فصل ۷

آمار و احتمال

اهداف کلی فصل

۱ درک احتمال شرطی و توانایی حل مسائل مربوط به آن

۲ درک استقلال و عدم استقلال دو پیشامد و حل مسائل مربوط به آن

۳ درک مفاهیم میانگین، میانه، چارک‌ها، دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات و محاسبهٔ آنها و استفاده از آنها در حل مسائل مربوطه

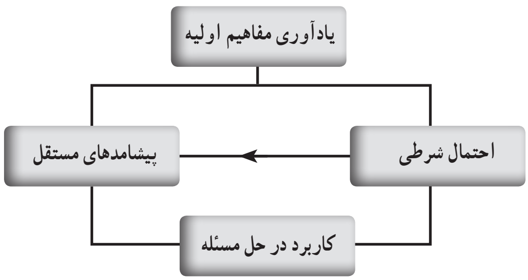
نگاه کلی به فصل

آموزش مفاهیم آمار و احتمال که از همان پایه‌های ابتدایی در کتاب‌های ریاضی مورد توجه قرار گرفته است، در فصل آخر این کتاب در قالب دو درس، یکی احتمال و یکی آمار، ادامه یافته است. در درس اول به بیان احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل پرداخته شده است. ابتدا احتمال شرطی آورده شده است. و با استفاده از پیش دانسته‌های دانش‌آموز و با توجیهی منطقی فرمول احتمال شرطی ارائه شده است. سپس با ارائه کار در کلاس وچند مثال سعی در بالا بردن تسلط دانش‌آموزان شده است. پس از آن با توجه به احتمال شرطی مفهوم پیشامدهای مستقل ارائه گردیده است. مطالعه مثال‌هایی که در کتاب آورده شده و دیگر مثال‌هایی از این دست برای بالا بردن فهم دانش‌آموزان از این مفهوم و تسلط آنها بر حل مسائل این موضوع الزامی است.

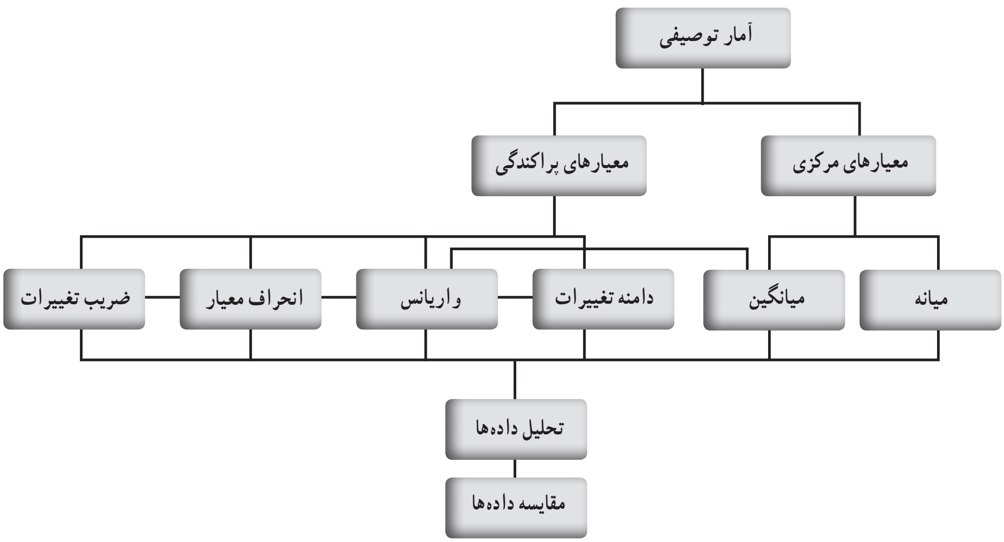
در درس دوم، معیارهای مرسومی شامل میانه و میانگین و معیارهای پراکندگی شامل دامنه تغییرات، واریانس انحراف معیار و ضریب تغییرات و چگونگی نحوه استفاده از این معیارها در تحلیل و مقایسه داده‌ها بیان شده است. دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با مفاهیم اولیه آمار مانند دسته‌بندی داده‌ها، جدول فراوانی، میانگین و نمودارهای مختلف آماری و انواع متغیرهای تصادفی آشنا شده‌اند.

در این درس، دانش آموزان با معیارهای مرکزی و پراکندگی به عنوان معرف جامعه در بررسی و مطالعه داده‌های آماری و میزان حساسیت معیارهای مذکور به تغییرات داده‌ها آشنا می‌شوند.

نقشه مفهومی



نقشه مفهومی بخش آمار



دانستنی‌هایی برای معلم

از زمان‌های دور انسان‌ها به شانس و اقبال در زندگی معتقد بوده‌اند، بازی‌های مبتنی بر شانس چه در عصر باستان و مدارک تاریخی و چه امروزه، حتی در دنیای کودکان قابل مشاهده است.

این روزها، هرگاه انتخاب یک مورد، انتخاب موارد دیگر را در یک رویداد تحت‌الشعاع قرار دهد و

ایجاد شبهه کند از شانس استفاده می شود. مثلاً در مسابقات فوتبال برای شروع بازی از پرتاب سکه استفاده می‌شود.

قرعه کشی نیز یکی دیگر از نمونه‌های انتخاب شانسی است که قدمت آن به روم باستان برمی گردد. هرساله قریب ۱۴ میلیون شهروند رومی در یک قرعه‌کشی به‌صورت رایگان شرکت می‌کردند و برنده مبلغ قابل توجهی می‌شوند. جالب است که بعضی از برندگان این قرعه‌کشی از طبقه ثروتمند جامعه بودند. در قرن شانزدهم در ایتالیا برای تعیین فردی که باید هزینه‌های دفاعی شهر را بپردازد در میان طبقه ثروتمند شهر، قرعه‌کشی انجام می‌شد. در برخی جوامع کهن، انتخاب همسر نیز به‌صورت شانسی انجام می‌شد که دست‌کم باعث حفظ تنوع ژنتیکی در میان افراد جامعه می‌شد.

در ادبیات فارسی نیز از شانس به عنوان بخت یاد شده است و دارای نمونه‌های بسیاری در اشعار و متون ادبی است. مثلاً

اگر به هر سر مویت دو صدهنر باشد	هنر به کار نیاید چو بخت بد باشد
از این بوالعجبتر حدیثی شنو	که بی‌بخت کوشش نیرزد دو جو
چندان که جهد بود دویدیم در طلب	کوشش چه سود چون نکند بخت یاوری
چه کند زورمند وارون بخت	بازوی بخت به که بازوی سخت
به رنج بردن بیهوده گنج نتوان یافت	که بخت راست فضیلت نه زور بازو را

با وجود اهمیت و تأثیر شانس در زندگی بشر، بسیاری از متفکران تا قبل از عصر علوم جدید (علوم مبتنی در تجربه)، وجود آن را رد می‌کردند. عدم هماهنگی شانس با موضوعاتی نظیر اراده آزاد، مسئولیت و ... فیلسوفان را از رسیدن به یک بیان قطعی در مورد شانس محروم کرد. دیدگاه منفی فیلسوفان نسبت به شانس، بیشتر حاصل علمی بود که از طریق نظری و نه تجربی به آن دست یافته بودند. به این ترتیب آنها برای آزمایش‌های تجربی ارزشی قائل نبودند.

دو مواور تعریف‌های دقیق و درستی از استقلال پیشامدها، و احتمال شرطی ارائه کرد. لاپلاس کارهای برنولی، دو مونمور و دومواور را توسعه داد. مقاله او با عنوان تئوری تحلیلی احتمال یکی از کارهای مهم تا قرن بیستم به‌شمار می‌رود.

از آن‌جا که قرن نوزدهم مصادف با تغییر ساختار اجتماعی و اقتصادی و تحول علوم تجربی است، بیشتر کارهایی که تا آن زمان در زمینه ریاضیات و به‌ویژه در احتمال انجام شده بود، کاربرد یافت، قرن بیستم را دوران احتمال مدرن می‌دانند. کولموگروف احتمال را براساس اصول موضوعی و در قالب تئوری اندازه بنا نهاد کتاب مبانی تئوری احتمال او در آلمان به سال ۱۹۳۳ منتشر شد و پایه و بنای تئوری احتمال مدرن قرار گرفت.

نتیجه‌ای که تئوری احتمال را تاحد زیادی از قیود عوامل تجربی رهانید «قضیه قانون اعداد بزرگ» است. به موجب این قضیه، احتمالات موضوعی را دست‌کم برای آزمایش‌هایی که به‌طور مستقل و نامحدود قابل تکرارند، به کمک مفهوم حد می‌توان محاسبه کرد. این قضیه اساسی ابتدا توسط امیل بورل برای آزمایش‌های برنولی بیان و اثبات شد و سپس کولموگروف آن را برای رشته هایی از متغیرهای تصادفی مستقل تعمیم داد.

تصویر عنوانی

یکی از راهکارهای عملی، جهت گسترش، بازسازی و عنوان در عرصه‌های مختلف صنعتی، کشاورزی و خدماتی برنامه‌ریزی درست و مدیریت بهینه و صحیح منابع در بخش‌های مذکور است. مثلاً در بخش کشاورزی به منظور افزایش سطح تولید و بهره‌وری، بهینه‌سازی منابع بسیار حائز اهمیت است. موضوع پیش‌بینی بارندگی‌های آینده براساس آمار بارندگی‌های ثبت شده قبلی و فعلی، می‌تواند نقش مهمی در این مدیریت داشته باشد. زیرا بارندگی، نسبت به سایر عوامل اقلیمی نقش تعیین‌کننده‌تری در تولیدات کشاورزی دارد.

اثر سیستم‌های مؤثر بر بارندگی و دوره‌های خشک ممکن است برای چند روز روی یک منطقه تداوم یابد. از این‌رو تعیین احتمال رخدادهای متوالی مانند یک روز تر پس از یک روز تر دیگه، یک روز خشک پس از یک روز تر، یک روز خشک پس از یک روز خشک دیگر و یک روز تر پس از یک روز خشک می‌تواند مفید باشد. در عین حال، چون توده‌های هوای مستقر روی یک اقلیم ممکن است چندهزار کیلومتر را دربرگیرد و سرعت حرکت کندی داشته باشند، اگر یک روز بارانی باشد احتمال آنکه فردای آن روز نیز بارانی باشد زیاد است. در نتیجه وقوع روزهای بارانی و روزهای خشک به بارانی یا خشک بودن روز قبل وابسته است در نتیجه در بررسی احتمال وقوع یا عدم وقوع روزهای بارانی یا خشک با پیشامدهای وابسته سروکار داریم که به ر وزهای قبلی خود وابسته‌اند. بنابراین یکی از مسائلی که در هواشناسی با آن روبه‌رو هستیم، این است که پیشامدهای متوالی با چه احتمالی درپی یکدیگر ظاهر می شوند و در طولانی مدت سهم هر یک از آنها روی اقلیم مورد بررسی چه میزان است.

درس اول

احتمال شرطی

اهداف درس

❑ آشنایی با احتمال شرطی و کاربرد آن در حل مسائل
❑ آشنایی با متغیرهای مستقل و وابسته
❑ درک رابطه بین متغیرهای مستقل و کاربرد آن در حل مسائل مربوطه

پیش‌نیازها

۱ فضای نمونه و پیشامدهای تصادفی را بشناسد.
۲ با احتمال وقوع یک پیشامد در یک فضای نمونه آشنا باشد.
۳ قوانین احتمال (اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم) را بشناسد.
۴ با پیشامدهای ناسازگار آشنا باشد.

روش تدریس

این درس با یادآوری مفاهیم اولیه مبحث احتمال و تلخیص مواردی که دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اند آغاز می شود. لازم به ذکر است که مفاهیم اشاره شده در کادر ابتدای درس، خلاصه‌ای از مفاهیمی است که در پایه‌های هشتم، نهم و دهم در برنامه درسی دانش‌آموزان قرار گرفته است. در بیان احتمال شرطی و ارائه فرمول آن با توجه به آنچه دانش آموز از احتمال می‌داند و با توجه به فرمول احتمال سعی شده است نوعی توجیح منطقی (و نه اثبات کامل ریاضی) ارائه گردد که به پذیرش این رابطه توسط ذهن دانش‌آموز کمک نماید. از نظر توالی مطالب، باید توجه داشت که در بسیاری از کتاب‌های احتمال ابتدا

مفهوم استقلال دو پیشامد بیان شده و سپس احتمال شرطی ارائه می‌شود. ولی از آنجا که رویکرد کتاب‌های جدید التألیف بر ارائه کاربردی و شهودی مطالب برای دانش‌آموزان می‌باشد. در این فصل، برنامه آموزشی مبتنی بر ارائه احتمال شرطی و سپس با استفاده از آن ارائه تعریف استقلال دو پیشامد است.

از آنجا که دانش‌آموزانی که در رشته تجربی تحصیل می‌کنند احتمال دارد در رشته‌هایی ادامه تحصیل دهند که با محاسبه احتمال پیشامدهای مستقل زیاد سروکار داشته باشند، یادگیری این مفهوم اهمیت خاصی خواهد داشت. مطالعه مثال‌های ارائه شده در ادامه درس تسلط دانش‌آموزان را بیشتر نموده و مطالب خواندنی قرار داده شده به منظور مطالعه بیشتر علاقه‌مندان است و می‌تواند برای دانش آموزان رشته تجربی مفید باشد.

گاهی وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع به پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال اینکه قیمت جهانی نفت در ماه آینده افزایش یابد با دانستن اینکه یکی از کشورهای اوپک درگیر جنگ یا ناامنی است، متفاوت خواهد بود از وقتی اطلاعی در این مورد نداریم.

آنچه تاکنون دانش‌آموزان در مورد مسائل احتمال آموخته‌اند، دو نوع مسئله شمارشی و تقسیم «تعداد حالات مطلوب» به «تعداد حالات ممکن» است. این تصویر مفید ولی محدود است. با ارائه مسائل احتمال شرطی و استقلال دید دانش‌آموزان نسبت به مسائل احتمال کمی گسترده‌تر خواهد شد.

در احتمال شرطی با محدود کردن تعداد حالت‌های ممکن از مجموعه فضای نمونه S بر یک مجموعه از آن مانند B و محدود کردن تعداد حالت‌های مطلوب از مجموعه A به مجموعه $A\cap B$، رابطه $P(A\,|\,B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$ حاصل می‌شود. در این قسمت اثبات دقیق ریاضی به هیچ عنوان مدنظر نیست و تنها توضیح منطقی و درک شهودی رابطه $P(A|B)$ موردنظر بوده است.

منظور از احتمال A به شرط B، احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن است که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad,\quad P(B)\neq 0$$

کار در کلاس صفحه ۱۴۵

با هدف آشنا کردن دانش‌آموزان با جزئیات رابطه احتمال شرطی از جمله نحوه خلاصه‌نویسی چنین مسائلی و نحوه استفاده از احتمال شرطی درحد آنها آورده شده است.

در یک مسابقهٔ اتومبیل رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار

نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل :

A : پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B : احتمال رسیدن به خط پایان

$$\begin{cases} P(A) = ۰/۸ \\ P(A \cap B) = ۰/۷ \end{cases}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۰/۷}{۰/۸} = \frac{۷}{۸}$$

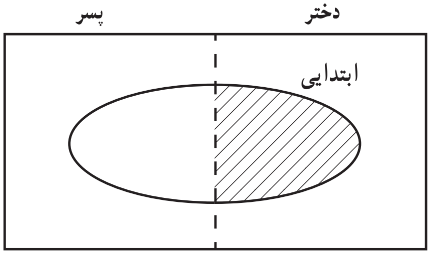
مثال‌های صفحه ۱۴۶ با هدف آشنایی بیشتر دانش‌آموز با مبحث احتمال شرطی آورده شده و به‌طور کامل حل شده‌اند.

توصیه‌های آموزشی

یکی از استراتژی‌های حل مسائل شرطی، کاهش فضای نمونه است. یعنی برای محاسبه احتمال A به شرط B، تعداد اعضایِ فضای نمونه S را به تعداد اعضای مجموعه B کاهش می‌دهیم. توصیه می‌شود در مثال‌های اولیه، نمودار ون مجموعه پیشامدهای A و B رسم شود این امر به دانش‌آموز کمک می‌کند تا درک بهتری از مفهومِ احتمال شرطی یافته و آن را به عنوان موضوعی مستقل از آنچه تا امروز در مورد مسائل احتمال آموخته، نبیند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال

فرض کنید در مدارس یک شهر ۱۵۰۰ دانش‌آموز تحصیل می‌کنند که ۸۰۰ تای آنها دختر و بقیه پسر هستند. همچنین ۶۰۰ نفر از آنها که ۳۲۰ نفر دختر و بقیه پسر هستند در مقطع ابتدایی تحصیل می‌کنند. اگر از میان دانش‌آموزان این شهر یکی را به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم که این دانش‌آموز از مقطع ابتدایی انتخاب شده است با چه احتمالی این فرد دختر است؟



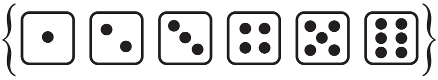
فضای نمونه = (دانش آموزان شهر)

$A =$ پیشامد دختر بودن

$B =$ پیشامد مقطع ابتدایی بودن

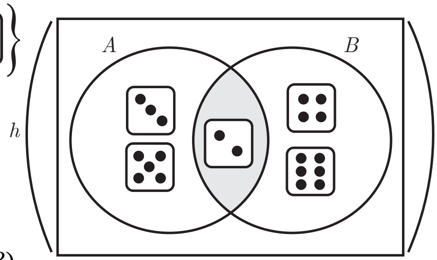
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۳۲\cancel{۰}}{۶۰\cancel{۰}} = \frac{۸}{۱۵}$$

مثال : تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر بدانیم عدد رو شده زوج است، احتمال آنکه اول آمده باشد چقدر است؟

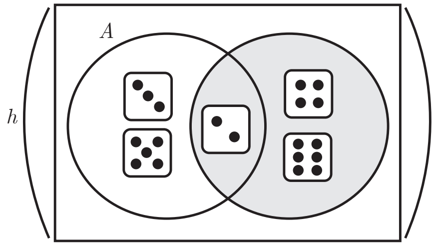


$A =$ پیشامد اول بودن

$B =$ پیشامد زوج بودن



$$P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\text{(شکل بالا)}}{\text{(شکل پایین)}}=\frac{۱}{۳}$$

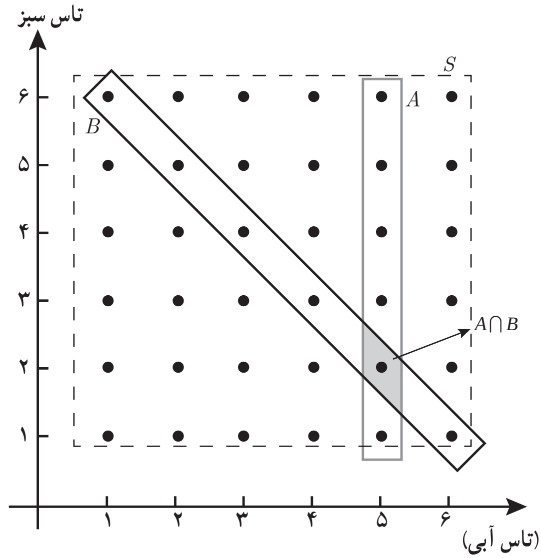


مثال : دو تاس آبی و قرمز را می‌اندازیم، اگر مجموع دو تاس ۷ باشد، احتمال اینکه تاسِ آبی ۵ باشد چقدر است؟

$A =$ پیشامد آنکه تاس آبی ۵ باشد

$B =$ پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد

$$P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۶}$$



دو پیشامد مستقل

در این قسمت پیشامد مستقل به کمک تعریف احتمال شرطی بیان شده است. در صفحه ۱۴۶ آمده است «پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیرنگذارد» دقت کنیم که در اینجا دوطرفه بودن مفهوم استقلال دو پیشامد ذکر نشده است و بنابه این تعریف تنها استقلال پیشامد A از B بیان شده است. یعنی می‌دانیم وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیری ندارد ولی در مورد این‌که وقوع A هم بر احتمال وقوع B تأثیر نمی‌گذارد اطلاعی در دست نیست. پس از آن با استفاده از مفهوم احتمال شرطی و توجه به این مسئله که وقوع B اثری بر احتمال وقوع A ندارد و نتیجه $P(A|B)=P(A)$ حاصل می‌شود.

در کادر بعدی مفهوم مستقل بودن به‌صورت $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ بیان شده است که حاصل دو رابطه $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ و $P(A|B)=P(A)$ است. اکنون با استفاده از خاصیت جابه‌جایی عمل ضریب دو مجموعه اعداد حقیقی و عمل اشتراک دو مجموعه مستقل بودن B از A نیز نتیجه می‌شود و استقلال دو پیشامد به‌عنوان مفهومی دوطرفه ارائه می‌گردد.

مثال‌های حل شده صفحات ۱۴۷ ــ ۱۴۹ به‌منظور تسلط بیشتر دانش‌آموزان بر این مبحث ارائه گردیده است.

توصیه‌های آموزشی

اگر $P(A)>0$ ، $P(B)$ ، شرط لازم و نه کافی برای استقلال آن است که $A\cap B=\varnothing$ زیرا در غیراین‌صورت $P(A\cap B)=0$ و بنابراین تساوی $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ برقرار نیست.

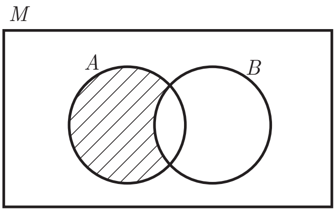
می‌توانید این مطلب را با یک مثال برای دانش‌آموزان مطرح کنید.

اغلب دانش‌آموزان بین دو مفهوم ناسازگاری و استقلال دو پیشامد تمایز قائل نمی‌شوند. به‌ویژه آنکه این دو مفهوم درحال حاضر با تأخیر زمانی یکسان فراگرفته می‌شود. همکاران محترم می‌توانند با توجه به زمان تعریف این دو مفهوم در مسیر آموزش احتمال در برنامه درسی و یادآوری هردو تعریف، مطلب را برای دانش‌آموزان به روشنی توضیح دهند.

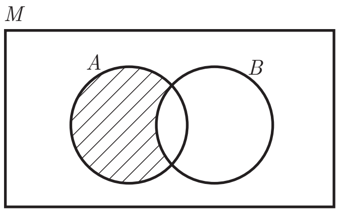
مفهوم ناسازگاری قبل از تعریف احتمال بیان می‌شود ولی استقلال دو پیشامد به کمک احتمال بیان می‌گردد.

درواقع دو پیشامد ناسازگار اشتراکشان برابر تهی است یعنی $A\cap B=\varnothing$ و بنابراین $P(A\cap B)=0$ در حالی‌که اگر A و B دو پیشامد مستقل با احتمال‌های غیرصفر باشند همان‌گونه که گفته شد باید $P(A\cap B)\neq 0$.

از آنجا که دانش‌آموزان در سال‌های قبل با نمودار ون آشنا هستند می‌توان تساوی رابطه $A-B=A\cap B'$ را با توجه به نمودار ون برای آنها اثبات کرده و پس از آن در حل این سؤال استفاده کرد.



A-B

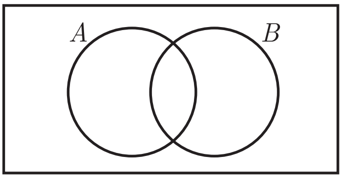


$A\cap B'$

تمرین ۳ــ فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل هستند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.



حل

طبق فرض A و B مستقل و $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

الف)

$$\begin{aligned}P(A'\cap B)=P(B-A)&=P(B)-P(A\cap B)\\&=P(B)-P(A)P(B)\\&=P(B)(-P(A))\\&=P(B).P(A')\end{aligned}$$

ب) طبق (الف) اگر دو پیشامد مستقل باشند هر یک از آنها با متمم دیگری هم مستقل است بنابراین اگر A و B مستقل باشند، در این صورت A و B' مستقل‌اند و از این می‌توان نتیجه گرفت A' و B' نیز مستقل‌اند.

تمرین ۴ــ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

حل :

$$P(A)=۰/۷ \quad , \quad P(B)=۰/۸$$

الف) $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۸}{۱۰}=\frac{۵۶}{۱۰۰}$

طبق قسمت ب تمرین ۳ اگر A و B مستقل باشند. آنگاه A' و B' نیز مستقل هستند.

ب) $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{۶}{۱۰۰}$

پ) $P(A\cap B')=P(A)P(B')=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۴}{۱۰۰}$

ت) $P(A\cap B')+P(A'\cap B)=\frac{۱۴}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۸}{۱۰}=\frac{۳۸}{۱۰۰}$

ث) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۷}{۱۰}+\frac{۸}{۱۰}-\frac{۵۶}{۱۰۰}=\frac{۹۴}{۱۰۰}$

تمرین ۵ــ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰/۶۲۵ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

$$P(A)=x \quad , \quad P(B)=۲x \quad , \quad P(A\cup B)=\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰}$$

$$P(B)=?$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=x+۲x-۲x^{۲}$$

$$\Rightarrow -۲x^{۲}+۳x=\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰}\Rightarrow\begin{cases} x_۱=\frac{۵}{۴} & \text{غ ق ق} \\ x_۲=\frac{۱}{۴}\rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

تمرین ۶ــ دو تاس باهم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هردو عدد روشده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد روشده برابر ۸ است را به‌دست آورید.

حل :

$$P(A|B)=? \quad , \quad P(A)=\frac{۹}{۳۶} \quad , \quad P(B)=\frac{۵}{۳۶}$$

A : پیشامد هردو زوج
B : پیشامد مجموع ۸

$$\begin{cases} A \cap B = \{(۲,۶),(۴,۴),(۶,۲)\} \\ P(A \cap B) = \frac{۳}{۳۶} \end{cases}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{۳}{۳۶}}{\frac{۵}{۳۶}} = \frac{۳}{۵}$$

تمرین ۷ــ ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

حل :

$$P(A) = \frac{۱}{۵} \;,\; P(B) = \frac{۱}{۷} \;,\; P(B|A) = \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۱}{۴} = \frac{P(B \cap A)}{\frac{۱}{۵}} \rightarrow P(B \cap A) = \frac{۱}{۲۰}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۲۰}$$

$$= \frac{۲۵ + ۲۰ - ۷}{۱۴۰}$$

$$= \frac{۳۸}{۱۴۰} = \frac{۱۹}{۷۰}$$

درس دوم

آمار توصیفی

اهداف درس

- ❑ آشنایی با معیارهای گرایش به مرکز و محاسبه آنها
- ❑ توانایی بهره‌گیری از معیار گرایش به مرکز مناسب در تحلیل داده‌ها با تمرکز برشناخت ویژگی‌های آنها
- ❑ آشنایی با معیارهای پراکندگی و محاسبه آنها
- ❑ توانایی بهره‌گیری از معیارهای پراکندگی مناسب در تحلیل داده‌ها تمرکز برشناخت ویژگی‌های آنها
- ❑ درک اثر تغییر مقدار عددی داده‌ها روی شاخص‌های گرایش به مرکز و پراکندگی

پیش‌نیازها

- ❑ با متغیرهای تصادفی آشنا باشد.
- ❑ جامعه و نمونه را بشناسد

روش تدریس

یکی از اهداف آمار، خلاصه‌سازی داده‌ها جهت بهره‌مندی از آنها است. انتخاب یک یا چند عدد به نمایندگی از سایر داده‌ها، اطلاعات لازم و کاربردی را در اختیار ذی‌نفعان قرار خواهد داد. بدیهی است که در انتخاب این نمایندگان، نهایت دقت را باید به‌کار برد. زیرا همه استنباط‌ها از داده‌ها و همه برنامه‌ریزی‌ها براساس این نمایندگان انجام خواهد گرفت.

معیارهای گرایش به مرکز

معیارهایی هستند که محل تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهند :

میانگین به عنوان پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز شناخته شده است. این معیار به علت برخورداری از ویژگی‌های خوب به‌عنوان یک برآورد از میانگین جامعه، در قضایای بسیاری به‌کار گرفته شده است. لذا میانگین نسبت به میانه از کاربرد بیشتری برخوردار است. اما همان‌طور که در متن کتاب توضیح داده شده، گاه استفاده از میانگین درست نیست و از میانه به عنوان معیار گرایش به مرکز استفاده می‌کنیم.

قوانین مربوط به میانگین

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=۱}^{N} X_i}{N}=\frac{X_۱+X_۲+....+X_n}{N}$$

البته در کتاب از آوردن علامت Σ خودداری شده است.

$$\sum_{i=۱}^{N}(X_i-\overline{X})=۰ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{N} X_i - N\overline{X}=N\overline{X}-N\overline{X}=۰$$

فعالیت صفحه ۱۵۳

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد :

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۶۲

نحوهٔ محاسبه میانگین

۱ محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد :

۲ سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد :

حل :

$$\overline{X}=\frac{۶۲+۵۵+۵۷+۶۱+۵۵}{۵}=۵۸$$

هدف کار در کلاس صفحه ۱۵۴، بررسی و مشاهده میزان حساسیت میانگین نسبت به تغییرات همه داده‌ها است. هر تبدیلی که روی همه داده‌ها انجام گیرد، روی میانگین هم اعمال خواهد شد. قبل از کار در کلاس دو سؤال در مورد تغییرات داده‌ها و اثر آن روی میانگین پرسیده شده است.

همکاران محترم می‌توانند با مثالی ساده و تغییرات روی آن، از دانش‌آموزان بخواهند پاسخ این سؤالات را به‌دست آورند و یا به‌صورت کلی مطلب را ثابت کنند هرچند اثبات ریاضی این سؤالات مدنظر نبوده است و همکاران با توجه به سطح کلاس می‌توانند با چند مثال و یا اثبات ریاضی بنابه صلاحدید مطلب را نتیجه بگیرند.

کار در کلاس صفحه ۱۵۴

۱ در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟

با توجه به پاسخ و نتایج گرفته شده از سؤالات قبل از این کار در کلاس :

جرم دوستان محمد در فعالیت قبل برحسب کیلوگرم است. در تبدیل واحد کیلوگرم به گرم، همه داده‌ها در ۱۰۰۰ ضرب می شوند. پس میانگین هم در ۱۰۰۰ ضرب شده و برابر ۵۸۰۰۰ خواهد بود.

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، میانگین دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت است؟ (راهنمایی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$)

مانند سؤال قبل چون در تبدیل واحد درجه سانتی‌گراد به فارنهایت همه داده ها در $\frac{۹}{۵}$ ضرب و با ۳۲ جمع می‌شوند پس میانگین داده‌های تبدیل شده برابر $۳۲+۲۸\times\frac{۹}{۵}$ یعنی ۸۲/۴ است.

توصیه‌های آموزشی

همکاران محترم توجه داشته باشند که دانش‌آموزان با مفهوم علم آمار، تعاریف مربوط به آن، مرتب کردن داده‌ها : دسته‌بندی داده‌ها، جدول فراوانی، یافتن میانگین داده‌ها از روی جدول فراوانی و انواع نمودارهای آماری در دوره متوسطه اول آشنا هستند. توصیه می شود فصل ۸ از کتاب ریاضی پایه هشتم مطالعه شود یا از دانش‌آموزان بخواهید این فصل را قبل از تدریس مطالعه و در کلاس ارائه دهند.

میانه

میانه داده‌ای است که نصف داده ها از آن بیشتر و نصف داده ها از آن کمتر است. به‌صورت دقیق‌تر، میانه عبارت است از مقداری که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن باهم برابرند. فلوچارت صفحه ۱۵۴ مراحل یافتن میانه را به‌خوبی بیان می‌کند.

جارک‌ها که در انتهای این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند، تعمیم مفهوم میانه هستند.

از آنجا که میانگین تحت تأثیر داده‌های دور افتاده است، در صورت وجود داده‌های دورافتاده، از میانه استفاده می‌شود برای درک بهتر این مطلب، می‌توان معلمی را مثال زد که نمره مستمر دانش‌آموزان را براساس میانگین نمرات آنها در طول یک ترم محاسبه می‌کند. فرض کنید در این میان دانش‌آموزی دارای نمرات ۱۷/۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۶/۵ و ۱۶ و ۵ باشد. به هر دلیلی دانش‌آموز یک نمره خیلی ضعیف دارد ولی عملکرد او در سایر موارد کاملاً قابل قبول است میانگین نمرات این دانش‌آموز برابر ۱۴ است که نسبت به نمرات او در طول ترم ناعادلانه به‌نظر می‌رسد. از این‌رو برای از بین بردن اثر نمره دور افتاده ۵ بهتر است از میانه استفاده شود.

مثال و کار در کلاس صفحه ۱۵۵ در راستای درک بهتر دانش‌آموز از مفهوم میانه و کاربرد آن است.

کار در کلاس صفحه ۱۵۵

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، قبل از یک مسابقهٔ دو است.

۸۶   ۹۷   ۹۲   ۸۹   ۱۰۱   ۹۸   ۹۸   ۱۰۵   ۷۵   ۸۲   ۹۱   ۱۰۰

ــ میانهٔ داده‌ها را مشخص کنید.

۷۵ ، ۸۲ ، ۸۶ ، ۸۹ ، ۹۱ ، ۹۲ ، ۹۷ ، ۹۸ ، ۹۸ ، ۱۰۰ ، ۱۰۱ ، ۱۰۵

$$\frac{۹۲+۹۷}{۲}=۹۴/۵$$

ــ میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

$$\overline{X}=\frac{۱۱۱۴}{۱۲}\simeq ۹۲/۸۳$$

توصیه‌های آموزشی

توجه دانش‌آموزان را به اهمیت بحث میانگین و میانه در تحلیل داده‌ها جلب کنید. مثلاً اینکه اگر میانه نمره ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس ۱۷ باشد، یعنی ٪۵۰ دانش‌آموزان نمره ۱۷ و بالاتر گرفته‌اند و این به معنای رقابت شدید در آن کلاس است.

تعبیر میانگین در فیزیک، مرکز ثقل است که می‌توان برای درک بهتر مفهوم میانگین و اهمیت معیارهای پراکندگی قبل از ورود به موضوع معیارهای پراکندگی به آن اشاره کرد. در دو شکل زیر :

(۱)   (۲)

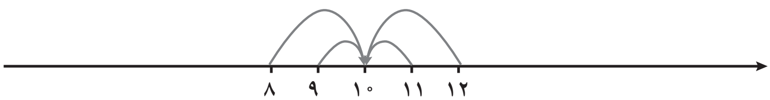
شکل اول از تعادل بیشتر برخوردار است ولی شکل دوم تعادل کمتری دارد. می‌توان بلندی میله‌ها را در دوطرف شکل به پراکندگی بیشتر داده‌ها نسبت داد.

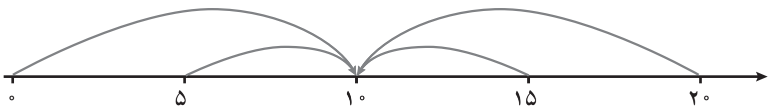
تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی‌تواند اطلاعات کاملی از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد. فعالیت صفحه ۱۵۶ به‌منظور نشان دادن همین موضوع طرح شده است.

فعالیت صفحه ۱۵۶

نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است:

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰





الف) میانهٔ نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

میانه کلاس A = ۱۰   میانه کلاس B = ۱۰

ب) میانگین نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

$\overline{X}_A = ۱۰ \quad , \quad \overline{X}_B = ۱۰$

پ) به‌نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟ از آنجا که میانه و میانگین داده‌ها در هر دو کلاس یکسان است، در این سؤال معیارهای گرایش به مرکز اطلاعات چندانی برای مقایسه وضعیت دو کلاس به دست نمی‌دهد و معلم نمی‌تواند با این اطلاعات، کلاسی را بر کلاس دیگر ترجیح دهد ولی این سؤال برای توجه دادن دانش‌آموزان به مهم بودن معیارهای مربوط به پراکندگی داده‌ها مطرح شده و لذا بحث بر تفاوت پراکندگی داده‌ها و نتایج آن مدنظر است.

معیارهای پراکندگی

تحلیل داده‌ها با استفاده از معیارهای گرایش به مرکز و بدون در دست داشتن معیارهای پراکندگی عملاً غیرممکن است.

دامنه تغییرات به عنوان اولین و ساده‌ترین معیار پراکندگی، دارای اهمیت است. اینکه تغییرات داده‌ها چگونه دامنه تغییرات و سایر معیارهای پراکندگی را تحت تأثیر قرار می‌دهد از مواردی است که دانش‌آموز باید به‌خوبی با آن آشنا شود. حسن دامنه تغییرات در سادگی محاسبه و ایراد آن در این است که تنها با دو داده بزرگ و کوچک سروکار دارد. فعالیت صفحه ۱۵۶ و همچنین مثال آورده شده در همان صفحه به معرفی دامنه تغییرات، حسن و ایراد استفاده از آن می‌پردازد.

هرچند که پراکندگی زیاد به معنای عدم تعادل داده‌هاست و مثلاً پراکندگی زیاد در درآمدهای افراد یک جامعه، نشان‌دهنده بیماری اقتصادی است. اما در برخی موارد پراکندگی زیاد مفید و حتی لازم است.

فرض کنید در یک آزمون استخدامی ۹۰ درصد داوطلبان نمره کامل گرفته باشند. این امر نشان می‌دهد که آزمون نتوانسته است مقایسه درستی بین داوطلبین انجام دهد و شایسته‌ترین‌ها را برگزینند.

کار در کلاس صفحه ۱۵۷ ورود به بحث واریانس و اهمیت این معیار در میان معیارهای پراکندگی است.

کار در کلاس صفحه ۱۵۷

معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند، گزارش کنند.

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

۱   ۴   ۱۴   ۱۲   ۹   ۸   ۱۵

دامنه تغییرات: ۱۴ = ۱ − ۱۵

ب) دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنهٔ تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

دامنه تغییرات : ۱۴ = ۱ − ۱۵

پ) از مقایسهٔ پاسخ الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ از میان همه داده‌ها، دامنه تغییرات تنها با دو داده، یعنی بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده سروکار دارد و تغییرات روی داده‌های بین این دو داده، تأثیری روی دامنه تغییرات ندارد.

واریانس، یکی از مهم‌ترین پارامترهای علم آمار که برابر با میانگین مربع انحرافات از میانگین داده‌هاست. واریانس جامعه را با δ^{2} نشان می‌دهیم. لازم است تا دانش‌آموز نقش واریانس را به‌عنوان معیار تکمیل کننده میانگین در بررسی جامعه درک کند. واریانس به دلیل درگیری تمام داده‌ها در محاسبه آن، یکی از معیارهای مهم پراکندگی به‌شمار می‌رود و واحد آن برابر توان دوم واحد دادهٔ موردنظر است.

لزوم مجذورگیری در فرمول واریانس با اشاره به این مطلب که مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است در صفحهٔ ۱۵۸ به‌طور کامل توضیح داده شده است.

فعالیت صفحه ۱۵۷و ادامه آن در صفحه ۱۵۸ دانش‌آموز را برای رسیدن به فرمول واریانس راهنمایی می‌کند. در اینجا تحلیل نتیجه حاصل بسیار مهم است و باید روی آن تأکید شود. اینکه واریانس بزرگ به چه معناست و واریانس کوچک به چه معنا و اساساً کاربرد واریانس در مقایسه دو دسته داده با میانگین یکسان، به‌خوبی باید توسط دانش‌آموزان درک شود.

فعالیت صفحه ۱۵۷

الف) در ادامهٔ فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های روبه‌رو محاسبه کنید.

کلاس A	
x_i	$(x_i-\overline{X})$
۸	۲-
۹	۱-
۱۰	۰
۱۱	۱
۱۲	۲

کلاس B	
y_i	$(y_i-\overline{Y})$
۰	۱۰-
۵	۵-
۱۰	۰
۱۵	۵
۲۰	۱۰

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید. در هر دو حالت مجموع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر است.

الف) مجذور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه کنید.

کلاس A		
x_i	$(x_i - \overline{X})$	$(x_i - \overline{X})^۲$
۸	−۲	۴
۹	−۱	۱
۱۰	۰	۰
۱۱	۱	۱
۱۲	۲	۴

کلاس B		
y_i	$(y_i - \overline{Y})$	$(y_i - \overline{Y})^۲$
۰	−۱۰	۱۰۰
۵	−۵	۲۵
۱۰	۰	۰
۱۵	۵	۲۵
۲۰	۱۰	۱۰۰

ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$(۸ - ۱۰)^۲ + \dots + (۱۲ - ۱۰)^۲ = ۱۰$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$(۰ - ۱۰)^۲ + \dots + (۲۰ - ۱۰)^۲ = ۲۵۰$

پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$\dfrac{(۸-۱۰)^۲ + \dots + (۱۲-۱۰)^۲}{۵} = \dfrac{۱۰}{۵} = ۲$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$\dfrac{(۰-۱۰)^۲ + \dots + (۲۰-۱۰)^۲}{۵} = \dfrac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$

کار در کلاس صفحه ۱۵۹

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در «کار در کلاس» قبل، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

واریانس	دامنه تغییرات	تعداد کتاب‌های مطالعه شده توسط هر دانش‌آموز
۲۰	۱۴	۱۵ ۸ ۸ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱
$\sigma \simeq$ ۲۲/۹۸	۱۴	۱۵ ۸ ۸ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱ ۵ ۱۱

همان‌طور که در این «کار در کلاس» دیده می شود، واریانس برخلاف دامنهٔ تغییرات با تغییر تعداد و مقادیر داده‌ها تغییر می‌کند.

کار در کلاس‌های صفحه ۱۵۹ به بیان ویژگی‌های واریانس و مزیت آن نسبت به دامنه تغییرات می‌پردازد. این ویژگی، حساسیت واریانس به تعداد داده‌ها و مقدار داده ها را نشان می‌دهد.

ویژگی‌های واریانس

اگر هریک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد. چرا؟

اگر هریک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

در پاسخ به این سؤالات، نیازی به اثبات ریاضی نیست و همکاران با چند مثال عددی می‌توانند ذهن دانش‌آموز را برای درک منطقی نتیجه موردنظر و پاسخ این سؤالات آماده کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۵۹

در سؤال اول، انتظار می‌رود دانش‌آموزان از اطلاعات فعالیت صفحه ۱۵۳ استفاده کرده و واریانس داده‌ها را بیابند. سپس تغییرات داده‌ها را با توجه به نتایج سؤالات مطرح شده قبل از کار در کلاس، بیان نمایند.

۱ در اولین فعالیت، واریانس جرم دوستان محمد چند گرم به توان دو است؟

(واریانس داده‌های قبلی برحسب کیلوگرم) $\times 10^{6}$ = واریانس داده‌های جدید برحسب گرم

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر واریانس دمای هوا ۶ درجه سانتی‌گراد به توان دو باشد، واریانس دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت به توان دو است؟ (راهنمایی: $F=\frac{9}{5}C+32$)

$$\delta_C^2=6 \quad , \quad \delta_F^2=\frac{81}{25}\delta_C^2 \Rightarrow \delta_F^2=\frac{81}{25}\times 6=\frac{486}{25}=19/44F^2$$

از آنجا که در محاسبه واریانس از میانگین مجذور اختلاف از میانگین داده‌ها استفاده می‌شود، این معیار، پراکندگی داده‌ها را حول میانگین بیشتر از حد انتظار نشان می‌دهد به همین دلیل از واریانس جذر گرفته می‌شود تا معیار بهتری برای بیان پراکندگی داده ها حول میانگین باشد، جذر واریانس را **انحراف معیار** می‌نامند و واحد آن برابر واحد داده‌های مورد بررسی است.

اگر داده‌های مربوط به یک کمیت در دو جامعه آماری با واحدهای متفاوت یا ناشناخته بیان شده باشد، برای مقایسه پراکندگی داده‌ها در دو جامعه از ضریب تغییرات استفاده می‌شود. همچنین ضریب تغییرات برای مقایسه دو جامعه که در مورد یک کمیت میانگین یکسانی ندارند مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ضریب تغییرات را با CV نشان می‌دهند و عبارت است از نسبت انحراف معیار به میانگین ضریب تغییرات به‌عنوان پراکندگی درون واحد مشهور است در صفحات ۱۵۹ و ۱۶۰ کتاب، نحوه محاسبه انحراف معیار و ضریب تغییرات به روشنی توضیح داده شده است.

از ضریب تغییرات تنها زمانی که همه داده‌ها مثبت باشد، استفاده می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۱۶۰

دمای هوای یک هفتهٔ اسفند مشهد و کیش، به ترتیب فارنهایت و سانتی‌گراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کلام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است (ضریب تغییرات کمتری دارد)؟

جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دو شنبه	یکشنبه	شنبه	
۳۷	۳۷	۳۹	۴۱	۴۹	۵۳	۵۰	مشهد (فارنهایت)
۲۱	۲۲	۲۲	۲۳	۲۴	۲۶	۲۷	کیش (سانتی‌گراد)

$\overline{X}_{\text{کیش}} \simeq ۲۳/۵۷$

$\delta^۲_{\text{کیش}} \simeq \frac{۲۹/۷۱}{۷} = ۴/۲۴$

$\delta_{\text{کیش}} \simeq ۲/۰۵$

$cv_{\text{کیش}} = ۰/۰۸$

$\overline{X}_{\text{مشهد}} \simeq ۴۳/۷۱$

$\delta^۲_{\text{مشهد}} \simeq \frac{۲۷۳/۴۳}{۷} = ۳۹/۰۶$

$\delta_{\text{مشهد}} \simeq ۶/۲۴$

$cv_{\text{مشهد}} \simeq ۰/۱۴$

پس کیش دارای دمای هوایی با ضریب تغییرات کمتر است.

لازم است تا دانش‌آموزان مهارت کافی در تعیین اثر تغییرات روی داده‌ها بر انحراف معیار و ضریب تغییرات کسب کنند. در قسمت تمرین صفحه ۱۶۲ سؤال ۱ به این مسئله پرداخته شده است. لازم است تا همکاران با مثال‌های متنوع دیگر به درک بهتر دانش‌آموزان در این مورد کمک کنند.

چارک‌ها نقاطی بر روی مقیاس اندازه‌گیری هستند که کلیه مشاهدات یا نمره‌ها را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دستورالعمل پیدا کردن چارک‌ها در فلوچارت صفحه ۱۶۱ آورده شده است. چارک ها تعمیم میانه هستند سایر تعمیم‌های میانه، دهک‌ها و صدک‌ها هستند که در مطلب خواندنی صفحه ۱۶۲ به آنها پرداخته شده است.

با توجه به اینکه نرم‌افزار آفیس یکی از پرکاربردترین نرم‌افزارهای موجود در سطح جامعه است. قسمت خواندنی انتهای فصل به آموزش نحوه استفاده از برنامه اکسل این نرم‌افزار با هدف کاربرد آن در رسم نمودارهای آماری پرداخته است. دانش‌آموزان دو دوره اول متوسطه با انواع نمودارهای آماری و ویژگی‌های آنها آشنا شده‌اند. توصیه می‌شود در صورت داشتن وقت و امکانات، این قسمت به عنوان یک کار فوق برنامه و به‌منظور آشنایی و ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان در کلاس اجرا شود. در هر صورت انجام ارزشیابی از این قسمت غیرضروری و خارج از برنامه درسی این کتاب است.

کار در کلاس صفحه ۱۶۲

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد کند. وی از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید، در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

۴۵	۹۰	۶۰	۲۰۰	۱۵	۱۸۰	۴۵	۸۰	۳۰	۱۲۰
۷۵	۹۰	۹۰	۶۰	۲۰	۱۲۰	۱۱۵	۶۰	۳۰	۲۰
۴۵	۴۵	۶۰	۶۰	۶۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۲۰۰	۲۵
					۱۵	۳۰	۱۸۰	۱۰۰	۱۲۰

چارک اول، میانه و چارک سوم مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان این کلاس را مشخص کنید.

Q_2 Q_1

۹۰و۹۰و۸۰ و۷۵و۷۵و۶۰و۶۰و۶۰و۶۰و۶۰و۶۰و ۴۵و۴۵و۴۵و۴۵و ۳۰و۳۰و۳۰و۲۵و۲۰و۲۰و۱۵و ۱۵

۹۰و۹۰و۱۰۰ و۱۰۰ و۱۱۵و۱۲۰و۱۲۰و۱۲۰و۱۸۰و۱۸۰و۲۰۰و۲۰۰

Q_3

توصیه‌های آموزشی

معمولاً در متغیرهای آماری، متغیری که پراکندگی آن زیاد نباشد، ثابت درنظر گرفته می‌شود. ذکر این مطلب برای درک بهتر دانش‌آموزان از داده‌هایی که با آنها سروکار دارند مفید است به‌عنوان مثال، در میان دانشجویان ترم اول یک دانشگاه، متغیرهایی مانند قد و سن پراکندگی چندانی ندارند و اطلاعات زیادی در مورد جامعه به ما نمی‌دهند.

برای درک بهتر واریانس، می‌توان دو دسته کارمند را در دو کشور مختلف مثال زد که دارای میانگین درآمدی یکسانی باشند. نمی‌توان نتیجه گرفت شرایط هردو گروه یکسان است. زیرا در کشوری که شاخص قیمت‌ها پایین‌تر است، کارکنان رفاه بیشتری دارند. حتی اگر شاخص قیمت‌ها یکسان باشد، بازهم جامعه‌ای که پراکندگی درآمد آن کمتر است از سلامت اقتصادی بیشتر و رفاه بالاتری برخوردار است. اینجاست که برای مقایسه داده‌ها از واریانس استفاده می شود.

حال اگر میانگین داده‌ها یکسان نباشد، دیگر واریانس هم برای مقایسه مفید نیست و باید از ضریب تغییرات استفاده کرد.

مثالی دیگر : سه استخر را درنظر بگیرید با میانگین عمق‌های یکسان و انحراف معیارهای صفر، ۰/۵ و ۱/۵ از دانش‌آموزان بخواهید تعیین کنند کدام یک برای شنای یک فرد مبتدی با قد ۱/۶۰ مناسب‌تر است.

تمرین صفحه ۱۶۲

۱ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. (با فرض آنکه همه داده‌ها و C مثبت باشند)

ـ اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازهٔ $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد.

ـ اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود.

ـ اگر مقدار ثابت $\frac{1}{c}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می شود.

ـ اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

حل :

ـ نادرست. اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

ـ نادرست. اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین به اندازهٔ c اضافه می شود و در نتیجه ضریب تغییرات $cv=\frac{\delta}{\overline{X}}$ کوچک‌تر می‌شود، چون صورت کسر ثابت و مخرجش بزرگ‌تر شده است.

ـ درست. با ضرب کردن هر مقدار ثابت مثبت در داده‌ها، انحراف معیار نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود.

ـ درست. اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار و میانگین هر دو c برابر می‌شوند، پس ضریب تغییرات $cv = \frac{\delta}{\overline{X}}$ بدون تغییر می‌ماند.

۲ کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است.

حل.

$$A \begin{cases} \overline{X}_A = ۱۱۰۰۰ \\ \delta_A = ۲۰۰۰ \end{cases} \quad \text{ضریب تغییرات نوع } A = \frac{\delta_A}{\overline{X}_A} = \frac{۲۰۰۰}{۱۱۰۰۰} \simeq ۰/۸۱۲$$

$$B \begin{cases} \overline{X}_B = ۱۰۰۰۰ \\ \delta_A = ۱۰۰۰ \end{cases} \quad \text{ضریب تغییرات نوع } B = \frac{\delta_B}{\overline{X}_B} = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰۰} \simeq ۰/۱$$

لاستیک نوع B ، که ضریب تغییرات کمتری دارد، بهتر است.

۳ جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد.

الف) میانگین و میانهٔ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

حل.

الف)

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	$\overline{X} = ۲۵$	۲۵ = میانه
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	$\overline{Y} = ۲۵$	۲۵ = میانه

$$\begin{cases} \text{میانگین پول توجیبی دوستان مینا } \overline{X} = \dfrac{۲۳+۲۴+۲۵+۲۶+۲۷}{۵} = ۲۵ \\ \text{مرتب شدهٔ داده‌ها } \to ۲۳،۲۴ ،۲۵،۲۶،۲۷ : \text{میانه} = ۲۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{میانگین پول توجیبی دوستان مریم } \overline{Y} = \dfrac{۱۵+۲۰+۲۵+۳۰+۳۵}{۵} = ۲۵ \\ \text{مرتب شدهٔ داده‌ها } \to ۱۵ ،۲۰ ،۲۵،۳۰ ،۳۵ : \text{میانه} = ۲۵ \end{cases}$$

ب)

دوستان مریم		
y_i	$y_i - \overline{Y}$	$(y_i - \overline{Y})^۲$
۱۵	۱۰-	۱۰۰
۲۰	۵-	۲۵
۲۵	۰	۰
۳۰	۵	۲۵
۳۵	۱۰	۱۰۰
		۲۵۰ = مجموع

دوستان مینا		
x_i	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^۲$
۲۳	۲-	۴
۲۴	۱-	۱
۲۵	۰	۰
۲۶	۱	۱
۲۷	۲	۴
		۱۰ = مجموع

$$\delta_۱ = \sqrt{\frac{(x_۱ - \overline{X})^۲ + (x_۲ - \overline{X})^۲ + \ldots + (x_۵ - \overline{X})^۲}{۵}}$$

$$\delta_۱ = \sqrt{\frac{۱۰}{۵}} = \sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱$$

$$\delta_۲ = \sqrt{\frac{(y_۱ - \overline{Y})^۲ + (y_۲ - \overline{Y})^۲ + \ldots + (y_۵ - \overline{Y})^۲}{۵}}$$

$$\delta_۲ = \sqrt{\frac{۲۵۰}{۵}} = \sqrt{۵۰} \simeq ۷/۱$$

پ) ضریب تغییرات هر دو گروه را به‌دست می آوریم :

$$\text{ضریب تغییرات پول توجیبی دوستان مینا} = \frac{\delta_۱}{\overline{X}} = \frac{۱/۴۱}{۲۵} = ۰/۰۵۶۴$$

$$\text{ضریب تغییرات پول توجیبی دوستان مریم} = \frac{\delta_۲}{\overline{Y}} = \frac{۷/۱}{۲۵} = ۰/۲۸۴$$

برنامه‌ریزی برای گروهی ساده‌تر است که ضریب تغییرات کمتری داشته باشد، پس برنامه‌ریزی سفر یک روزه برای دوستان مینا ساده‌تر است.

۴ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های **۹۴ ــ ۸۴** را براساس جدول زیر محاسبه کنید.

۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸	۱۳۸۷	۱۳۸۶	۱۳۸۵	۱۳۸۴	سال
۱۱/۹	۱۵/۶	۳۴/۷	۳۰/۵	۲۱/۵	۱۲/۴	۱۰/۸	۲۵/۴	۱۸/۴	۱۱/۹	۱۰/۴	نرخ تورم

حل.

$$\text{میانگین } \overline{X} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \frac{۲۰۳/۵}{۱۱} = ۱۸/۵$$

۳۴/۷ و ۳۰/۵ و ۲۵/۴ و ۲۱/۵ و ۱۸/۴ و ۱۵/۴ و ۱۲/۴ و ۱۱/۹ و ۱۱/۹ و ۱۰/۸ و ۱۰/۴ ← مرتب‌شدهٔ داده‌ها

۱۵/۴ = میانه

	۱۱/۹	۱۵/۶	۳۴/۷	۳۰/۵	۲۱/۵	۱۲/۴	۱۰/۸	۲۵/۴	۱۸/۴	۱۱/۹	۱۰/۴	نرخ تورم x_i
	−۶/۶	−۲/۹	۱۶/۲	۱۲	۳	−۶/۱	−۷/۷	۶/۹	−۰/۱	−۶/۶	−۸/۱	$x_i - \overline{X}$
مجموع ۷۲۰/۷ =	۴۳/۵۶	۸/۴۱	۲۶۲/۴۴	۱۴۴	۹	۳۷/۲۱	۵۹/۲۹	۴۷/۶۱	۰/۰۱	۴۳/۵۶	۶۵/۶۱	$(x_i - \overline{X})^۲$

$$\text{انحراف معیار } \delta = \sqrt{\frac{(x_۱ - \overline{X})^۲ + (x_۲ - \overline{X})^۲ + \ldots + (x_{۱۱} - \overline{X})^۲}{۱۱}} = \sqrt{\frac{۷۲۰/۷}{۱۱}} \simeq ۸/۱$$

۵ در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهکیلویه و بویراحمد دیده می‌شود (**راهنمایی :** $۱m = ۳/۲۸۱ft$ ، فوت : ft ، متر : m).

کهکیلویه و بویراحمد				مرکزی			
دنا	دهدشت	یاسوج	شازند	خمین	محلات	اراک	شهر
۷۲۱۸/۲۰ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۱۹۲۰ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۷۰۸ (m)	فاصله‌از سطح‌دریا

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

حل.

استان	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)
					۱۸۷۰ (m)	۹۹۰ (m)	۲۲۰۰ (m)

ابتدا به عنوان مثال ارتفاع از سطح دریا برای شهر یاسوج را برحسب متر، به‌دست می‌آوریم :

$$\text{ارتفاع از سطح دریا برحسب متر} = \frac{۶۱۳۵/۴۷}{۳/۲۸۱} = ۱۸۷۰$$

الف) $\overline{X}$ میانگین استان مرکزی $= \dfrac{۱۷۰۸+۱۷۷۵+۱۸۳۰+۱۹۲۰}{۴} = ۱۸۰۸/۲۵$

ب)

ارتفاع x_i از سطح دریا استان مرکزی	۱۷۰۸	۱۷۷۵	۱۸۳۰	۱۹۲۰	
$x_i - \overline{X}$	$-۱۰۰/۲۵$	$-۳۳/۲۵$	۲۱/۷۵	۱۱۱/۷۵	
$(x_i - \overline{X})^۲$	۱۰۰۵۰/۰۶۲۵	۱۱۰۵/۵۶۲۵	۴۷۳/۰۶۲۵	۱۲۴۸۸/۰۶۲۵	مجموع ۲۴۱۱۶/۷۵ =

δ انحراف معیار استان مرکزی $= \sqrt{\dfrac{(x_۱ - \overline{X})^۲ + (x_۲ - \overline{X})^۲ + (x_۳ - \overline{X})^۲ + (x_۴ - \overline{X})^۲}{۴}}$

$$= \sqrt{\frac{۲۴۱۱۶/۷۵}{۴}} = \sqrt{۶۰۲۹/۱۸۷۵} \simeq ۷۷/۶۵$$

پ) $\overline{Y}$ میانگین استان کهکیلویه و بویراحمد $= \dfrac{۱۸۷۰+۹۹۰+۲۲۰۰}{۳} \simeq ۱۶۸۷$

با توجه به میانگین بیشتر استان مرکزی، ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای استان مرکزی بیشتر است.

نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۷

۱ دو تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم اگر بدانیم مجموع دو تاس کمتر از ۶ است. به چه احتمالی عدد هردو تاس مثل هم هستند؟

۲ اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A)=\frac{۳}{۴}$ ، مقدار $P(B|A)$ را محاسبه کنید.

۳ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a ، b ، c و d است. اگر $P(\{b,c,d\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{b\})=\frac{۱}{۴}$

مطلوب است : الف) $P(\{a,c,d\}\big|\{b,c,d\})$ ب) $P(\{a\}\big|\{a,c,d\})$

۴ یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم :

پیشامد A : مجموع شماره‌های ظاهر شده در دو پرتاب ۸ باشد.

پیشامد B : شماره‌های ظاهر شده در دو پرتاب مساوی باشد.

الف) $P(A)$ و $P(B)$ را به‌دست آورید.

ب) آیا پیشامدهای A و B مستقل هستند؟

پ) اگر پیشامد A اتفاق بیفتد، احتمال اینکه پیشامد B اتفاق بیفتد، چه‌قدر است؟

۵ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد به‌طوری که $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$

الف) آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ ب) $P(A|B)$ را به‌دست آورید.

۶ احتمال آنکه در ده سال آینده اعتراضات مردمی در کشور A به سقوط دولت بینجامد $\frac{۱}{۷}$ و احتمال آنکه اعتراضات مردمی در کشور B باعث سقوط دولت شود $\frac{۱}{۲}$ است. چه‌قدر احتمال دارد :

الف) تا دو سال آینده، دولت در هردو کشور سقوط کند.

ب) حداقل یکی از دولت‌ها ظرف ده سال آینده سقوط کند.

۷ A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S می‌باشند و $P(A)=۰/۲۵$ و $P(B)=\alpha$ و $P(A\cup B)=۰/۷$

اگر A و B مستقل باشد، α چه‌قدر است؟

۸ اگر تمام داده‌های $x_۱$ و $x_۲$ و... و x_n را در ۵ ضرب کنیم در مورد تغییرات موارد زیر بحث کنید.

الف) میانگین ب) واریانس پ) ضریب تغییرات

۹ جاهای خالی را پرکنید.

الف) مهم‌ترین شاخص مرکزی .... است.

ب) دامنه تغییرات با .... از داده‌ها سروکار دارد.

پ) برای ازبین بردن واحد اندازه‌گیری از شاخص .... استفاده می‌کنیم.

۱۰ اگر دامنه تغییرات داده‌های x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و ۷ برابر صفر باشد. میانه داده‌های زیر را به‌دست آورید.

x_4+1 و x_3-2 و $3x_2-3$ و $2x_1-1$

۱۱ اگر ده داده آماری را دوبرابر کنیم و ۵ واحد به هرکدام از آنها اضافه کنیم ضریب تغییرات داده‌های جدید ۱/۵ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است مجموع داده‌های قبلی را به‌دست آورید.

۱۲ ۱۳ داده آماری با واریانس ۱۰ و ۱۲ داده آماری با واریانس ۶ را باهم ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هردو گروه یکسان باشد، انحراف معیار ۲۵ داده حاصل را به‌دست آورید.

۱۳ اگر ۲ درصد قیمت هر محصول به عنوان مالیات بر ارزش افزوده به محصولات یک کارخانه اضافه شود. میانگین و ضریب تغییرات قیمت محصولات چه تغییری می‌کند.

۱۴ در داده‌های زیر چارک اول و سوم را تعیین کنید.

۱۵۲ ، ۱۵۵و۱۵۲و۱۵۰و۱۵۶و۱۵۵و۱۵۷و۱۴۰و۱۵۶و۱۵۷و۱۶۰

نمرات درس ریاضی سارا به‌صورت ۱۸و۱۷و۱۷و۱۴و۱۶و۱۷و۶ است.

الف) میانه و میانگین این داده‌ها را به‌دست آورید.

ب) کدام یک از شاخص‌ها برای بررسی نمرات سارا بهتر است؟ چرا؟

پ) برای اینکه معدل او ۱۶/۵ باشد به‌جای نمره ۶ چه نمره‌ای باید بگیرد؟

۱۵ میانگین ۸ داده آماری برابر ۶ محاسبه شده است پس از بررسی مجدد معلوم شد که دو مقدار ۱۱ و ۱۲ باید به داده‌ها اضافه شود. میانگین جدید چقدر است؟

۱۶ در داده های زیر اگر داده‌های بیشتر از چارک سوم را حذف کنیم، میانگین داده‌های جدید را به‌دست آورید.

۱۵و۱۰و۱۲و ۳۴ و ۴۱و ۴۳ و ۳۲ و ۱۸ و ۲۵ و ۳۱و ۱۹

۱۷ امتیازات مهارت کاری دو نفر از پرسنل یک آزمایشگاه در ۵ روز کاری به‌صورت زیر است. دقت عمل کدام یک بیشتر است؟

A : ۲۷و۲۶و۲۴و۲۳و۲۰ B : ۲۸و۲۶و۲۳و۲۲و۲۱

۱۸ نمرات ریاضی ۲۰ دانش‌آموز به‌صورت زیر است :

۱۹و۱۹و۱۸و۱۷و۱۷و۱۶و۱۶و۱۵و۱۵و۱۴و۱۳و۱۲و۱۲و۱۰و۱۰و۹و ۸و ۸و ۵

الف) میانگین، میانه و واریانس این داده‌ها را به‌دست آورید.

ب) اگر معلم به‌خاطر کار کلاسی دانش‌آموزان یک نمره به تمام دانش‌آموزان اضافه کند، با استفاده از مقادیری که در سؤال ۲۸ به‌دست آورده‌اید، ضریب تغییرات نمرات جدید را به‌دست آورید.

۱۹ میانگین و انحراف معیار امتیازات فنی پروازهای یک خلبان ۳۰ ساله ۲۱ و ۳/۵ و میانگین و انحراف معیار یک خلبان ۴۰ ساله ۲۵ و ۴ است. دقت عمل کدام یک بیشتر است؟