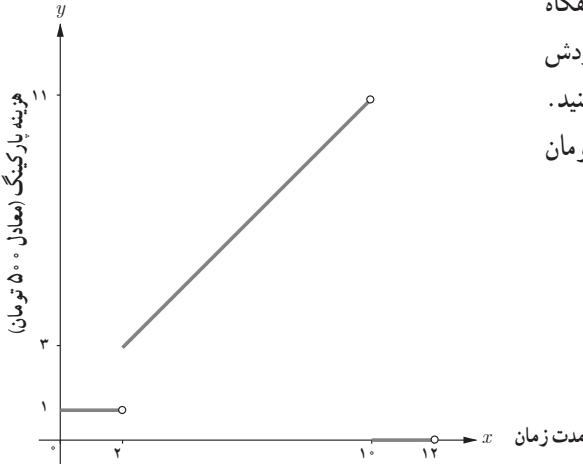
چون دامنه دوعضوی است، پس دو زوج مرتب باهم برابرند.

$$\begin{cases} m+3=-1 \rightarrow m=-4 \notin N \times \\ m-4=-1 \rightarrow m=3 \end{cases} \rightarrow m+t=3+3=6$$

۱۳ اگر هزینه توقفگاه در روز جمعه، بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت

۸ صبح از تابع

$$C(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$



پیروی کند، بارسم نمودار تابع، هزینه توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور y ها معادل 500 تومان است).

همان طور که در صورت سؤال دو بار تأکید شده است، هدف سؤال، جوابگویی براساس رسم نمودار است و نه درگیر کردن دانش آموزان با محاسبات ریاضی آن. پس از رسم نمودار تابع سه ضابطه ای و با توجه به ورود هر خودرو بعد از ساعت $8:00$ صبح، به دلیل آنکه متغیر x بیانگر مدت زمان سپری شده پس از بازگشایی فروشگاه است و نه زمان ورود خودرو، رابطه زیر را داریم:

$$8:00 \text{ صبح} - \text{ساعت ورود خودرو به پارکینگ فروشگاه} = x$$

مثلاً اگر خودرویی ساعت $11:00$ وارد فروشگاه شود، در این حالت $x=3$ در نظر گرفته می شود که به کمک نمودار، عرض آن بر روی محور y ها مشخص می شود. البته به کمک صفحه شطرنجی نیز مقدار عرض نقطه برابر 4 به دست می آید که چون هر واحد هزینه 500 تومان در نظر گرفته شده است. هزینه پارکینگ برای خودرویی

که رأس ساعت ۱۱:۰۰ وارد پارکینگ می‌شود ۲۰۰۰ تومان محاسبه می‌شود. اما از دانش‌آموزان قوی‌تر می‌توان محاسبه جزئیات دقیقه و محاسبات مربوط به آن را نیز خواست مثلاً ساعت ۱۱:۳۰ یعنی سه و نیم ساعت پس از ورود خودرو، که هزینه پارکینگ با توجه به نمودار، از ضرب ۴/۵ در ۵۰۰ یعنی ۲۲۵۰ تومان محاسبه می‌شود. برای دقایق و زمان‌هایی که مقدار هزینه پارکینگ، عددی با واحدهای خرده به دست می‌آید، می‌توانیم فقط دقیقه را در نظر بگیریم و وارد واحدهای کوچک‌تر از دقیقه نشویم. همان‌طور که در بانک‌ها و بسیاری از مراکز دیگر، زمان ورود را تا حد مشخصی در نظر می‌گیرند و ثانیه وارد محاسبه نمی‌شود.

ورود خودرو به پارکینگ در ساعت ۱۱:

$$۱۱ - ۸ = ۳$$

با توجه به نمودار $۱ + ۳ = ۴$

$$\text{تومان } ۲۰۰۰ = ۴ \times ۵۰۰ = \text{هزینه}$$

ورود خودرو به پارکینگ در ساعت ۱۱:۳۰'

$$۱۱:۳۰' - ۸ = ۳:۳۰' \rightarrow ۳\frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲} = ۳\frac{۱}{۲}$$

با توجه به نمودار: $۳/۵ + ۱ = ۴/۵$

$$\text{تومان } ۲۲۵۰ = ۴/۵ \times ۵۰۰ = \text{هزینه}$$

حل تمرینات برگزیده درس دوم (صفحه ۴۳ کتاب)

۱ جدول مالیاتی زیر را، که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف از مالیات	حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰
۱۰	مزداد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰
۱۵	مزداد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰
۲۵	مزداد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰

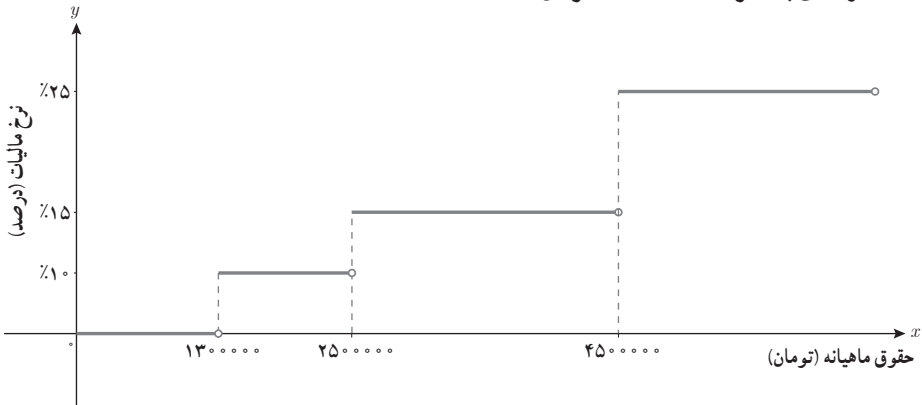
الف) نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر یک از کارمندان زیر را محاسبه کنید:

کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان

کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان

کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان



کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰، معاف از مالیات

کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰: $240000 - 130000 = 110000$

تومان $110000 \times \frac{10}{100} = 11000$

کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰:

$$(250000 - 130000) \times \frac{10}{100} + (450000 - 250000) \times \frac{15}{100} + (600000 - 450000) \times \frac{25}{100} = 120000 + 30000 + 37500 = 795000 \text{ تومان}$$

۵ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

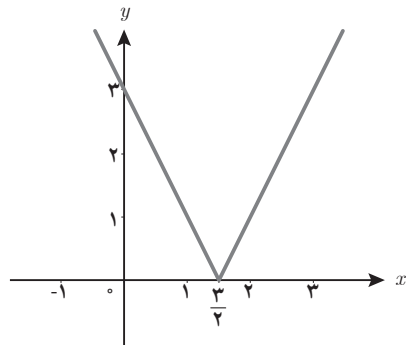
الف) $y = |2x - 3|$

ب) $y = |3x + 1|$

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$y = \begin{cases} 2x - 3 & x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x - 3) & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

x	۰	$\frac{3}{2}$	۳
y	۳	۰	۲

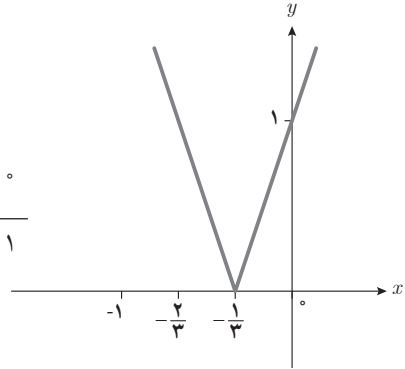


$$y = |3x + 1|$$

$$3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$y = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq -\frac{1}{3} \\ -(3x + 1) & x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

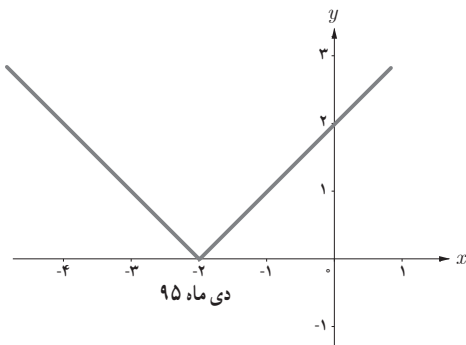
x	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
y	1	0	1



۶ با توجه به نمودار

الف) شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

اگر پروژه را در دی ماه ۹۵ تحویل دهد جریمه نمی‌شود. به ازای هر مدت زمان اختلاف با زمان تحویل پروژه باید جریمه‌ای پرداخت شود.



ب) به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

$$(-2, 0), (0, 2) \rightarrow m = 1$$

$$y = x + 2 \quad x \geq -2$$

$$(-2, 0), (-4, 2) \rightarrow m = -1$$

$$y = -x - 2 \quad x < -2$$

ج) به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \geq -2 \\ -x - 2 & x < -2 \end{cases} \rightarrow f(x) = |x + 2|$$

د) شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا کاهش شیب خط به چه معناست؟

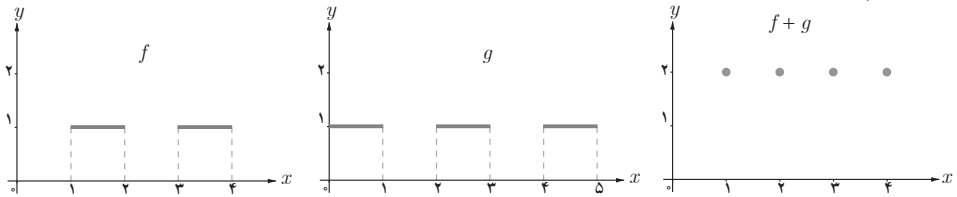
مثبت بودن شیب خط، به معنای تأخیر در زمان تحویل پروژه و منفی بودن آن به معنای تحویل زودتر از موعد مقرر است. هر دو حالت، موجب خسارت دیدن صاحب کار است.

افزایش مقدار شیب خط، نشان دهنده افزایش مبلغ جریمه و کاهش مقدار شیب خط، نشان دهنده کاهش مبلغ جریمه است؛ مثلاً در «کار در کلاس» صفحه ۴۱ کتاب، جریمه دو ماه اختلاف با زمان تحویل پروژه، ۴ میلیون تومان، و در تمرین ۶ صفحه ۴۴ کتاب، جریمه دو ماه اختلاف با زمان تحویل پروژه، ۲ میلیون تومان است.

حل تمرینات برگزیده درسی سوم (صفحه ۵۲ کتاب)

۱ در هر حالت با توجه به نمودار توابع f و g ، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

(الف)



$$f(x) = 1$$

$$1 \leq x \leq 2, \quad 3 \leq x \leq 4$$

$$g(x) = 1$$

$$0 \leq x \leq 1,$$

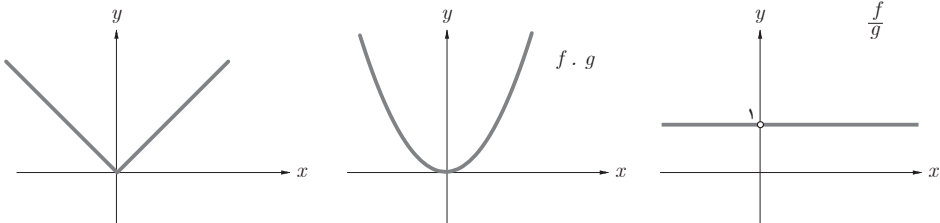
$$2 \leq x \leq 3,$$

$$4 \leq x \leq 5$$

$$(f+g)(x) = 2$$

$$D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

(ب)



$$f(x) = |x|, \quad g(x) = |x|$$

$$(f \cdot g)(x) = |x| \times |x| = |x|^2 = x^2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{|x|}{|x|} = 1$$

۲ یک شرکت هولدینگ^۱ دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب $16x - 2x^2$ و $6 + 8x$ و در کارخانه B به ترتیب $12x - x^2$ و $9 + 2x$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):

الف) تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.

$$\text{سود کارخانه } A : P_1(x) = R_1(x) - C_1(x) = -2x^2 + 16x - (8x + 6) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$\text{سود کارخانه } B : P_2(x) = R_2(x) - C_2(x) = -x^2 + 12x - (2x + 9) = -x^2 + 10x - 9$$

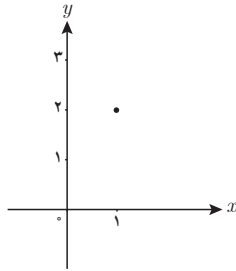
سود کارخانه B + سود کارخانه A = سود شرکت هولدینگ

$$\rightarrow P(x) = P_1(x) + P_2(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

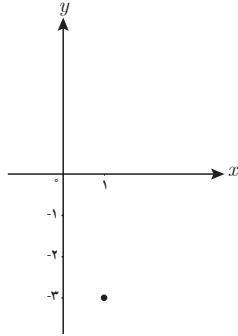
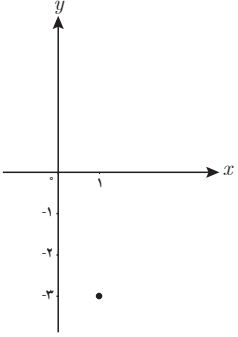
ب) این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟
معادله سود شرکت هولدینگ، درجه دوم و نمودار آن سهمی است و ماکزیمم مقدار در رأس آن اتفاق می‌افتد.

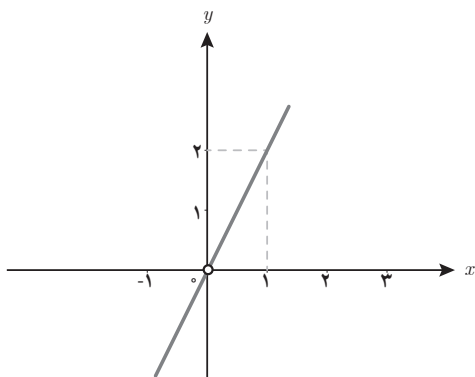
$$\rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-3)} = 3 \text{ تن}$$

۳ اگر $f(x) = [x]$ با دامنه $0 \leq x \leq 1$ و $g(x) = |x|$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	نمودار
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s(x) = [x] + x $ $D_s = Df \cap Dg = \{1\}$ $x = 1 \rightarrow y = 2$ $(1, 2)$	

۱- هولدینگ از واژه لاتین Hold به معنای نگه داشتن می‌آید. شرکت هولدینگ یا مادر، شرکتی سهامی است که دارای «شرکت‌های زیرمجموعه» است. کنترل شرکت‌های زیرمجموعه مستقیماً زیر نظر مدیران و هیئت مدیره شرکت اصلی است.

$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]}$ $D_f \cap D_h - \{x f(x) = 0\} = \{1\}$ $x = 1 \rightarrow y = -3$ $(1, -3)$	
$p(x) = h(x) \times g(x)$	$p(x) = (x^2 - 4) \times x $ $D_h \cap D_g = \{1\}$ $x = 1 \rightarrow y = -3$ $(1, -3)$	



۲ اگر $f(x) = x^2$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید؟

روش اول :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = ax \quad , \quad a = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = R - \{0\}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2x \rightarrow \frac{x^2}{g(x)} = 2x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

روش دوم :

با توجه به آنکه نمودار تابع $\frac{f}{g}$ از درجه اول است و $f(x) = x^2$ پس ضابطه تابع g باید از درجه اول باشد؛ یعنی $g(x) = ax + b$. از طرف دیگر، نمودار تابع $\frac{f}{g}$ در $x = 0$ تعریف نشده است. درحالی که $f(0)$ وجود دارد و برابر صفر است. پس باید $g(0) = 0$ باشد که تابع $\frac{f}{g}$ در $x = 0$ تعریف نشود؛ بنابراین، ضابطه تابع g به صورت $g(x) = ax$ است.

حال با توجه به نقطه مشخص شده $A(1, 2)$ بر روی نمودار تابع $\frac{f}{g}$ داریم :

$$f(x) = x^2 \rightarrow f(1) = 1, \quad g(x) = ax \rightarrow g(1) = a$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = 2 \rightarrow \frac{f(1)}{g(1)} = 2 \rightarrow \frac{1}{a} = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x$$